كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تبولوجيا ٢

المحاضرة : الثامنة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

نظرية التقارب

تعريف:

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة كيفية من العناصر و لتكن $\mathcal{M} \subseteq P(X)$ أسرة جزئية تحقق:

1. $\mathcal{M} \neq \{\}$ و $\emptyset \notin \mathcal{M}$
2. $\forall M, N \in \mathcal{M}: M \cap N \in \mathcal{M}$
3. إذا كان $A \in P(X)$ عنصراً كيفياً بحيث أنه يوجد $M_0 \in \mathcal{M}$ يحقق $M_0 \subseteq A$ فإن $A \in \mathcal{M}$، بكلام آخر: $M_0 \in \mathcal{M} \;\&\; M_0 \subseteq A \subseteq X \Longrightarrow A \in \mathcal{M}$

عندئذٍ يقال عن الأسرة $\mathcal{M}$ إنها تشكل مرشحة على X.

ملاحظات و أمثلة:

1. من تعريف المرشحة و من تعريف التبولوجيا نجد أن: $\emptyset \in \tau, \forall \tau$: τ تبولوجيا معرفة على X لذلك فإن أي تبولوجيا على X لا يمكن أن تشكل مرشحة عليها و بالعكس بما أن $\emptyset \notin \mathcal{M}$ أياً كانت المرشحة $\mathcal{M}$ معرفة على X فإنها لا تعرف تبولوجيا عليها.
2. كما في حالة التبولوجيا يمكن تعميم الشرط الثاني في تعريف المرشحة بحيث يصبح أي تقاطع منته لعناصر من المرشحة هو عنصر منها.
3. بما أن $\emptyset \notin \mathcal{M}$ أياً كانت المرشحة $\mathcal{M}$ معرفة على X، و أن أي تقاطع منته لعناصر من المرشحة هو عنصر منها فإن أي تقاطع منته لعناصر أي مرشحة هو تقاطع غير خالٍ و هذا يعني أن أي مرشحة معرفة على X تحقق خاصة التقاطع المنتهي أي أن $\emptyset \notin \varphi(\mathcal{M})$.
4. أياً كانت المرشحة $\mathcal{M}$ معرفة على X إن $\mathrm{X} \in \mathcal{M}$ و ذلك لأن: $\mathcal{M} \neq \{\}$ بالتالي: $\exists \mathrm{M} \in \mathcal{M} \;\&\; \mathrm{M} \subseteq \mathrm{X} \Longrightarrow \mathrm{X} \in \mathcal{M}$.
5. على أي مجموعة X يمكن تعريف أكثر من مرشحة في الحالة العامة و عندما تكون X مجموعة وحيدة العنصر يمكن تعريف مرشحة واحدة فقط هي $\mathcal{M} = \{X\}$.
6. لتكن $X = \{1,2,3\}$ الأسر:

$\mathcal{M}_1 = \big\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, X\big\}$ ، $\mathcal{M}_2 = \big\{\{1,2\}, X\big\}$ ، $\mathcal{M}_3 = \big\{\{1,3\}, X\big\}$

$\mathcal{M}_4 = \{X\}$ ، $\mathcal{M}_5 = \big\{\{1,2\}, \{1,3\}, X\big\}$ ، $\mathcal{M}_6 = \big\{\{2\}, \{1,2\}, X\big\}$ ،

$\mathcal{M}_7 = \big\{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\big\}$

نلاحظ بالنسبة للأسرة $\mathcal{M}_1$:

1. $\{1\} \in \mathcal{M}_1$ لذلك $\mathcal{M}_1 \neq \{\quad\}$ ، ثم إن $\emptyset \notin \mathcal{M}_1$ ،
2. و لدينا:

$$\{1\} \cap \{1\} = \{1\} \cap \{1,2\} = \{1\} \cap \{1,3\} = \{1\} \cap X = \{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\} \in \mathcal{M}_1$$

$\{1,2\} \cap \{1,2\} = \{1,2\} \cap X = \{1,2\} \in \mathcal{M}_1$
$\{1,3\} \cap \{1,3\} = \{1,3\} \cap X = \{1,3\} \in \mathcal{M}_1$
$X \cap X = X \in \mathcal{M}_1$

أي أن تقاطع أي عنصرين من $\mathcal{M}_1$ هو عنصر منها .

3. لدينا $P(X) = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ نلاحظ أن أي عنصر من $P(X)$ إذا كان يحوي عنصراً M_0 من $\mathcal{M}_1$ فإن $M_0 \in \mathcal{M}_1$ لذلك فإن $\mathcal{M}_1$ تشكل مرشحة على X.

و بمناقشة مماثلة نجد أن كلاً من $\mathcal{M}_2$ و $\mathcal{M}_3$ و $\mathcal{M}_4$ تشكل مرشحة على X.

بينما $\mathcal{M}_5$ لا تشكل مرشحة على X لأن:

$\{1,2\} \in \mathcal{M}_5$ و $\{1,3\} \in \mathcal{M}_5$ و $\{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\} \notin \mathcal{M}_5$

و الأسرة $\mathcal{M}_6$ لا تشكل مرشحة على X لأن:

$\{2\} \in \mathcal{M}_6$ و $\{2\} \subseteq \{2,3\}$ و $\{2,3\} \in P(X)$ و $\{2,3\} \notin \mathcal{M}_6$

و الأسرة $\mathcal{M}_7$ لا تشكل مرشحة على X لأن $X \notin \mathcal{M}_7$ و المجموعة X يجب أن تنتمي إلى أي مرشحة معرفة عليها كونها تحوي أي مجموعة جزئية منها.

تعريف:

إذا كانت $\mathcal{M}_2$ و $\mathcal{M}_1$ مرشحتين معرفتين على مجموعة ما $X \neq \emptyset$، فإننا نقول إن المرشحة $\mathcal{M}_1$ أقوى من المرشحة $\mathcal{M}_2$ أو $\mathcal{M}_2$ أضعف من $\mathcal{M}_1$ إذا و فقط إذا كان $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_1$.

من المثال 6 نجد $\mathcal{M}_1$ أقوى من المرشحة $\mathcal{M}_2$ و $\mathcal{M}_1$ أقوى من $\mathcal{M}_3$ و $\mathcal{M}_1$ أقوى من $\mathcal{M}_4$ ثم إن $\mathcal{M}_2$ أقوى من $\mathcal{M}_4$ و $\mathcal{M}_3$ أقوى من $\mathcal{M}_4$ ، لكن $\mathcal{M}_2$ و $\mathcal{M}_3$ غير متقارنتين .

تعريف:

إذا كانت $\mathcal{M}$ مرشحة معرفة على مجموعة ما $X \neq \emptyset$ و غير محتواة في أي مرشحة أخرى معرفة على X فإننا نسمي $\mathcal{M}$ فوق مرشحة على X أو مرشحة أعظمية على X و نرمز لها $\mathcal{U}$.

في المثال 6 نجد أن $\mathcal{M}_1$ تشكل مرشحة أعظمية على X.

و كذلك $\mathcal{M}_8 = \{\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, X\}$

مرشحة فريشت:

لتكن X مجموعة غير منتهية كيفية و لنعرف عليها الأسرة $\mathcal{M}$ بالشكل الآتي :

$\mathcal{M} = \{M \in P(X);\ X\backslash M \text{ مجموعة منتهية}\}$ ، لنبين أن الأسرة $\mathcal{M}$ تشكل مرشحة على X

1. نلاحظ أن: $X^c = X\backslash X = \emptyset$ و الخالية مجموعة منتهية و بالتالي $X \in \mathcal{M}$ و هذا يعني

أن:$\{\ \ \} \neq \mathcal{M}$ ثم إن X = $X\backslash\emptyset = \emptyset^c$ و X مجموعة غير منتهية بالتالي $\emptyset \notin \mathcal{M}$.

2. ليكن M, N عنصرين كيفيين من الأسرة $\mathcal{M}$ ، بالتالي إن كل من المجموعتين $X\backslash M, X\backslash N$ هي مجموعة منتهية بحسب تعريف الأسرة $\mathcal{M}$، و منه تكون المجموعة: $(X\backslash M) \cup (X\backslash N)$ مجموعة منتهية لكن:$(X\backslash M) \cup (X\backslash N) = X\backslash(M \cap N)$ و هذا يعني أن $M \cap N \in \mathcal{M}$.

3. ليكن $A \in P(X)$ عنصراً كيفياً بحيث يوجد لأجله $M_0 \in \mathcal{M}$ يحقق $M_0 \subseteq A$.

بما أن $M_0 \subseteq A$ فإن $X\backslash A \subseteq X\backslash M_0$ و بما أن $M_0 \in \mathcal{M}$ بالتالي $X\backslash M_0$ مجموعة منتهية و هذا يقتضي أن تكون $X\backslash A$ مجموعة منتهية أيضاً أي أن A يحقق تعريف الأسرة $\mathcal{M}$ و منه $A \in \mathcal{M}$.

من تحقق الشروط الثلاثة السابقة نستنتج أن $\mathcal{M}$ تشكل مرشحة على X ندعوها مرشحة فريشت.

تعريف:

إذا كانت $\mathcal{M}$ تشكل مرشحة على X و كانت $\beta \subseteq P(X)$ أسرة ما، يقال إن الأسرة β تشكل قاعدة للمرشحة $\mathcal{M}$ إذا و فقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

1. $\beta \subseteq \mathcal{M}$.
2. من أجل كل عنصر $M \in \mathcal{M}$ يوجد عنصر $B \in \beta$ بحيث $B \subseteq M$.

ملاحظات و أمثلة:

1. كل مرشحة قاعدة لنفسها لأن:

$\beta = \mathcal{M}$ و لكل عنصر $M \in \mathcal{M}$ يوجد عنصر $B = M \in \beta$ بحيث $B \subseteq M$.

2. إن عكس (1) ليس صحيحاً بصورة عامة كما يبين المثال الآتي:

لتكن $X = \{a, b, c\}$ و $\mathcal{M} = \{X, \{a, b\}\}$ مرشحة معرفة على X و $\beta = \{\{a, b\}\}$

نلاحظ أن: $\beta \subseteq \mathcal{M}$ و من أجل $M = \{a, b\} \in \mathcal{M}$ يوجد $B = \{a, b\} \in \beta$ بحيث $B \subseteq M$ و كذلك من أجل $X \in \mathcal{M}$ يوجد $B = \{a, b\} \in \beta$ بحيث $B \subseteq X = M$ و منه إن الأسرة β تشكل قاعدة للمرشحة $\mathcal{M}$، لكن β لا تشكل مرشحة على X لأن $X \notin \beta$.

مبرهنة:

إذا كانت $X \neq \emptyset$ مجموعة ما و كانت $\beta \subseteq P(X)$ أسرة ما، عندئذٍ يقال إن الأسرة β تشكل قاعدة لمرشحة ما على X إذا و فقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

1. $\beta \neq \{\ \ \}$ ، ثم إن $\emptyset \notin \beta$.
2. من أجل كل B, C من عناصر β يوجد عنصر D من β بحيث يكون $D \subseteq B \cap C$.

تمرين:

لنعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة:

$\mathcal{M} = \{M_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\ldots\}, n = 1,2,3, \ldots : n < \infty\}$ إن الأسرة $\mathcal{M}$

تشكل مرشحة على $\mathbb{N}$ ، قاعدة لمرشحة أم لا.

الحل:

$\mathcal{M}$ لا تعرف مرشحة $\mathbb{N}$ لأن:

$\{4,5,6, \ldots \ldots\} \in \mathcal{M}$ و $\{4,5,6, ..\} \subseteq \{1,4,5,6, ..\} \in P(\mathbb{N})$ و لكن

$\{1,4,5,6, ..\} \notin \mathcal{M}$ لأنه لا يكتب على شكل عناصرها.

$\mathcal{M}$ تشكل قاعدة لمرشحة ما معرفة على $\mathbb{N}$ لأن:

من أجل $n = 1$ نجد أن $M_1 = \{1,2,3, \ldots.\} = \mathbb{N}$ و بالتالي $\mathcal{M} \neq \{\ \ \}$

كما أن $n < \infty$ و $M_\infty = \emptyset$ إذن $\emptyset \notin \mathcal{M}$

من جهة ثانية ليكن $M_n, M_m \in \mathcal{M}$ لنضع $r = max\{n, m\}$ عندئذٍ يكون:

$$M_n \cap M_m = M_r = \{r, r+1, r+2, \ldots\} \in \mathcal{M}$$

بوضع $D = M_r$ نجد أن $D \subseteq M_n \cap M_m$ و هذا يعني أن $\mathcal{M}$ تشكل قاعدة لمرشحة ما معرفة على $\mathbb{N}$

مبرهنة:

إذا كانت $X \neq \emptyset$ مجموعة ما و كانت $S \subseteq P(X)$ أسرة كيفية غير خالية، عندئذٍ فإن الأسرة S تحقق خاصة التقاطع المنتهي إذا و فقط إذا وجدت مرشحة $\mathcal{M}$ معرفة على X بحيث $S \subseteq \mathcal{M}$.

تعريف:

إذا كانت $\mathcal{M}$ مرشحة معرفة على X و τ تبولوجيا معرفة على X و كانت $x \in X$، عندئذٍ:

1. يقال عن النقطة x إنها نقطة تقارب (نقطة تراكم) للمرشحة $\mathcal{M}$ في الفضاء التبولوجي (X, τ) إذا و فقط إذا كان $V(x) \subseteq \mathcal{M}$، أي إذا كانت كل مجاورة للنقطة x هي عنصر من المرشحة $\mathcal{M}$.
2. يقال عن النقطة x إنها نقطة لاصقة بالمرشحة $\mathcal{M}$ في الفضاء التبولوجي (X, τ) إذا و فقط إذا كانت x نقطة لاصقة بكل $M \in \mathcal{M}$.

ملاحظات و نتائج:

1. النقطة x ليست نقطة تراكم للمرشحة $\mathcal{M}$ في (X, τ) إذا وفقط إذا كان:
$$V(x) \nsubseteq \mathcal{M} \Leftrightarrow \exists V_0 \in V(x): V_0 \notin \mathcal{M}$$
2. النقطة x نقطة لاصقة بالمرشحة $\mathcal{M}$ ($x \in \overline{\mathcal{M}}$) إذا و فقط إذا كانت

$x \in \bar{M}, \forall M \in \mathcal{M}$ أي $V \cap M \neq \emptyset, \forall V \in V(x), \forall M \in \mathcal{M}$ و تكون $\bar{\mathcal{M}} = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \bar{M}$.

3. إن أي نقطة تراكم لمرشحة هي نقطة لاصقة بها .

تمرين:

ادرس تقارب مرشحة فريشت في فضاء المتممات المنتهية على X.

$\mathcal{M} = \left\{M \in P(X);\ \text{مجموعة منتهية}\ X \backslash M\right\}$ مرشحة فريشت

لتكن $x \in X$ نقطة كيفية و $V \in V(x)$ مجاورة كيفية لها في الفضاء $\left(X, \tau_{cof}\right)$ خسب تعريف المجاورة توجد مجموعة مفتوحة G_x تحقق $x \in G_x \subseteq V$ و منه $X \backslash V \subseteq X \backslash G_x$ و بما أن $X \backslash G_x$ مجموعة منتهية لأن G_x مجموعة مفتوحة في $\left(X, \tau_{cof}\right)$ فإن $X \backslash V$ مجموعة منتهية في $\left(X, \tau_{cof}\right)$ و $V \in P(X)$ بالتالي $V \in \mathcal{M}$ و حيث إن V مجاورة كيفية للنقطة x فإن $V(x) \subseteq \mathcal{M}$ و هذا يعني أن النقطة x نقطة تقارب لمرشحة فريشت في $\left(X, \tau_{cof}\right)$ ، و بمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة x نجد أن مرشحة فريشت متقاربة إلى كل نقطة من نقاط الفضاء $\left(X, \tau_{cof}\right)$.

انتهت المحاضرة 8