كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : برمجة غرضة التوجة

المحاضرة : السابعة /**نظري**/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات
مقرر: برمجة غرضية التوجه- السنة الرابعة

المحاضرة السابعة

جمع وطرح المصفوفات:

يمكن جمع مصفوفتين أو طرح واحدة من الأخرى إذا كانت أبعادهما متماثلة، أي لهما نفس عدد الصفوف والأعمدة. ويتم الجمع بجمع كل عنصر مع العنصر المقابل له في المصفوفة الأخرى.

$$T = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فعند جمع **E+T** مثلا ، نجمع **e12+t12** وهكذا، فنحصل على.

$$E + T = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الجمع باستخدام ماتلاب:

```
E = [6 0; 0 2]
E =
   0   6
   2   0
T = [6 7; 0 2]
T =
    7   6
    2   0
E + T
ans =
    7   12
    4    0
```

ضرب المصفوفات:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&4\\1&3&5\end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفة بعدد مفرد، يقتضي ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بذلك العدد المفرد مثلا : **2A** يعطي.

$$2A=\begin{bmatrix}2&4&6\\4&2&8\\2&6&10\end{bmatrix}$$

مثال باستخدام ماتلاب:

```
2*A
ans =
    6   4   2
    8   2   4
   10   6   2
```

ويمكن ضرب متجه صف بمتجه عمود أو العكس، إذا كانت أعداد العناصر في كل متجه متساوية. ولكن لا يمكن ضرب متجه عمود بمتجه عمود أو متجه صف بمتجه صف.

وفي حالة ضرب صف بعمود يكون الناتج عددا مفردا . ونستخدم هذه العملية كثيرا خاصة عند ضرب المصفوفات. وتسمى بعملية الضرب الداخلي.

مثلا يتم ضرب المتجهين **DB** كالتالي:

$$D\,B=\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\5\\1\end{bmatrix}=[1(10)+2(5)+3(1)]=23$$

ضرب المصفوفات:

أما في حالة ضرب عمود بصف يكون الناتج مصفوفة. وتسمى عملية الضرب هذه بعملية الضرب الخارجي. وقليلا ما نستخدم هذه العملية. مثال:

$$BD=\begin{bmatrix}10\\5\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10(1)&10(2)&10(3)\\5(1)&5(2)&5(3)\\1(1)&1(2)&1(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&20&30\\5&10&15\\1&2&3\end{bmatrix}$$

لا يوجد فرق تقريبا – إلا استخدام النجمة كمعامل ضرب – عندما تستخدم ماتلاب لضرب المتجهات:

```
D*B
ans =
    23
B*D
ans =
    20   30   10
     5   10   15
     1    2    3
```

ويشترط لضرب مصفوفة بأخرى أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى (من اليسار) مساويا لعدد صفوف المصفوفة الثانية. ويكون للمصفوفة الناتجة من الضرب في حال تحقق هذا الشرط عدد صفوف مسا و لعدد صفوف المصفوفة الأولى، وعدد أعمدة مسا و لعدد أعمدة المصفوفة الثانية.

وللقيام بعملية الضرب، نقسم المصفوفة الأولى إلى صفوف والثانية إلى أعمدة، ثم نضرب كل صف بكل عمود. فعلى سبيل المثال في **ET=G** يتم حساب العنصر g_{ij} **في** المصفوفة **G** بضرب الصف **i** في المصفوفة الأولى **E** بالعمود **j** في المصفوفة الثانية **T** .

ضرب المصفوفات:

كما يتضح مما يلي:

$$ET = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(6)+0(0) & 6(7)+0(2) \\ 0(6)+2(0) & 0(7)+2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 42 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

لاحظ أنه كقاعدة عامة ناتج ضرب **AB** لا يساوي ناتج ضرب **BA**

قارن بماتلاب:

```
E*T
ans =
      36    42
       0     4
T*E
ans =
      36    14
      0      4
```

ومن خواص جمع وضرب المصفوفات ما يلي:

A+B = B+A

kA = Ak

A(B+C) = AB + AC

محدد المصفوفة:

لكل مصفوفة مربعة **A** عدد مفرد حقيقي يسمى محدد المصفوفة، ويرمز له عادةبالرمز **|** A **|**. ويمكن أيجاد محدد المصفوفة المربعة **A** المكونة من صفين وعمودين باستخدام هذا القانون:

محدد المصفوفة:

تقوم الدالة **det** في ماتلاب بحساب محدد المصفوفة:

```
det(T)
ans =
      12
det(A)
ans =
      -4
```

ويمكن إيجاد محدد المصفوفة المكونة من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة باختيار أي صف أو عمود في المصفوفة. وبافتراض أننا اخترنا الصف الأول فيمكن حساب المحدد كالتالي:

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

حيث ترمز **M_{ij}** لمحيدد العنصر **a_{ij}**، ويمكن الحصول عليه بإيجاد محدد المصفوفة الجزئية التي تنتج من حذف العناصر الموجودة في صف وعمود ذلك العنصر.

مثال: محدد المصفوفة **A** هو:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 12 = -7$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

$$|A| = 1(-7) - 2(6) + 3(5) = -4$$

معكوس المصفوفة

لا يمكن أيجاد معكوس المصفوفة إلا للمصفوفة المربعة التي يكون محددها غير مساو للصفر. ومعكوس المصفوفة **A** يحسب وفق هذه المعادلة

$$A^{-1} = (1/|A|)\ Adj\ A$$

أي بقسمة كل عنصر من عناصر المصفوفة المصاحبة لـ **A** (والمرموز لها بـ **Adj A**) على محدد المصفوفة **A**، **|A|**، والمصفوفة المصاحبة للمصفوفة **A** (**Adj A**) هي عبارة عن مقلوب مصفوفة المرافقات الخاصة بـ **A**.

ويمكن الحصول على مصفوفة المرافقات باستبدال كل عنصر في المصفوفة بمرافقه.

والمرافق يساوي المحيدد أو سالب المحيدد بحسب موقع العنصر. ويمكن معرفته بواسطة هذه المعادلة $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

فبحسب هذه المعادلة يساوي المرافق المحيدد $C_{ij} = M_{ij}$ إذا كانت قيمة $i+j$ عدداً زوجياً، ويساوي سالب المحيدد $C_{ij} = -M_{ij}$ إذا كانت قيمة $i+j$ عدداً فردياً.

مثال: لحساب معكوس المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

نتبع الخطوات السابقة:

١- المصفوفة مربعة ومحددها يساوي **|A|=-4** ، فيكون لهذه المصفوفة معكوس؛ لأن محددها لا يساوي صفراً.

٢- تساوي مصفوفة المرافقات:

معكوس المصفوفة

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -7 & -6 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

٣- المصفوفة المصاحبة للمصفوفة **A** هي:

$$Adj\ A = C' = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 5 \\ -6 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

٤- وبالتالي نحسب معكوس المصفوفة **A**:

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} -7 & -1 & 5 \\ -6 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

قاعدة: ضرب المصفوفة بمعكوسها، أو المعكوس بالمصفوفة ينتج مصفوفة وحدة.

$$A^{-1} A = A A^{-1} = I$$

ويفيد هذا في التحقق من صحة حساب المعكوسة.

معكوس المصفوفة

تقوم الدالة **inv** في ماتلاب بحساب معكوس المصفوفة. ولإعادة حساب المعكوسة **A** أعلاه نقوم أولا بإدخال المصفوفة ثم عكسها:

```
A = [1 2; 0 1]
A =
   1   2
   0   1
inv(A)
ans =
   1   -2
   0    1
```

وللتمثيل للقاعدة الأخيرة، نضرب المصفوفة بمعكوسها:

```
A*inv(A)
ans =
    1     0
    0     1
inv(A)*A
ans =
     1     0
     0     1
```

حل معادلة في مجهول واحد

خواص المعادلات:

لحل المعادلات نستخدم الخواص التالية:

(١) خاصية الجمع: جمع (أو طرح) أي عدد لكلا (من) طرفي المعادلة لا يؤثر على صحة المعادلة؛ وهذه الخاصية تقتضي أن ننقل أي حد من طرف المعادلة إلى الطرف الآخر، يستلزم تغيير إشارة هذا الحد.

(٢) خاصية الضرب: ضرب (أو قسمة) طرفي المعادلة بعدد (على عدد) معين لا يؤثر على صحتها. وهذه الخاصية تجيز قسمة معامل المتغير إذا كان هو الحد الوحيد في أحد طرفي المعادلة على جميع حدود الطرف الآخر.

حل المعادلة الخطية في مجهول واحد:

حل المعادلة التربيعية في مجهول واحد:

يوجد أكثر من طريقة لحل المعادلات باستخدام ماتلاب. ومن هذه الطرق استخدام الأمر **solve** وهذه بعض الأمثلة:

```
x = solve('3*x + 4 = 7')
x =
   1
x = solve('2*x^2 + 8*x -10 = 0')
x =
  [-5 ]
  [1 ]
```

لاحظ أن للدالة التربيعية حلان.

الفرق بين المعادلة و المتباينة:

تكون المعادلة الخطية صحيحة بالنسبة لقيمة واحدة للمجهول، كما أن المعادلة التربيعية تكون صحيحة بالنسبة لقيمتين من قيم المجهول؛ وعلى خلاف ذلك، تكون المتباينة صحيحة لعدد لا نهائي من قيم المجهول.

المعامل	مثال	المعنى
>	$x > 0$	x أكبر من صفر
≥	$x \geq 0$	x أكبر من أو تساوي صفر
<	$x < 0$	x أصغر من صفر
≤	$x \leq 0$	x أصغر من أو تساوي صفر

ولمتباينات نوعان: بسيطة ومركبة.

مثال المتباينة البسيطة	$x > 4$
مثال المتباينة المركبة	$4 > x > 2$
وهي تعني أن	$x>2$ و $x<4$

حل المتباينات

لحل المتباينات نستخدم خواص المعادلات نفسها، ما عدا أن ضرب المتباينة بعدد سالب أو قسمتها على عدد سالب يؤدي إلى قلب المتباينة (أصغر من) إلى (أكبر من) والعكس؛ وخطلاف المعادلة يتمثل حل المتباينة في كل قيم المجهول الذي يجعل المتباينة صحيحة.

ويمكن الاستعانة بنفس الدالة في الماتلاب لحل المتباينات. فمثلا $13 > 2x$ يمكن حلها بهذه الطريقة:

```
solve('13 = 2*x')
ans =
  13/2
```

فيكون الحل $x < 13/2$

نظم المعادلات الخطية

نظم المعادلات الخطية الآنية هي مجموعة معادلات خطية تتضمن عددا من المجاهيل. ويمكن حل النظام بحساب قيم المجاهيل التي تجعل جميع المعادلات في النظام صحيحة.

شروط حل للنظام:

يشترط لحل نظم المعادلات الآنية:

١ . **الاتساق**؛ ففي حالة عدم الاتساق لا يوجد حل للنظام، والحل الجبري ينتهي في هذه الحالة بمتباينة، ويمثل هذا النظام بيانيا في شكل خطوط متوازية.

٢ . **الاستقلال**؛ ففي حالة عدم الاستقلال يكون هناك عدد لا نهائي من الحلول، والحلالجبري ينتهي في هذه الحالة بمتطابقة، ويمثل هذا النظام بيانيا في شكل خطوط متطابقة فوق بعضها.

٣ . **تساوي عدد المجاهيل مع عدد المعادلات**

طرق حل النظام:

من طرق حل نظم المعادلات الآنية: (١) الرسم (٢) ا ولتعويض (٣) ا والحذف (٤) كوريمر (المحددات) (٥) ومعكوس المصفوفة.

وطريقة الرسم تكون ممكنة في حال كون النظام مكونا من معادلتين أو ثلاث، ومستحيلة إذا كان يتكون من أكثر من ثلاث معادلات. ومن عيوبها أنها تعطي حلا تقريبي ا . أما بقية طرق الحل فهي طرق جبرية.

وفي طريقتي التعويض والحذف يكون الهدف تحويل النظام المكون من معادلتين إلى معادلة واحدة في مجهول واحد، ثم يتم حلها باستخدام خواص المعادلات.

الحل بطريقة الحذف

يمكن الاستعانة بماتلاب لحل هذا النظام باستخدام دالة **solve**:

بفرض لدينا الماعدلتين التاليتين أوجد الحل باستخدام الماتلاب بطريقة الحذف

3x – y = 0
4x + 2 y = 5

```
syms x y
[x,y]=solve('3*x-y=0','4*x + 2*y=5')
x =
1/2
y =
3/2
```

طرق حل النظام:

حل نظم المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات)طريقة كريمر(:

يمكن حل نظام المعادلات الآنية بالاستعانة بإمكانية ماتلاب في التعامل مع المصفوفات.

بفرض لدينا المعادلتين التاليتين أوجد الحل باستخدام الماتلاب بطريقة المصفوفات

3x – y = 0
4x + 2 y = 5

نقوم أولا بإدخال مصفوفة المعلمات والثوابت:

```
A = [3 -1; 4 2]
A =
   3     -1
   4      2
b = [0;5]
b =
      0
      5
```

ثم نحسب الحل بطريقة معكوس المصفوفة:

```
x = inv(A)*b
x =
    0.5000
    1.5000
```

حل نظام مكون من ثلاث معادلات:

يمكن حل هذا النظام باستخدام الدالة :**solve**

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$$

```
[x1,x2,x3 ] = solve('2*x1+4*x2+6*x3=18','4*x1+5*x2+6*x3=24',...
'3*x1+x2-2*x3=4')
x1 =
4
x2 =
-2
x3 =
3
```

يمكن كذلك حل النظام بالاستعانة بإمكانيات ماتلاب في التعامل مع المصفوفات.

```
A = [2 4 6;4 5 6;3 1 -2]

A =
     2     4     6
     4     5     6
     3     1    -2
```

حل نظام مكون من ثلاث معادلات:

```
b = [18;24;4]

b =
    18
    24
     4
```

ثم نحسب الحل بطريقة معكوس المصفوفة:

```
x = inv(A)*b

x =
    4.0000
   -2.0000
    3.0000
```