كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : برمجة غرضة التوجة

المحاضرة : السادسة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم : الرياضيات

برمجة غرضية التوجه

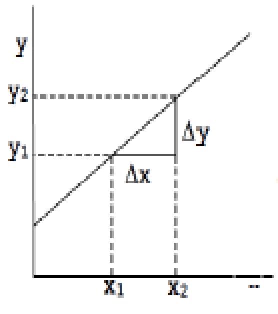
السنة : الرابعة

المحاضرة السادسة نظري

مبادئ التفاضل

معدل التغير والمشتقة الأولى للدالة:

يرمز $(\Delta y/\Delta x)$ لمعدل التغير؛ حيث $\Delta x= x_2 - x_1$, $\Delta y= y_2 - y_1$. وهو يقيس معدل التغير بين النقطتين على المستوى الممثلتين بالزوجين المرتبين: $\{(x_1,y_1) , (x_2,y_2)\}$؛ وبعبارة أخرى يقيس معدل التغير ميل الخط المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين. ويوضح الشكل الآتي معدل التغير بيانياً.



أما المشتقة الأولى للدالة $y=f(x)$ بالنسبة للمتغير المستقل x والتي يعبر عنها رياضيا بـ dy/dx ، فتقيس ميل الخط المماس للمنحنى الممثل للدالة عند قيمة محددة للمتغير المستقل x. ويجب ملاحظة أن $\Delta y/\Delta x=dy/dx$ تصدق في حالة الدالة الخطية فقط، وذلك لأن ميل الدالة الخطية ثابت، فميل الدالة عند x_1 يساوي ميلها عند x_2 أو عند أي قيمة أخرى للمتغير المستقل x.

أما في حالة الدالة غير الخطية فالعلاقة بين معدل التغير والمشتقة الأولى للدالة تقريبية؛ $\Delta y/\Delta x\approx dy/dx$. أي أن معدل التغير بين نقطتين يساوي تقريباً مشتقتها الأولى عند إحدى هاتين النقطتين. وكلما قل الفرق بين النقطتين؛ وبالتالي Δx كلما قل الفرق بين قيمة معدل التغير $\Delta y/\Delta x$ والمشتقة الأولى dy/dx ؛ ولهذا يعرف التفاضل رياضيا بأنه:

معدل التغير والمشتقة الأولى للدالة:

نهاية معدل التغير بين نقطتين عندما يؤول الفرق بينهما إلى الصفر ؛ أي:

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أشكال التعبير عن مشتقات الدالة:

يمكن التعبير رياضياً عن المشتقة الأولى للدالة **y=f(x)** بالنسبة للمتغير **x** (أو تفاضل الدالة **y** بالنسبة لـ **x**) بأكثر من رمز؛ ومن أشهرها:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = y'$$

وبالمثل يعبر عن المشتقة الثانية بإحدى هذه الصور:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}[f(x)] = y''$$

وهكذا.

قوانين التفاضل:

إذا كانت **a** و **n** ثوابت، و **y** متغير تابع و **x** متغير مستقل، فإن القوانين الأتية تنطبق على تفاضل الدالة **y** بالنسبة لـ **x**.

قوانين التفاضل:

الدالة	المشتقة الأولى للدالة
$y = a$	$y' = 0$
$y = ax$	$y' = a$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$
$y = g(x) + h(x)$	$y' = g'(x) + h'(x)$
$y = g(x) - h(x)$	$y' = g'(x) - h'(x)$
$y = g(x)\ h(x)$	$y' = g'(x)\ h(x) + g(x)\ h'(x)$
$y = g(x) / h(x)$	$y' = \frac{g'(x)\ h(x) - g(x)\ h'(x)}{[h(x)]^2}$
$y = [g(x)]^n$	$y' = n[g(x)]^{n-1}\ g'(x)$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$

قوانين التفاضل:

أمثلة:

$y = x^2 + 3x - 5$	$y' = 2x + 3$
$y = (3x^2 + 3x)^2$	$y' = 2(3x^2 + 3x)(6x + 3)$

يتضمن ماتلاب دالة تمكن من حساب تفاضل الدوال؛ وحيث إن قوانين التفاضل تتعامل مع الدوال المعبر عن متغيراتها بصورة رمزية، فإن الخطوة الأولى لحساب التفاضل هي أن نعرف هذه المتغيرات على أنها رمزية؛ ونستخدم المسألة الأولى في التمرين التالي كمثال:

```
syms y x
y = x^2 + 3*x - 5
y =
x^2+3*x-5
```

للتأكد أنك كتبت الدالة بشكل سليم يمكن استخدام الأمر:

```
pretty(y)
          2
         x + 3 x - 5
```

الآن يمكن حساب المشتقة الأولى للدالة باستخدام الأمر **diff**:

```
diff(y)
ans =
2*x+3
```

ولو رغبت بعرض الإجابة بالطريقة المعهودة لكتابتها فاستخدم الأمر **pretty** مرة أخرى:

```
pretty(ans)
         2 x + 3
```

تطبيقات التفاضل

فيما يلي عرض لأهم تطبيقات التفاضل، وسنركز في ذلك على الدالتين الخطية والتربيعية فقط.

تذكر أن:

الشكل العام للدالة الخطية هو: $y = a + bx$

الشكل العام للدالة التربيعية هو: $y = a + bx + c x^2$

التفاضل وميل الدالة:

من أهم فوائد التفاضل معرفة ميل أي دالة؛ حيث إن المشتقة الأولى للدالة تقيس ميلها. ويؤكد حساب التفاضل ما توصلنا إليه سابقا ، وهو أن ميل الدالة الخطية ثابت ويساوي **y'=b** (معامل المتغير المستقل **x**). أي أن الميل لا يتغير بتغير قيمة المتغير المستقل **x**، ومن ثم لا تظهر **x** في المشتقة الأولى للدالة الخطية.

كما يؤكد حساب التفاضل أن ميل الدالة غير الخطية عموما متغير (يتغير حسب قيمة المتغير **x**) أي أن المتغير المستقل **x** يظهر في المشتقة الأولى، وهذا يعني أن ميل الدالة يتغير تبعا لقيمة **x**، وقد يكون موجبا (دالة متزايدة) عند قيم معينة لـ **x** أو سالبا (دالة متناقصة) عند قيما أخرى لها.

وعليه، فإن عدم ظهور **x** في المشتقة الأولى يعني أن الدالة خطية، وظهورها يعني أن الدالة غير خطية.

وبخصوص الدالة التربيعية، فإن ميلها يساوي:

$$y` = b + cx$$

إشارة التفاضل وطبيعة العلاقة بين المتغير المستقل والتابع:

تحدد إشارة المشتقة الأولى طبيعة العلاقة بين المتغير المستقل والتابع في الدالة؛ فإن كانت المشتقة الأولى موجبة، فهي دالة متزايدة (تمثل علاقة طردية)، وإن كانت المشتقة الأولى سالبة فهي دالة متناقصة (تمثل علاقة عكسية)، وإن كانت المشتقة الأولى صفرا فالدالة ليست متزايدة ولا متناقصة (وتمثل عدم وجود علاقة).

ويلحظ أن الدالة الخطية تكون إما متزايدة أو متناقصة مطلقا، أما الدالة التربيعية فتكون متزايدة عند قيم معينة للمتغير المستقل **x** ومتناقصة عند قيم أخرى.

علاقة المشتقة الثانية بتحدب أو تقعر الدالة:

المشتقة الثانية للدالة تبين طبيعة الدالة من حيث كونها محدبة أم مقعرة أو خطية (لا محدبة ولا مقعرة). فإذا كانت المشتقة الثانية موجبة فالدالة مقعرة، وإن كانت المشتقة الثانية سالبة، فالدالة محدبة، وإن كانت صفرا، فالدالة خطية.

ومن المعلوم أن المشتقة الثانية للدالة التربيعية تساوي $y'' = 2c$؛ ومن ثم تحدد قيمة المعلمة **c** مدى تحدب أو تقعر الدالة التربيعية، فإن كانت موجبة، فالدالة مقعرة؛ وإن كانت سالبه؛ فالدالة محدبة.

وتتميز الدالة التربيعية المحدبة بأنها متزايدة في البداية (ذات ميل موجب)، ثم تصل إلى قيمتها الكبرى (عندما يكون ميلها صفرا)، وتبدأ بعدها في التناقص (ذات ميل سالب).

أما الدالة التربيعية المقعرة فتتميز بأنها متناقصة في البداية (ميلها سالب)، ثم تصل إلى قيمتها الصغرى (عندما يكون ميلها صفرا)، وتبدأ بعدها في التزايد (يكون ميلها موجبا).

ومن هذا يتبين أن ميل الدالة التربيعية يكون صفرا عند قيمة **x** التي تصل عندها الدالة إلى قيمتها الكبرى أو الصغرى؛ حيث يكون الخط المماس للدالة عند هذه القيمة أفقيا ، وميل الخط الأفقي يساوي الصفر .

القيمة العظمى للدالة التربيعية:

خطوات إيجاد قيمة **x** التي تعظم الدالة $y = f(x)$ هي:

(١) أوجد المشتقة الأولى للدالة $y`$.

(٢) اجعل هذه المشتقة مساوية للصفر $y` = 0$، ثم حل المعادلة لإيجاد قيمة x^*، التي تصل عندها الدالة إلى قيمتها القصوى.

(٣) عوض بقيمة x^* في الدالة الأصلية بدل **x**، أي أوجد $y^* = f(x^*)$، وذلك لمعرفة قيمة **y** عند النهاية القصوى.

(٤) أوجد المشتقة الثانية $y``$ لمعرفة هل الدالة محدبة (فتكون النهاية كبرى) أو مقعرة (فتكون النهاية صغرى).

مثال: افترض الدالة التربيعية الدالة الآتية، ثم أوجد قيمة كل من x و y التي تصل الدالة عندها إلى نهايتها العظمى، وبين ما إذا كانت النهاية صغرى أم كبرى:

$$y = 2 - 12x + 3x^2$$

الخطوة الأولى

$$y` = -12 + 6$$

الخطوة الثانية

$$y` = 0$$
$$-12 + 6x = 0$$
$$x^* = 2$$

الخطوة الثالثة

$$y = 2 - 12(2) + 3(2)^2 = -10$$

الخطوة الرابعة

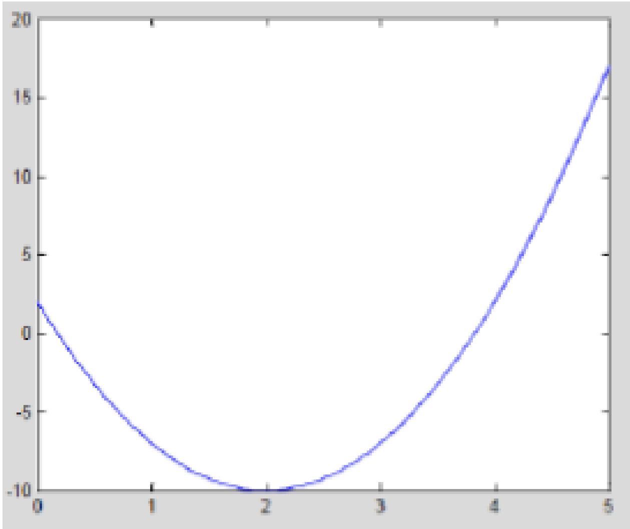
$$y`` = 6 > 0$$

وعليه، فالدالة مقعرة، ذات نهاية صغرى. أي تصل y إلى أدنى قيمة لها (-10) عند x=2

القيمة العظمى للدالة التربيعية:

باعتبار أن تطبيقات التفاضل لا تتطلب أكثر من استخدام القوانين التي سبق تعلمها فإن حساب الميل، ومعرفة هل الدالة متزايدة أو متناقصة، أو محدبة أم مقعرة، يتطلب فقط استخدام أمر حساب التفاضل **diff**. وسنبين الآن كيف يمكن استخدام ماتلاب لحل السابق

```
y = 2 - 12*x + 3*x^2
y =
2-12*x+3*x^2
pretty(y)
                2
2 - 12 x + 3 x
dy = diff(y)
dy =
-12+6*x
x = solve(dy)
x =
2
y = 2 - 12*x + 3*x^2
y =
-10
ddy = diff(dy)
ddy =
6
fplot('2-12*x+3*x^2',[0,5])
```



القيمة العظمى للدالة التربيعية:

لاحظ أن الدالة تصل إلى نهايتها الصغرى عند النقطة $(2,-10)$

ملاحظات: تم في هذا المثال استخدام دالة **solve** لحل معادلة المشتقة الأولى، وسيتم شرح المزيد عنها لاحقا

ومن جهة أخرى، يمكن حساب المشتقة الثانية أو الثالثة باستخدام دالة **diff** إذا كتبتها بهذه الطريقة:

```
diff(y,2)
```

فهذه الدالة تقوم بحساب المشتقة الثانية للدالة y مباشرة. ولحساب المشتقة الثالثة، أكتب:

```
diff(y,3)
```

التكامل

كل دالة قابلة للاشتقاق مثل $f(x)$ ، لها مشتقة يعبر عنها بالرمز $f'(x)$. ولكن إذا أُعطينا مشتقة الدالة، $f'(x)$، هل يمكننا معرفة الدالة الأصلية، $f(x)$. فلنحاول: إذا أعطينا المشتقة: $f'(x)= 2x$ ، نعرف أن الدالة الأصلية $f(x)=x^2$ ، يمكن أن تعطينا تلك المشتقة، ولكن أيضاً أي دالة أصلية أخرى مثل: $f(x)=x^2 + c$ ، حيث c يمثل أي عدد ثابت، يمكن أن يعطينا المشتقة نفسها. هذا المثال يوضح أن لكل مشتقة عدد لا نهائي من الدوال الأصلية، أو ما تسمى أحياناً بالمشتقات المضادة.

التكامل

التكامل، أو إيجاد المشتقة المضادة، هو عملية عكسية للتفاضل. والتكامل نوعان: محدد وغير محدد.

ونبدأ بتعريف التكامل غير المحدد، والذي يعبر عنه بهذه الصورة:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

ويسمى الرمز $\int$ إشارة التكامل، وتبين أن علينا إجراء عملية عكسية لعملة التفاضل للدالة التي تأتي بعدها $f(x)$ في حين تشير **dx** إلى أن عملية التكامل يجب إجراؤها بالنسبة للمتغير **x** . ويسمى الثابت **c** بثابت التكامل.

مثال:

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

قوانين التكامل:

قوانين التكامل الآتية هي عبارة عن عكس لقوانين التفاضل المناظرة، حيث تمثل a عدد ثابت حقيقي.

الدالة	تكامل الدالة
a	$\int a\,dx = ax + c$
x^n	$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad n \neq -1$

قوانين التكامل:

$g(x) + h(x)$	$\int [g(x) \pm h(x)]\,dx = \int g(x)dx \pm \int h(x)\,dx$
a^{kx}	$\int a^{kx}\,dx = \dfrac{a^{kx}}{k \ln a} + c$
e^{kx}	$\int e^{kx}\,dx = \dfrac{e^{kx}}{k} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + c \quad , x \neq 0$
$a\ f(x)$	$a \int f(x)\,dx$

يستطيع ماتلاب إيجاد تكامل الدوال باستخدام الدالة (**int**)، وكمثال على ذلك:

```
syms x y n
int(x^n)
ans =
x^(n+1)/(n+1)
int(y^(-1))
ans =
log(y)
```

التكامل المحدود

يفترق التكامل المحدود عن غير المحدود في أننا نضع حدودا للمتغير المراد إجراء التكامل بالنسبة له، ويعبر عن التكامل المحدود رياضيا في هذه الصورة:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ويقرأ: تكامل $f(x)$ من a إلى b بالنسبة للمتغير x. حيث يمثل الثابت a الحد الأدنى للتكامل، والثابت b الحد الأعلى للتكامل. وعادة ما تسمى الصيغة الرياضية أعلاه، بالنظرية الأساسية للتفاضل.

وبخلاف التكامل غير المحدود، يمكن الحدان الأعلى والأدنى للتكامل المحدود من حساب قيمة عددية للتكامل؛ ولهذا يستخدم عادة في حساب المساحة تحت دالة بين قيمتين للمتغير محل التكامل.

يستطيع ماتلاب كذلك حساب التكامل المحدود باستخدام الدالة (**int**) نفسها، وكمثال على ذلك نحسب التكامل المحدود $\int_0^1 x^7 dx$

ويلحظ هنا أن المدخل الثاني والثالث لدالة التكامل (**int**) هما الحدان الأدنى والأعلى للتكامل المحدود، على التوالي.

```
syms x
int(x^7,0,1)
ans =
1/8
```

```
int(1/x,1,2)
ans =
log(2)
```

جبر المصفوفات

تعريفات

المصفوفة عبارة عن مجموعة من العناصر المصفوفة بين قوسين][في شكل مربع أو مستطيل مثل:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

وقد رأينا بالمحاضرة الأولى كيفية كتابة المصفوفة بالماتلاب وكيفية الفهرسة

ويحدد أبعاد كل مصفوفة عدد الصفوف (m) وعدد الأعمدة (n)، ويكتب عادة في أسفل يمين المصفوفة بهذا الشكل: **m x n**

فأبعاد المصفوفة C مثلا هي 2x4 وتعد المصفوفة مربعة إذا تساوى عدد صفوفها مع عدد أعمدتها أي (m=n) مثل المصفوفة **A**.

وتعد المتجهات حالة خاصة من المصفوفات. فمتجه الصف يتكون من صف واحد فقط (مثل المتجه D)، ومتجه العمود يتكون من عمود واحد فقط كما يمكن النظر للعدد المفرد على أساس أنه مصفوفة تتكون من صف واحد وعمود واحد.

استخدم الأمر **size** للتعرف على أبعاد المصفوفة. أمثلة:

```
size(A)
ans =
    3     3
```

وإذا أردت أن تحتفظ بأبعاد المصفوفة في متغيرين، أكتب:

```
[m,n]=size(C)
m =
2
n =
4
```

بعض أنواع المصفوفات:

المصفوفة القطرية هي المصفوفة التي تكون كل عناصرها – ماعدا الموجودة في قطر المصفوفة – أصفارا . وقطر المصفوفة يتمثل في العناصر الموجودة في قطر المصفوفة أي العناصر التي يكون عدد صفها هو عدد عمودها مثلا **a11, a22, a33** وهكذا

ومثال المصفوفة القطرية المصفوفة التالية:

$$E = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الوحدة هي مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الواحد صحيح مثل:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لتوليد مصفوفة قطرية يمكن كتابة كامل المصفوفة أو استخدام الدالة **diag** اختصارا للوقت، خاصة إذا كانت المصفوفة القطرية كبيرة نسبيا فيكفي أن تعطي هذه الدالة عناصر قطر المصفوفة لتقوم بتوليد مصفوفة قطرية. مثال: لتوليد المصفوفة القطرية أعلاه ندخل أولا عناصر القطر في متجه:

```
d = [6 2]
d =
    6   2
```

ثم نستخدم الدالة **diag** بهذه الصيغة:

```
E = diag(d)
E =

6   0

0   2
```

بعض أنواع المصفوفات:

المصفوفة المثلثة هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها فوق أو تحت قطر المصفوفة أصفارا ، مثل.

$$T = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

و**المصفوفة الصفرية** هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها أصفارا .

منقول المصفوفة:

يمكن إيجاد **منقول** المصفوفة **A** ، ويرمز له بـ **`A** أو **A^t** ، بقلب الصفوف أعمدة والأعمدة صفوفاً. فنجعل الصف الأول هو العمود الأول، والصف الثاني هو العمود الثاني، وهكذا. **فمنقول** المصفوفة **C** مثلا يساوي:

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن قلب متجه الصف يجعله متجه عمود، والعكس صحيح.

منقول المصفوفة C

```
C'

ans =
        1         1
        3         2
        2         5
        4         0
```

والمصفوفة المتماثلة هي المصفوفة التي لا تختلف عن منقولها أي **`A=A** ، كالمصفوفة القطرية ومصفوفة الوحدة.

انتهت المحاضرة

مكتبة A to Z للخدمات الجامعية

مكتبة A to Z