كلية **العلوم**

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

اسئلة دورات محلولة

ميكانيك تحليلي

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Zمكتبة

جامعة طرطوس		الاسم:
كلية العلوم- قسم الفيزياء		امتحان مقرر ميكانيك تحليلي - الدرجة:90 – مدة الامتحان: ساعتان
السنة الثانية		الدورة الفصلية الأولى للعام الدراسي 2025 –2024م

أجب عن الأسئلة التالية

السؤال الأول (25 درجة)

1- أكمل العبارات الآتية:

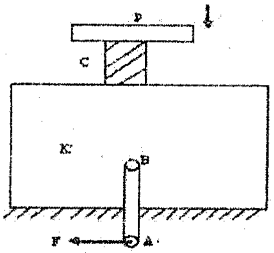
أ- عدد درجات حرية جملة مادية مؤلفة من N جسيم طليق ولا تخضع لأي ارتباط هو........ ، أما إذا خضعت الجملة لـ k ارتباط فيصبح عدد درجات حرية الجملة هو ....

ب- يُعرف العمل الافتراضي δA للقوة $\vec{F}$ في الإحداثيات الديكارتية بالصيغة.......

ت- يساوي العمل الافتراضي δA لرد الفعل $\vec{R}$ في الارتباط المثالي إلى.........

ث- الانتقال الافتراضي هو...............

ج- الإحداثيات المعممة هي..............



2- يتم رفع ثقل $\vec{P}$ عن طريق التأثير بقوة $\vec{F}$ على ذراع طوله $AB = \ell$ كما في الشكل المرسوم جانباً.
يدير الذراع صامولة C خطوتها b (يرتفع الثقل P مسافة قدرها b عند دوران الذراع AB دورة كاملة)، ترفع بدورها الثقل $\vec{P}$ إلى أعلى (رافعة السيارة). احسب العلاقة بين القوتين $\vec{P}$ و $\vec{F}$ في حالة التوازن.

السؤال الثاني (30 درجة)

1. تُعطى معادلات لاغرانج من النوع الثاني لنقطة مادية بدلالة الطاقة الحركية T بالصيغة التالية: $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ ، استنتج من هذه الصيغة معادلات الحركة بدلالة تابع لاغرانج.

2. تتحرك نقطة مادية كتلتها m على كرة ملساء نصف قطرها a. بفرض أن النقطة المادية لا تغادر الكرة. المطلوب:

أ- هل تحقق حركة النقطة المادية معادلة الكرة؟ اكتب معادلة الكرة $f(x,y,z) = ...$ ، ما هو عدد الإحداثيات المستقلة؟ ما هي القوى المؤثرة في النقطة المادية؟ اكتب مساقط هذه القوى $F_x = ..., F_y = ..., F_z = ...$

ب- تُعطى معادلة توازن النقطة على سطح الكرة حسب طريقة مضاريب لاغرانج بالعلاقة التالية:

$$\left(F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y + \left(F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z = 0$$

اوجد بالاستفادة من طريقة اختيار مضروب لاغرانج λ مواضع توازن النقطة على الكرة. واحسب قيمة λ.

السؤال الثالث (35 درجة)

1. تتحرك نقطة مادية كتلتها m في مستوي تحت تأثير قوة جاذبة مركزية، إذا علمت أن: $V(r) = -\frac{\propto m}{r}$ ، $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$ والمطلوب:

أ- اكتب تابع لاغرانج لهذه النقطة، ما هو عدد درجات الحرية لهذه النقطة (الإحداثيات المعممة)؟ وما هي؟

ب-اوجد معادلات حركة النقطة باستخدام تابع لاغرانج.

ت-استنتج تابع هاملتون لهذه النقطة، وأوجد معادلات هاملتون لهذه النقطة.

2. يخضع جسيم لتأثير كمون $V(x,y,z)$.

أ- اكتب صيغة تابع لاغرانج وتابع هاملتون لهذا الجسيم. ب-إذا علمت أن أقواس بواصون لتابع ما f تُعطى بالصيغة الآتية: $[H,f] = \left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p_x}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p_y}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_z}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p_z}\right)$ وأن $L_x = yp_z - zp_y$ احسب $[H, L_x]$ (أقواس بواسون)، ثم استنتج $[H, \vec{L}]$. متى يكون $\vec{L}$ تكاملاً للحركة؟

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2 / 2025/3م

أ. د. محمد حسن فاهود

جامعة طرطوس

كلية العلوم-قسم الفيزياء

سلم تصحيح أسئلة امتحان مقرر الميكانيك التحليلي لطلاب السنة الثانية فيزياء الفصل الأول للعام الدراسي 2024-2025

جواب السؤال الأول(25 درجة)

.1

أ- $3N-k \quad , \quad 3N$ 2

ب- $\delta A = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z$ 2

ت- $\delta A = \vec{R}.\delta\vec{r} = 0$ 2

ث- انتقال افتراضي: يُمر له بالرمز $\delta\vec{r}$ ويحدث بثبات الزمن. 2

ج- الإحداثيات المعممة: هي إحداثيات مستقلة كافية لتعيين الجملة المدروسة، يرمز لها بالرمز $q_1, q_2, ..., q_n$ 2

2. ترسم النقطة A قوساً من دائرة عند إعطائها انتقالاً افتراضياً قدره δr_A، أي أن $\delta r_A = \ell\delta\varphi$ حيث $\delta\varphi$ انتقال افتراضي للزاوية φ، ويرتفع عندئذٍ الثقل p مسافة قدرها δs للأعلى، ويكون حسب مبدأ العمل الافتراضي.

$$\sum_i \delta A_i = \vec{F}.\delta\vec{r}_A + \vec{P}.\delta\vec{s} = 0$$ 5

بما أن جهة القوة $\vec{p}$ و $\delta\vec{s}$ على استقامة واحدة وباتجاهين متعاكسين، فان: $F.\delta r_A - P.\delta s = 0$

$$\Rightarrow F\ell.\delta\varphi - p.\delta s \Rightarrow F\ell.\delta\varphi = P.\delta s$$ 3

نوجد العلاقة بين δs و $\delta\varphi$ كما يلي:

عندما يدور الذراع AB زاوية $\delta\varphi$، فان القوة $\vec{F}$ ترتفع بمقدار δs 2

عندما يدور الذراع AB دورة كاملة 2π ترتفع القوة $\vec{F}$ مقدار δh

$$\Rightarrow \frac{\delta\varphi}{2\pi} = \frac{\delta s}{h} \Rightarrow \delta\varphi = 2\pi\frac{\delta s}{h} \Rightarrow F\ell 2\pi\frac{\delta s}{h} = P\delta s \Rightarrow P = 2\pi\frac{\ell}{h}F$$ 2 3

نستنتج أنه عند ثبات p يمكن رفع يمكن رفع ثقل أكبر وذلك بزيادة ذراع الرافعة ℓ ونقصان خطوة اللولب، كما أنه لا يمكن على الإطلاق حل هذه المسألة بوساطة طرق الاستاتيكا البيانية نظراً لأن أجزاء الآلة غير معلومة.

جواب السؤال الثاني(30 درجة)

1. القوى الكمونية هي القوى التي تشتق من كمون $\vec{F} = -gradV$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial v}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial v}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - v) = 0$$ 5

بملاحظة أن تابع الكمون V لا يعتمد على السرعة المعممة بينما يعتمد فقط على الإحداثيات المعممة، وبالتالي فان $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0$ لذلك فان طرح هذا المقدار من الحد الأول في المعادلة السابقة لا يغير من الأمر شيئاً. أي أن: 2

لنرمز لـ $T-V$ بـ L أي أن $L=T-V$ ويسمى تابع لاغرانج، يمكن عندئذٍ كتابة $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q^{\cdot}}(T-v)-\frac{\partial}{\partial q_j}(T-v)=0$ 4

المعادلة السابقة بالصيغة: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q^{\cdot}}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$ 3

2. نعم تحقق معادلة الكرة $x^2+y^2+z^2-a^2=0$ 2، عدد الإحداثيات المستقلة اثنتان، لأنه توجد للنقطة المادية الطليقة ثلاث درجات حرية، وبما النقطة تتحرك على سطح الكرة فيصبح عدد درجات الحرية مساوياً إلى:
$3\times 1-1=2$ 1

4 تؤثر على النقطة المادية قوة ثقلها $m\vec{g}$ فقط، تكون مساقطها على المحاور الإحداثية هي: $F_x=F_y=0$,
هنا المعادلة اكتب $F_z=-mg$ حيث اعتبرنا المحور oz شاقولي صاعد.

نختار مضروب لاغرانج λ بحيث يجعل أحد الأقواس معدوماً وليكن القوس الثالث مثلاً. وبما أنه توجد للنقطة درجتي حرية أي إحداثيتين مستقلتين نعتبرهما x و y فيصبح كلٍ من القوس الأول والثاني معدوماً، أي أن:

$$0+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0\ ,0+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0\ ,-mg+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0$$ 3

نحسب $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ المشتقات الجزئية من معادلة الكرة ونعوض في المعادلات أعلاه فنجد:

$$2\lambda x=0\ ,\quad 2\lambda y=0\ ,-mg+2\lambda z=0\Rightarrow x=0\ ,y=0$$ 2

بالتعويض عن $x=0\ ,\ y=0$ في معادلة الكرة نحصل على قيمة $z=\pm a$ وبالتالي تتزن النقطة المادية في موضعين هما $(0,0,a)\,,(0,0,-a)$، ولإيجاد قيمة λ نعوض عن قيمة $z=\pm a$ في المعادلة $-mg+2\lambda z=0$ فنحصل على: $\lambda=\pm\frac{mg}{2a}$. 4

<u>جواب السؤال الثالث(35 درجة)</u>

.1

أ- $L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{\alpha m}{r}$ 3 توجد درجتي حرية هما r و θ. 2

ب- تُعطى معادلة حركة النقطة المادية من أجل الإحداثية الأولى $q=r$. بالصيغة:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0\Longrightarrow\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=0\Longrightarrow m\ddot{r}-\left(mr\dot{\theta}^2-\frac{\alpha m}{r^2}\right)=0\Longrightarrow\ddot{r}-r\dot{\theta}^2+\frac{\alpha}{r^2}=0$$ 2

وتُعطى معادلة لاغرانج الثانية من أجل $q=\theta$ بالصيغة: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0\Rightarrow\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})-0=0\Longrightarrow$ 2
$mr^2\dot{\theta}=c$

ت- ولإيجاد تابع هاملتون لدينا: $H=T+V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{\alpha m}{r}$ 3

لكن من المعلوم أن تابع هاملتون يجب التعبير عنه بدلالة الإحداثيات والدفوع المعممة.

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}\Longrightarrow\dot{r}=\frac{p_r}{m}$$ 2

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta \Rightarrow \dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2}$$ 2

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{\alpha m}{r}$$ 3

تكون معادلات هاملتون مساوية إلى: $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad , -\dot{p}_j = \frac{\partial H}{\partial q_j}$

$$\dot r = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad , \quad \dot\theta = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2}$$ 2

$$-\dot p_r = \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{2m}\left(-\frac{2p_\theta}{r^3}\right) + \frac{\alpha m}{r^2} \quad , -\dot p_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$ 2

.2

أ. يُعطى تابع لاغرانج وتابع هاملتون لهذه النقطة على الترتيب بالصيغتين التاليتين:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - V(x,y,z)$$ 2

$$H = T + V = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) + V(x,y,z) = \frac{1}{2}m(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + V(x,y,z)$$ 3

ب. نحسب أقواس بواصون المقابلة لـ$[H, L_x]$فنجد:

$$[H,L_x] = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial P_j}\frac{\partial L_x}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial L_x}{\partial P_j}\right) = \left(\frac{\partial H}{\partial P_x}\frac{\partial L_x}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial L_x}{\partial P_x}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial P_y}\frac{\partial L_x}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial L_x}{\partial P_y}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial P_z}\frac{\partial L_x}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial L_x}{\partial P_z}\right)$$ 5

$$= \frac{1}{2m}\left(p_x 0 - \frac{\partial V}{\partial x}0\right) + \frac{1}{2m}\left(p_y p_z + \frac{\partial V}{\partial y}z\right) + \frac{1}{2m}\left(-p_z p_y - \frac{\partial V}{\partial z}y\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial y}z - \frac{\partial V}{\partial z}y\right)$$

$$= (F_z y - F_y z) = M_x$$

ينتج أن: $[H,\vec L] = M_x\vec i + M_y\vec j + M_z\vec k = \vec M = \vec r \times \vec F$ ، يكون $\vec L$ تكاملاً للحركة اذا تحرك الجسيم في كمون مركزي حيث تكون r و F على حامل واحد وباتجاهين متعاكسين، فيكون $\vec r \times \vec F = 0 \Rightarrow [H,\vec L] = 0$ 2

طرطوس في 2023/3/2 | أ. د. محمد حسن فاهود

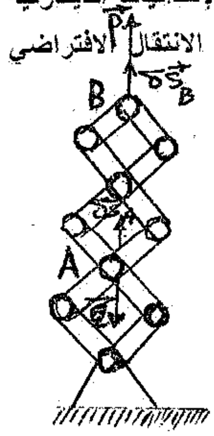
الاسم :		جامعة طرطوس
امتحان مقرر ميكانيك تحليلي - الدرجة:90 – مدة الامتحان: ساعتان		كلية العلوم
الدورة الفصلية الثانية للعام الدراسي 2024 –2023م		قسم الفيزياء– السنة الثانية

أجب عن الأسئلة التالية

السؤال الأول(30 درجة)

-1 أكمل العبارات التالية:

عدد درجات حرية جملة مادية مؤلفة من N جسيم طليق ولا تخضع لأي ارتباط هو........ ، أما إذا خضعت الجملة لـ k ارتباط فيصبح عدد درجات حرية الجملة هو ......، يُعرف العمل الافتراضي δA للقوة $\vec{F}$ في الإحداثيات الديكارتية بالصيغة........، يساوي العمل الافتراضي δA لرد الفعل $\vec{R}$ في الارتباط المثالي إلى.........، الانتقال الافتراضي هو.........، الإحداثيات المعممة هي..............



-2 تُطبق قوتان $\vec{p}$ و $\vec{Q}$ في الآلة الرافعة المرسومة جانباً. بإعطاء المجموعة انتقالاً افتراضياً واحداً قدره $\delta \vec{s}$. يكون عندئذٍ $\delta \vec{S}_B = ...$, $\delta \vec{S}_A = ...$ ، ويُعطى العمل الافتراضي للقوتين السابقتين بـ $\sum_i \delta A_i = ...$ ، وينتج أن العلاقة بين $\vec{p}$ و $\vec{Q}$ تساوي إلى $Q = ...$

السؤال الثاني(30 درجة)

1. تُعطى معادلات لاغرانج من النوع الثاني لنقطة مادية بدلالة الطاقة الحركية T بالصيغة التالية: $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial V}{\partial q_j}$ ،

وبفرض أن القوى المؤثرة في مجموعة مادية هي قوى كمونية. المطلوب: ما هو تعريف القوى الكمونية؟ استنتج بالاستفادة من هذه الصيغة معادلات الحركة بدلالة تابع لاغرانج.

2. يتحرك جسيم كتلته m في مستوي تحت تأثير قوة جاذبة مركزية قيمتها $\frac{\mu m}{r^2}$. المطلوب أكمل ما يلي:

يمكن تعيين حركة الجسيم في هذه الحالة بدلالة الإحداثيتين........، ويكون عدد درجات حرية الجسيم مساويا إلى...... ، تُعطى العلاقة بين الإحداثيات الكارتيزية والقطبية بـ $x = ...,\ y = ... \Rightarrow \dot{x} = ...,\ \dot{y} = ...$ و $v^2 = ... \Rightarrow T = ...,\ V = ... \Rightarrow L = ...$ ، وتكون معادلة الحركة لهذا الجسيم بالنسبة لـ r هي........ومعادلة الحركة بالنسبة لـ θ هي.......

السؤال الثالث(30 درجة)

1. يتحرك جسيم طليق في كمون $V(x,y,z)$. المطلوب:

يُعطى تابع لاغرانج وتابع هاملتون لهذا الجسيم بالعلاقتين: $L = ...,\ H = ...$

2. تُعرف أقواس بواصون لتابع ما f بالصيغة:

$$\frac{df}{dt} = [H, f] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial P_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial P_i}\right)$$

متى يكون f تكاملاً للحركة؟ إذا تحرك الجسيم في كمون مركزي متناظر $V(x,y,z)$. فإن: $H = ...$ ، $L = ...$ ،

إذا علمت أن $L_x = yp_z - zp_y$. احسب أقواس بواصون $[H, L_x]$ ، واستنتج قيمة $[H, \vec{L}]$ ، هل $\vec{L}$ تكاملاً للحركة؟ علل إجابتك.

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 3/ 6/ 2024م

أ. د. محمد حسن فاهود

جامعة طرطوس

كلية العلوم-قسم الفيزياء

سلم تصحيح أسئلة امتحان مقرر الميكانيك التحليلي لطلاب السنة الثانية فيزياء الدورة الفصلية الثانية للعام الدراسي 2023-2024

جواب السؤال الأول(30 درجة)

1. 3N ، 3N-K. 2 2 $\delta A(\vec{F})=\sum_i \vec{F}_i.\delta\vec{r}_i = F_x\delta X + F_y\delta Y + F_z\delta Z$ 3 ، $\delta A(\vec{R})=\sum_i \vec{R}.\delta\vec{r}=0$ 2

الانتقال الافتراضي: هو انتقال تصوري يحدث بثبات الزمن. 3

الإحداثيات المعممة: هي إحداثيات مستقلة كافية لتعيين الجملة المدروسة، يرمز لها بالرمز $q_1, q_2, \dots, q_n$. 3

2. $\delta\dot{S}_B = 3\delta\dot{S}$ 2 ، $\delta\dot{S}_A = \delta\dot{S}$ 2 ، $\sum\delta A = \dot{Q}.\delta\dot{S}_A + \dot{P}.\delta\dot{S}_B = 0 \Rightarrow Q\delta\dot{S}_A - P\delta\dot{S}_B = 0$ 5

$$Q\delta S_A - P\delta S_B = 0 \Rightarrow Q\delta S - 3P\delta S \Rightarrow Q=3P$$ 6

جواب السؤال الثاني(30 درجة)

1. القوى الكمونية هي القوى التي تشتق من كمون 2 $\vec{F} = -gradV$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial v}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial v}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - v) = 0$$ 2

بملاحظة أن تابع الكمون V لا يعتمد على السرعة المعممة بينما يعتمد فقط على الإحداثيات المعممة، وبالتالي فان $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0$ لذلك فان طرح هذا المقدار من الحد الأول في المعادلة السابقة لا يغير من الأمر شيئاً. اي أن: 2

$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}(T - v) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - v) = 0$ 2 لنرمز لـ $T - V$ بـ L أي أن $L = T - V$ 2 ويسمى تابع لاغرانج. يمكن عندئذ كتابة المعادلة السابقة بالصيغة: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ 2

2. يتحرك جسيم كتلته m في مستوي تحت تأثير قوة جاذبة مركزية قيمتها $\frac{\mu m}{r^2}$. المطلوب أكمل ما يلي:

يمكن تعيين حركة الجسيم في هذه الحالة بدلالة الاحداثيتين r و θ 1 ، r ويكون عدد درجات حرية الجسيم مساويا إلى2 1 ، تعطى العلاقة بين الإحداثيات الكارتيزية والقطبية بـ $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ 1 1 $\Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$ 2 ، $\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$ 2 و $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ 1 $\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$ 1 ، $v = -\frac{\mu m}{r}$ 2 $\Rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\mu m}{r}$ 2 ، وتكون معادلة الحركة لهذا الجسيم بالنسبة لـ r هي $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \frac{\mu m}{r^2} = 0$ 2 ومعادلة الحركة بالنسبة لـ θ هي $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = c$ 2

جامعة – تشرين – كلية – العلوم – قسم الفيزياء - التاريخ-1/7/2024 - الاسم.........

امتحان كهرباء (1)- سنة أولى فيزياء- فصل ثاني - الدرجة العظمى (70)-

السؤال الأول(15درجة): عرّف بالعلاقات الرياضية والرموز المناسبة مع الرسم كلٍ مما يلي:

قانون التربيع العكسي للقوى الكهربائية والمغناطيسية مع رسم منحنياتها – تدفق الحقل الكهربائي من خلال سطح مغلق وضّح إجابتك بالرسم – ثنائي القطب الكهربائي - قوانين جمع المكثفات على التوازي وعلى التسلسل ومقارنتها مع جمع المقاومات أرسم الدارات المناسبة في كل حالة – تدرج حقل قوى مع الرسم .

السؤال الثاني(10درجات): ١- احسب سرعة الالكترون في ذرة الهيدروجين التي نصف قطرها حوالي

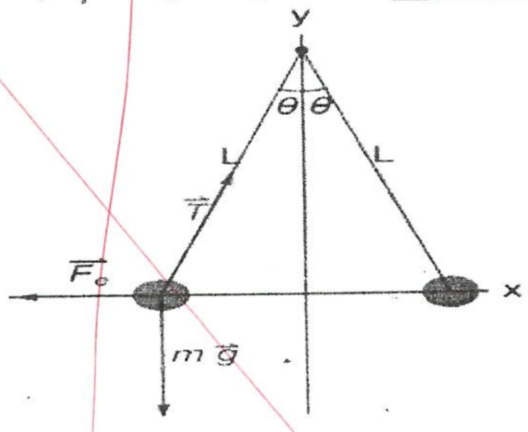
$0.53 \times 10^{-10}\, m$

2- يعطى الكمون الكهربائي في منطقة من الخلاء بالعلاقة

$V(x,y,z) = x^2 + xy$

أحسب الحقل الكهربائي الناتج عن هذا الكمون في النقطة التي إحداثياتها (2,1) مع تحديد الوحدات للمقادير الفيزيائية المستخدمة لكل مقدار.

السؤال الثالث (10درجات): لدينا شحنتان متمثلتان كتلة كلٍ منها $1gr$ كما يظهر في الشكل الآتي:



أحسب الشحنة الكهربائية عند $L = 10cm$, $\theta = 5^\circ$.

السؤال الرابع(20درجة): أستنتج العلاقة التي تربط شدة التيار الكهربائي بسرعة حاملات الشحنة الكهربائية ثم كثافة التيار الكهربائي بالكثافة الحجمية لحاملات الشحنة

تطبيق: ١- بفرض ان السرعة الجرية للإلكترونات الحرة في الألومينيوم تساوي $5.3 \times 10^{-4} \frac{m}{s}$ والناقلية النوعية للألومينيوم تساوي $3.82 \times 10^{7} (\Omega.m)^{-1}$ وحركية الشحنات الكهربائية للألومينيوم تساوي $0.0014 \frac{m^2}{V.S}$ والمطلوب اذا علمت ان $\sigma = \mu\rho$ وضّح مدلولات الرموز في هذه العلاقة.

٢- أحسب المقاومة النوعية للألمنيوم – كثافة التيار الكهربائي – الحقل الكهربائي

السؤال الخامس(15درجة):

a – أستنتج العلاقة التي تربط الحقلين الكهربائي والمغناطيسي لشحنة كهربائية تتحرك حركة منتظمة سرعتها ϑ .

b- أذكر نص قانون أمبير في المغناطيسية ثم أستنتج قيمة حقل التحريض المغناطيسي B الناتج عن ملف حلزوني لولبي عدد لفاته n ما هي شدة الحقل المغناطيسي H في هذه الحالة وما هي واحدة قياس H من العلاقة الناتجة.

مدرّسا المقرر: د. لؤي محمد أ.د. محمود أحمد

السؤال الثالث(30 درجة)

1. يتحرك جسيم طليق في كمون $V(x,y,z)$. المطلوب:

يُعطى تابع لاغرانج وتابع هاملتون لهذا الجسيم بالعلاقتين:

3 3

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-V(x,y,z),\ H=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+V(x,y,z)=\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)+V(x,y,z)$$

2. تعرف أقواس بواصون لتابع ما f بالصيغة:

$$\frac{df}{dt}=[H,f]=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial P_j}\frac{\partial f}{\partial q_j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial P_j}\right)$$

2

متى يكون f تكاملاً للحركة؟ يكون f تكاملاً للحركة إذا انعدمت اقواس بواسون المقابلة لـ f أي اذا كان: $[H,f]=0$ ،

. إذا تحرك الجسيم في كمون مركزي متناظر $V(x,y,z)$. فان:

3 3

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-V(x,y,z),\ H=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+V(x,y,z)=\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)+V(x,y,z)$$ ،

إذا علمت أن $L_x=yp_z-zp_y$. احسب أقواس بواصون $[H,L_x]$، واستنتج قيمة $[H,\vec{L}]$. هل $\vec{L}$ تكاملاً للحركة؟ علل إجابتك.

الجواب:

2 2 2

$$[H,L_x]=\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial P_j}\frac{\partial L_x}{\partial q_j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial L_x}{\partial P_j}\right)=\left(\frac{\partial H}{\partial P_x}\frac{\partial L_x}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial L_x}{\partial P_x}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial P_y}\frac{\partial L_x}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial L_x}{\partial P_y}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial P_z}\frac{\partial L_x}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial L_x}{\partial P_z}\right)$$

3

$$=\frac{1}{2m}\left(p_x 0-\frac{\partial V}{\partial x}0\right)+\frac{1}{2m}\left(p_y p_z+\frac{\partial V}{\partial y}z\right)+\frac{1}{2m}\left(-p_z p_y-\frac{\partial V}{\partial z}y\right)=\frac{1}{\cancel{2m}}\left(\frac{\partial V}{\partial y}z-\frac{\partial V}{\partial z}y\right)$$

$$=\frac{1}{2m}\left(F_z y-F_y z\right)=M_x$$ 2

2

ينتج أن: $[H,\vec{L}]=M_x\vec{i}+M_y\vec{j}+M_z\vec{k}=\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$، يكون $\vec{L}$ تكاملاً للحركة إذا تحرك الجسيم في كمون مركزي

3

حيث تكون r و F على حامل واحد وباتجاهين متعاكسين، فيكون $\vec{r}\times\vec{F}=0\Rightarrow[H,\vec{L}]=0$

طرطوس في 2024/7/30

أ. د. محمد حسن فاهود

جامعة طرطوس		الاسم :
كلية العلوم		امتحان مقرر ميكانيك تحليلي - الدرجة:90 – مدة الامتحان: ساعتان
قسم الفيزياء– السنة الثانية		الدورة الفصلية الأولى للعام الدراسي 2023 –2024م

أجب عن الأسئلة التالية

السؤال الأول(30 درجة)

1- أكمل العبارات التالية:

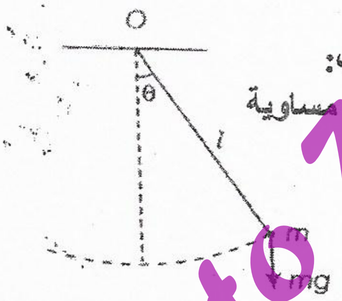
أ- عدد درجات حرية جملة مادية مؤلفة من N جسيم طليق ولا تخضع لأي ارتباط هو........ ، أما إذا خضعت الجملة لـ k ارتباط فيصبح عدد درجات حرية الجملة هو ....

ب- يُعرف العمل الافتراضي δA للقوة $\vec{F}$ في الإحداثيات الديكارتية بالصيغة........

ت- يساوي العمل الافتراضي δA لرد الفعل $\vec{R}$ في الارتباط المثالي إلى..........

ث- الانتقال الافتراضي هو...............

ج- الإحداثيات المعممة هي...............



2- يهتز نواس بسيط في مستوي عمودي كما هو مبين في الشكل المرسوم جانباً. المطلوب:

أ- يكون عدد درجات حرية الجملة مساوياً إلى......... وتكون الطاقة الكمونية للنواس مساوية إلى.........والطاقة الحركية ....، وبالتالي فان تابع لاغرانج............

ب- استنتج معادلة حركة كرة النواس من معادلة لاغرانج بدلالة تابع لاغرانج، واستنتج دور الاهتزازات الصغيرة السعة. هل لكتلة النواس تأثير على الدور؟

السؤال الثاني(30 درجة)

1. تُعطى معادلات لاغرانج من النوع الثاني لنقطة مادية بدلالة الطاقة الحركية T بالصيغة التالية: $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial V}{\partial q_j}$ ، اثبت بالاستفادة من هذه الصيغة أنه يمكن كتابة معادلات الحركة بدلالة تابع لاغرانج بالصيغة: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$

2. تتحرك نقطة مادية كتلتها m على كرة ملساء نصف قطرها r. بفرض أن النقطة المادية لا تغادر الكرة. المطلوب:

أ- هل تحقق حركة النقطة المادية معادلة الكرة؟ تُعطى معادلة الكرة بالصيغة $f(x,y,z)=.......$ ، يكون عدد الإحداثيات المستقلة مساوياً إلى ....، وأن القوى المؤثرة في النقطة المادية هي........، وتُعطى مساقط هذه القوى $F_x=......,\ F_y=.......,\ F_z=......$

ب- تُعطى معادلة توازن النقطة على سطح الكرة حسب طريقة مضاريب لاغرانج بالعلاقة التالية:

$$\left(F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x+\left(F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y+\left(F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z=0$$

اوجد بالاستفادة من طريقة اختيار مضروب لاغرانج λ مواضع توازن النقطة على الكرة. واحسب قيمة λ.

السؤال الثالث(30 درجة)

1. ليكن $f(p_j,q_j,t)$ تابعاً للمتحولات القانونية والزمن. احسب $\frac{df}{dt}$ المشتق الكلي، وبالاستفادة من معادلات هاملتون اكتب $[H,f]$ صيغة اقواس بواسون للتابع f، متى نقول عن f أنه تكاملاً للحركة؟.

2. يخضع جسيم لتأثير كمون $V(x,y,z)$. اكتب صيغة تابع لاغرانج وصيغة تابع هاملتون لهذا الجسيم، واثبت باستخدام أقواس بواسون $[H,\vec{p}]$. واستنتج أن كمية حركة نقطة مادية تكامل للحركة.

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

أ. د. محمد حسن فاهود

طرطوس في 19 / 2 /2024م

جامعة طرطوس

كلية العلوم - قسم الفيزياء

<u>سلم تصحيح أسئلة امتحان مقرر الميكانيك التحليلي لطلاب السنة الثانية فيزياء الفصل الأول للعام الدراسي 2023-2024</u>

<u>جواب السؤال الأول(30 درجة)</u>

.1

أ- $3N$ ، $3N-k$ 2

ب- $\delta A = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$ 2

ت- $\delta A = \vec{R}.\delta\vec{r} = 0$ 2

ث- انتقال افتراضي: يرمز له بالرمز $\delta\vec{r}$ ويحدث بثبات الزمن. 2

ج- الإحداثيات المعممة: هي إحداثيات مستقلة كافية لتعيين الجملة المدروسة، يرمز لها بالرمز $q_1, q_2, \dots\dots, q_n$. 2

.2

أ- درجة حرية واحدة، هي الزاوية θ 2، تكون الطاقة الكمونية هي $V = mg\ell(1-\cos\theta)$ 2، والطاقة الحركية $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$ 2، ويكون تابع لاغرانج $L = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell(1-\cos\theta)$ 4

ب- بما أن للنواس درجة حرية واحد، وبالتالي توجد معادلة حركة واحدة، يمكن إيجادها بدلالة تابع لاغرانج بالصيغة:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$ 4

يكون في حالة الاهتزازات الصغيرة السعة $\sin\theta \approx \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ 1 حيث أن

$\omega^2 = \frac{g}{\ell} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{\ell} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ 1 2 نستنتج أن الدور لا يعتمد على كتلة النواس. 1

<u>جواب السؤال الثاني(30 درجة)</u>

.1 $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial v}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial v}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - v) = 0$$ 3

بملاحظة أن تابع الكمون V لا يعتمد على السرعة المعممة بينما يعتمد فقط على الإحداثيات المعممة، وبالتالي فان $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0$ لذلك فان طرح هذا المقدار من الحد الأول في المعادلة السابقة لا يغير من الأمر شيئاً. أي أن: 2

$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}(T - v) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - v) = 0$ 2 لنرمز لـ $T - V$ بـ L أي أن $L = T - V$ 1 ويسمى تابع لاغرانج، يمكن عندئذٍ كتابة المعادلة السابقة بالصيغة: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ 2

.2

أ- نعم تُحقق حركة النقطة معادلة الكرة. تُعطى معادلة الكرة بالصيغة $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=r^2$ 2، يكون عدد الإحداثيات المستقلة $3-1=2$ 1، تؤثر على النقطة المادية قوة ثقلها mg، تكون مساقط هذه القوة هي

$F_x = F_y = 0\ ,\ F_z=-mg$ 3

ب- $\left(0+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)\partial x+\left(0+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)\partial y+\left(-mg+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\right)\partial z=0$ نختار مضروب لاغرانج λ 1 بحيث يجعل أحد الأقواس معدوماً وليكن مثلاً القوس الثالث، وبما أنه توجد للنقطة درجتي حرية أي إحداثيتين مستقلتين نعتبرهما x، y فيصبح كلٍ من القوس الأول والثاني معدوماً. أي أن:

$-mg+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0\ ,$ 2 $0+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0\ ,\ 0+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0$ نحسب $\frac{\partial f}{\partial z}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}$ المشتقات الجزئية من معادلة الكرة يكون 2 $\frac{\partial f}{\partial z}=2z\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y\ ;\ \frac{\partial f}{\partial x}=2x$ نعوض في المعادلات أعلاه فنجد:

2

$2\lambda x=0\ ,\ 2\lambda y=0\ ,\ -mg+2\lambda z=0 \Rightarrow x=0\ ,\ y=0$ بالتعويض عن $x=0\ ,\ y=0$ في معادلة الكرة نحصل على قيمة $z=\pm r$، وبالتالي تتزن النقطة المادية في موضعين هما $(0,0,r)\ ,\ (0,0,-r)$، ولإيجاد قيمة λ 1 نعوض عن $\cancel{z}=+r$ في المعادلة $-mg+2\lambda z=0$ فنحصل على 2 $\lambda=\pm\frac{mg}{2r}$. 1

جواب السؤال الثالث(30 درجة)

.1 $$\frac{df}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}+\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=[H,f]+\frac{\partial f}{\partial t}$$ 4

بالاستفادة من معادلات هاملتون نجد أن: $\frac{df}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}+\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=[H,f]+\frac{\partial f}{\partial t}$ 2

تكون أقواس بواصون للتابع f 2 $[H,f]=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}\right)$

نقول عن التابع f تكاملا للحركة إذا كان: 2 $[H,f]=0$

.2 يُعطى تابع لاغرانج بالصيغة: $L=T-v=\frac{1}{2}mv^2-v(x,y,z)=\frac{1}{2}mv^2-v(x,y,z)$ 2

يُعطى تابع هاملتون بالصيغة: 2 $H=T+v=\frac{1}{2}mv^2+v(x,y,z)=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2m}+v(x,y,z)$

نحسب أقواس بواصون $[H,\vec{p}]$ فنجد: $[H,\vec{p}]=[H,p_x\vec{i}]+[H,p_y\vec{j}]+[H,p_z\vec{k}]$ 2

لنحسب أولاً $[H,p_x]$ حيث نجد:

$$[H,p_x]=\sum_{j}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_x}{\partial q_j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial p_x}{\partial p_j}\right)=\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_x}{\partial q_1}-\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial p_x}{\partial p_1}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_x}{\partial q_2}-\frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial p_x}{\partial p_2}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial p_3}\frac{\partial p_x}{\partial q_3}-\frac{\partial H}{\partial q_3}\frac{\partial p_x}{\partial p_3}\right)$$ 3

حيث: 1 $(j=1,2,3 \Leftarrow x,y,z \Leftrightarrow q_1,q_2,q_3)$، كما أن :

$$H = T + v = \frac{1}{2}mv^2 + v(x,y,z) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + v(x,y,z)$$

$$\Rightarrow [H, p_x] = \left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial p_x}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial p_x}{\partial p_x}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial p_x}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial p_x}{\partial p_y}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_z}\frac{\partial p_x}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial p_x}{\partial p_z}\right)$$

5

$$= \left(0 - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + (0 - 0) + (0 - 0) = -\frac{\partial v}{\partial x} = F_x$$

1

وبالتالي فان أقواس بواصون لاندفاع (كمية حركة) نقطة مادية تساوي إلى: $[H, \vec{p}] = F_x\vec{i} + F\vec{j} + F\vec{k} = \vec{F}$

نقول عن نقطة مادية أنها حرة الحركة أذا انعدمت القوة $\vec{F}$ المؤثرة عليها، أي أن $[H, \vec{P}] = 0$، وبالتالي فان $\vec{P} = \text{constant}$ تكاملاً للحركة. 2

طرطوس في 2024/2/19

أ. د. محمد حسن فاهود

جامعة طرطوس		الاسم :
كلية العلوم		امتحان مقرر ميكانيك تحليلي - الدرجة:90 – مدة الامتحان: ساعتان
قسم الفيزياء– السنة الثانية		الدورة الفصلية الثانية للعام الدراسي 2023 –2022م

أجب عن الأسئلة التالية

السؤال الأول(25 درجة)

1- أكمل العبارات التالية:

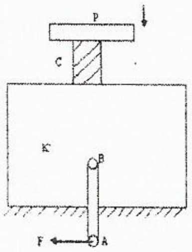
أ- عدد درجات حرية جملة مادية مؤلفة من N جسيم طليق ولا تخضع لأي ارتباط هو........ ، أما إذا خضعت الجملة لـ k ارتباط فيصبح عدد درجات حرية الجملة هو ....

ب- يُعرف العمل الافتراضي δA للقوة $\vec{F}$ في الإحداثيات الديكارتية بالصيغة........

ت- يساوي العمل الافتراضي δA لرد الفعل $\vec{R}$ في الارتباط المثالي إلى........

ث- الانتقال الافتراضي هو...............

ج- الإحداثيات المعممة هي...............



2- يتم رفع ثقل $\vec{P}$ عن طريق التأثير بقوة $\vec{F}$ على ذراع طوله $AB=\ell$ كما في الشكل المرسوم جانباً. يدير الذراع صامولة C خطوتها b (يرتفع الثقل P مسافة قدرها b عند دوران الذراع AB دورة كاملة)، ترفع بدورها الثقل $\vec{P}$ إلى أعلى (رافعة السيارة). احسب العلاقة بين القوتين $\vec{P}$ و $\vec{F}$ في حالة التوازن.

السؤال الثاني(30 درجة)

1. تُعطى معادلات لاغرانج من النوع الثاني لنقطة مادية بدلالة الطاقة الحركية T بالصيغة التالية: $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial V}{\partial q_j}$ ، اثبت بالاستفادة من هذه الصيغة أنه يمكن كتابة معادلات الحركة بدلالة تابع لاغرانج بالصيغة: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$

2. تتحرك نقطة مادية كتلتها m على كرة ملساء نصف قطرها r. بفرض أن النقطة المادية لا تغادر الكرة. المطلوب:

أ- هل تحقق حركة النقطة المادية معادلة الكرة؟ اكتب معادلة الكرة .... = $f(x,y,z)$ ، ما هو عدد الإحداثيات المستقلة؟ ما هي القوى المؤثرة في النقطة المادية؟ اكتب مساقط هذه القوى $F_x=......,\ F_y=.......,\ F_z=......$

- تُعطى معادلة توازن النقطة على سطح الكرة حسب طريقة مضاريب لاغرانج بالعلاقة التالية:

$$\left(F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x+\left(F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y+\left(F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z=0$$

اوجد بالاستفادة من طريقة اختيار مضروب لاغرانج λ مواضع توازن النقطة على الكرة. واحسب قيمة λ.

السؤال الثالث(35 درجة)

1. تتحرك نقطة مادية كتلتها m في مستوي تحت تأثير قوة جاذبة مركزية، إذا علمت أن: $T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)$, $v(r)=-\frac{\alpha m}{r}$ والمطلوب:

أ- اكتب تابع لاغرانج لهذه النقطة، ما هو عدد درجات الحرية لهذه النقطة(الإحداثيات المعممة)؟ وما هي؟

ب-اوجد معادلات حركة النقطة المادية باستخدام تابع لاغرانج.

ت-استنتج تابع هاملتون لهذه النقطة، وأوجد معادلات هاملتون لهذه النقطة.

2. يخضع جسيم لتأثير كمون $V(x,y,z)$.

أ- اكتب صيغة تابع لاغرانج وتابع هاملتون لهذا الجسيم. ب-إذا علمت أن $L_x=yp_z-zp_y$. احسب $[H,L_x]$، ثم استنتج $[H,\vec{L}]$. متى يكون $\vec{L}$ تكاملاً للحركة؟

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 9/ 7/ 2023م

أ. د. محمد حسن فاهود

طرطوس

كلية العلوم-قسم الفيزياء

سلم تصحيح أسئلة امتحان مقرر الميكانيك التحليلي لطلاب السنة الثانية فيزياء الفصل الثاني للعام الدراسي 2022-2023

جواب السؤال الأول(25 درجة)

.1

أ- 2 $3N$, $3N-k$.

ب- 2 $\delta A = F_x\,\delta x + F_y\,\delta y + F_z\,\delta z$

ت- 2 $\delta A = \vec{R}.\delta\vec{r} = 0$

ث- انتقال افتراضي: يرمز له بالرمز 2 $\delta\vec{r}$ ويحدث بثبات الزمن.

ج- الإحداثيات المعممة: هي إحداثيات مستقلة 2 كافية لتعيين الجملة المدروسة، يرمز لها بالرمز $q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n$.

2. ترسم النقطة A قوساً من دائرة عند إعطائها انتقالاً افتراضياً قدره δr_A، أي أن $\delta r_A = \ell\,\delta\varphi$ حيث $\delta\varphi$ انتقال افتراضي للزاوية φ، ويرتفع عندئذٍ الثقل P مسافة قدرها δs 2 للأعلى، ويكون حسب مبدأ العمل الافتراضي.

$$\sum_i \delta A_i = \vec{F}.\delta\vec{r}_A + \vec{P}.\delta\vec{s} = 0 \quad 2$$

بما أن جهة القوة $\vec{p}$ عكس جهة الانتقال $\delta\vec{S}$ وعلى استقامة واحدة فإننا نحصل على: 2

$$F.\delta r_A - P.\delta s = 0$$

$$\Rightarrow F\ell.\delta\varphi - P.\delta s \Rightarrow F\ell.\delta\varphi = P.\delta s \quad 2$$

نوجد العلاقة بين δs و $\delta\varphi$ كما يلي:

عندما يدور الذراع AB زاوية $\delta\varphi$، فإن القوة $\vec{P}$ ترتفع بمقدار δs

2

عندما يدور الذراع AB دورة كاملة 2π ترتفع القوة $\vec{P}$ مقدار δh

$$\Rightarrow \frac{\delta\varphi}{2\pi} = \frac{\delta s}{h} \Rightarrow \delta\varphi = 2\pi\frac{\delta s}{h} \; 2 \; \Rightarrow F\ell 2\pi\frac{\delta s}{h} = P\delta s \Rightarrow P = 2\pi\frac{\ell}{h}F \; 2$$

نستنتج أنه عند ثبات p يمكن رفع ثقل أكبر 1 وذلك بزيادة ذراع الرافعة ℓ ونقصان خطوة اللولب، كما أنه لا يمكن على الإطلاق حل هذه المسألة بوساطة طرق الاستاتيكا البيانية نظراً لأن أجزاء الآلة غير معلومة.

جواب السؤال الثاني(30 درجة)

1. 2
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) = 0$$

بملاحظة أن تابع الكمون V لا يعتمد على السرع 1 المعممة بينما يعتمد فقط على الإحداثيات المعممة، وبالتالي فان $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0$

لذلك فان طرح هذا المقدار من الحد الأول في المعادلة السابقة لا يغير من الأمر شيئاً. أي أن:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}(T-V)-\frac{\partial}{\partial q_j}(T-V)=0$$

لنرمز لـ $T-V$ بـ L، أي $L=T-V$ ويسمى تابع لاغرانج. يمكن عندئذٍ كتابة المعادلة السابقة بالصيغة:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

.2

نعم تحقق معادلة الكرة، $x^2+y^2+z^2=0$ ، عدد الإحداثيات المستقلة اثنان، لأنه توجد للنقطة المادية الطليقة ثلاث درجات حرية، وبما النقطة تتحرك على سطح كرة فيصبح عدد درجات الحرية مساوياً إلى: $3\times1-1=2$.

تؤثر على النقطة المادية قوة ثقلها mg فقط، التي مساقطها على المحاور الإحداثية هي: $F_x=F_y=0,\ F_z=-mg$ ، حيث اعتبرنا المحور z شاقولي صاعد.

نختار مضروب لاغرانج λ بحيث يجعل أحد الأقواس معدوماً وليكن القوس الثالث مثلاً. وبما أنه توجد للنقطة درجتي حرية أي إحداثيتين مستقلتين نعترهما x و y فيصبح كلٍ من القوس الأول والثاني معدومين. أي أن:

$$0+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0\ ,\ 0+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0\ ,\ -mg+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

نحسب المشتقات الجزئية من معادلة الكرة $\frac{\partial f}{\partial z},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x}$ ونعوض فنجد:

$$2\lambda x=0\ ,\ 2\lambda y=0\ ,\ -mg+2\lambda z=0\Rightarrow x=0\,,y=0$$

بالتعويض عن $x=0\,,y=0$ في معادلة الكرة نحصل على قيمة $z=\pm r$ وبالتالي تتزن النقطة المادية في موضعين هما (0,0,-r) ، (0,0,r) ولإيجاد قيمة λ نعوض عن $z=\pm r$ في $-mg+2\lambda z=0$ فنحصل على $\lambda=\pm\frac{mg}{r}$.

جواب السؤال الثالث(35 درجة)

.1 أ. $L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{\alpha m}{r}$ ، توجد درجتي حرية، هما r و θ.

ب. تُعطى معادلة حركة النقطة المادية من أجل الإحداثية الأولى $q=r$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0\Rightarrow\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=0\ \Rightarrow m\ddot{r}-(mr\dot{\theta}^2-\frac{\alpha m}{r^2})=0\Rightarrow\ddot{r}-r\dot{\theta}^2+\frac{\alpha}{r^2}=0$$

ومعادلة لاغرانج الثانية $q=\theta$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}})-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0\Rightarrow\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})-0=0\ \Rightarrow mr^2\dot{\theta}=c$$

ت. لإيجاد تابع هامتون لدينا:

$$H = T + V = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{\alpha m}{r}$$ 2

لكننا نعلم أن تابع هاملتون يُعبر عنه بدلالة الإحداثيات والدفوع المعممة:

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{P_r}{m}$$ 1

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2}$$ 1

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2\mathrm{m}}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{\alpha \mathrm{m}}{\mathrm{r}}$$ 3

تكون معادلات هاملتون:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial P_j}\ ,\ -\dot{\mathrm{P}}_{\mathrm{j}} = \frac{\partial H}{\partial q_j}$$ 1

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m}\ ,\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2}$$

$$-\dot{P}_r = \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{2m}\left(-\frac{2P_\theta}{r^3}\right) + \frac{\alpha m}{r^2}\ ,\ -\dot{P}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$ 2 2

2. أ . يعطى تابع لاغرانج وتابع هاملتون لهذه النقطة على الترتيب بالصيغتين التاليتين:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x, y, z)$$ 2

$$H = T + V = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + V(x, y, z) = \frac{1}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right) + V(x, y, z)$$ 3

ب . تُعطى أقواس بواسون لـ $L_x = yp_z - zp_y$ وتابع هاملتون بالصيغة:

$$[H, L_x] = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial L_x}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{q}_j}\frac{\partial L_x}{\partial p_j}\right) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial L_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{x}}\frac{\partial L_x}{\partial p_x}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial L_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{y}}\frac{\partial L_x}{\partial p_y}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_z}\frac{\partial L_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\frac{\partial L_x}{\partial p_z}\right) =$$ 3

$$= \left(\frac{\mathrm{P_x}}{\mathrm{m}}0 - \frac{\partial V}{\partial x}0\right) + \left(\frac{\mathrm{P_y}}{\mathrm{m}}p_z - \frac{\partial V}{\partial y}(-z)\right) + \left(\frac{\mathrm{P_z}}{\mathrm{m}}(-p_y) - \frac{\partial V}{\partial z}y\right) = \frac{\partial V}{\partial y}z - \frac{\partial V}{\partial z}y =$$ 3

$$-F_y z + F_z y = M_x \Rightarrow \left[H, \vec{L}\right] = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$ 2

يكون $\vec{L}$ تكاملاً للحركة عندما تنعدم اقواس بواصون المقابلة $\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\hat{H}, \vec{L}\right] = 0$. 2

أ. د. محمد حسن فاهود

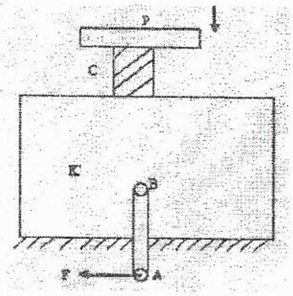
طرطوس في 2023/7/9

جامعة طرطوس	الاسم :
كلية العلوم	امتحان مقرر ميكانيك تحليلي - الدرجة:90 – مدة الامتحان:ساعتان
قسم الفيزياء– السنة الثانية	الدورة الفصلية الأولى 2022 –2023م

أجب عن الأسئلة التالية

السؤال الأول(20درجة)

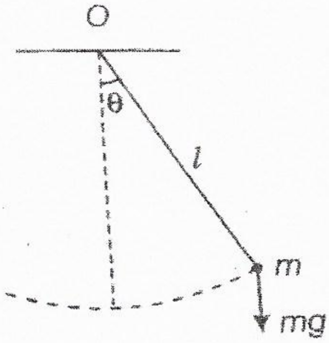
1- اذكر المفهوم الفيزيائي لكلٍ مما يلي:
جملة مادية حرة – جملة مادية مقيدة – درجات حرية الجملة– انتقال افتراضي – ارتباط مثالي – إحداثيات معممة.



2- يتم رفع ثقل $\vec{P}$ عن طريق التأثير بقوة $\vec{F}$ على ذراع طوله $AB=\ell$ كما في الشكل الموضح جانباً. يدير الذراع صامولة C خطوتها b (يرتفع الثقل P مسافة قدرها b عند دوران الذراع AB دورة كاملة)، ترفع بدورها الثقل $\vec{P}$ إلى أعلى (رافعة السيارة). احسب العلاقة بين القوتين $\vec{P}$ و $\vec{F}$ في حالة التوازن.

السؤال الثاني(30درجة)

1. اذكر نص المبدأ الديناميكي للانتقالات الافتراضية لحركة مجموعة مادية خاضعة لارتباطات مثالية هولونومية، معبراً عنه بعلاقة رياضية.



2. يهتز نواس بسيط في مستوي عمودي كما هو مبين في الشكل المرسوم جانباً. يطلب:
   - أ- اوجد الطاقة الحركية والطاقة الكامنة للنواس وبعد ذلك تابع لاغرانج.
   - ب- استنتج معادلة حركة كرة النواس من معادلة لاغرانج.
   - ت- احسب دور الاهتزازات الصغيرة السعة.
3. يعطى هاملتون هزاز توافقي وحيد البعد بالعلاقة: $H=\dfrac{1}{2}p^2+\dfrac{1}{2}\omega^2q^2$
اوجد معادلات هاملتون (معادلات الحركة) للهزاز، واوجد الحل العام.

السؤال الثالث(25 درجة)

ليكن $f\,(p_j,q_j,t)$ تابعاً للمتحولات القانونية والزمن.

أ- احسب $\dfrac{df}{dt}$ المشتق الكلي، وبالاستفادة من معادلات هاملتون اكتب $[H,f]$ صيغة أقواس بواصون للتابع f، متى نقول عن f أنه تكاملاً للحركة؟.

ب- اثبت باستخدام أقواس بواصون $[H,\vec{p}]$ أن كمية حركة نقطة مادية تكامل للحركة.

السؤال الرابع(15 درجة)

1. اكتب فقط صيغة معادلة هاملتون – جاكوبي في الميكانيك الموجي، واذكر الحد الذي يعبر عن الميكانيك الموجي، ولماذا هذا الحد يُعبر عن الميكانيك الموجي؟.
2. يدور جسم صلب بسرعة زاوية $\vec{\omega}$، فيه نقطة واحد مثبتة. استنتج T طاقة الحركة الدورانية للجسم الصلب.

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 1/ 2/ 2023م

أ. د. محمد حسن فاهود

جامعة طرطوس

كلية العلوم-قسم الفيزياء

<u>سلم تصحيح أسئلة امتحان مقرر الميكانيك التحليلي لطلاب السنة الثانية فيزياء الفصل الأول للعام الدراسي 2022-2023</u>

<u>جواب السؤال الأول(20 درجة)</u>

1. - جملة مادية حرة: هي الجملة التي لا تؤثر عليها أية قوى مطلقاً.

- جملة مادية طليقة: هي الجملة التي تتحرك تأثير قوى فعّالة فقط.

- درجات حرية الجملة: هي عدد الوسطاء المستقلة اللازمة لدراسة الجملة، أو هو عدد الاحداثيات اللازمة لوصف الجملة - فيما لو كانت طليقة مطروحاً منه عدد معادلات الارتباط.

- انتقال افتراضي: يرمز له بالرمز $\delta\vec{r}$ ويحدث بثبات الزمن.

الارتباط المثالي: هو الارتباط الذي يكون فيه العمل الافتراضي لرد الفعل معدوم $\delta A(\vec{R}) = \vec{R}.\delta\vec{r} = 0$

- الاحداثيات المعممة: هي إحداثيات مستقلة كافية لتعيين الجملة المدروسة، يرمز لها بالرمز $q_1, q_2, ..., q_n$.

2. ترسم النقطة A قوساً من دائرة عند إعطائها انتقالاً افتراضياً قدره δr_A، أي أن $\delta r_A = \ell\,\delta\varphi$ حيث $\delta\varphi$ انتقال افتراضي للزاوية φ، ويرتفع عندئذٍ الثقل Q مسافة قدرها δs للأعلى، ويكون حسب مبدأ العمل الافتراضي.

$$\sum_i \delta A_i = \vec{p}.\delta\vec{r}_A + \vec{Q}.\delta\vec{s} = 0$$

بما أن جهة القوة $\vec{p}$ عكس جهة القوة $\vec{Q}$ فإننا نحصل على:

$$p.\delta r_A - Q.\delta s = 0$$

$$\Rightarrow p\ell.\delta\varphi - Q.\delta s \overset{=0}{} \Rightarrow p\ell.\delta\varphi = Q.\delta s$$

نوجد العلاقة بين δs و $\delta\varphi$ كما يلي:

عندما يدور الذراع AB زاوية $\delta\varphi$، فان القوة $\vec{Q}$ ترتفع بمقدار δs

عندما يدور الذراع AB دورة كاملة 2π ترتفع القوة $\vec{Q}$ مقدار h

$$\Rightarrow \frac{\delta\varphi}{2\pi} = \frac{\delta s}{h} \Rightarrow \delta\varphi = 2\pi\frac{\delta s}{h} \Rightarrow p\ell 2\pi\frac{\delta s}{h} = Q\delta s \Rightarrow Q = 2\pi\frac{\ell}{h}p$$

نستنتج أنه عند ثبات p يمكن رفع يمكن رفع ثقل أكبر وذلك بزيادة ذراع الرافعة ℓ ونقصان خطوة اللولب، كما أنه لا يمكن على الإطلاق حل هذه المسألة بوساطة طرق الاستاتيكا البيانية نظراً لأن اجزاء الآلة غير معلومة.

<u>جواب السؤال الثاني(30 درجة)</u>

1. ينص المبدأ الديناميكي للانتقالات الافتراضية على: مجموع الأعمال الافتراضية لكل القوى(الفعّالة والعطالة) المؤثرة على حركة مجموعة مادية خاضعة لارتباطات مثالية هولونومية مساوية الصفر.

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i - m_i\vec{W}).\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i + \vec{J}_i).\delta\vec{r}_i = 0$$

أ- الطاقة الحركية للنواس (2) $T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$ (2)، وتعطى الطاقة الكمونية لكرة النواس بـ $V=-mg\ell\cos\theta$ (2)، يكون

عندئذٍ تابع لاغرانج مساوياً إلى: $L=T-V=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2+mg\ell\cos\theta$ (2)

ب- توجد درجة حرية واحدة هي الزاوية θ (1). استنتاج معادلة حركة النواس انطلاقاً من معادلة لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$ (2) ، نوجد $$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\,m\ell^2\dot{\theta}\ ,\ \frac{\partial L}{\partial\theta}-mg\ell\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0\Rightarrow m\ell^2\ddot{\theta}+mg\,\ell\sin\theta=0\Rightarrow$$ (2)

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\sin\theta=0$$ (2)

ت- يكون في حالة الاهتزات صغيرة السعة:

$$\sin\theta\approx\theta\Rightarrow\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\theta=0\Rightarrow\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0\Rightarrow\omega^2=\frac{g}{\ell}\Rightarrow\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\frac{g}{\ell}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$ (1) (2)

3. $$\frac{\partial H}{\partial p}=\dot{q}=p\ ,\ \frac{\partial H}{\partial q}=-\dot{p}=\omega^2 q$$ (1) (1)

نحصل من اشتقاق المعادلة الأولى بالنسبة للزمن على:

$$\ddot{q}=\dot{p}=-\omega^2 q$$ (1)

بفرض أن $q=x$ (1) $\Leftarrow \ddot{x}+\omega\ x=0$ (1) وهي معادلة تفاضلية يُعطى حلها العام بالصيغة:

$$x=A\sin(\omega t+\varphi)+B\cos(\omega t+\varphi)$$ (2)

جواب السؤال الثالث(25 درجة)

أ- $$\frac{df}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_j}\dot{p}_j+\frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)+\frac{\partial f}{\partial t}$$ (3)

بالاستفادة من معادلات هاملتون نجد أن: $$\frac{df}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}+\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=[H,f]+\frac{\partial f}{\partial t}$$ (3)

أقواس بواصون $$[H,f]=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}\right)$$ (3)

يكون التابع f تكاملا للحركة إذا كان: $[H,f]=0$ (2)

ب- نحسب أقواس بواصون $[H,\vec{p}]$ فنجد: $[H,\vec{p}]=[H,p_x]\vec{i}+[H,p_y]\vec{j}+[H,p_z]\vec{k}$ (2)

لنحسب أولاً $[H,p_x]$ حيث نجد:

$$[H,p_x]=\sum_{j}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_x}{\partial q_j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial p_x}{\partial p_j}\right)=\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_x}{\partial q_1}-\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial p_x}{\partial p_1}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_x}{\partial q_2}-\frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial p_x}{\partial p_2}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial p_3}\frac{\partial p_x}{\partial q_3}-\frac{\partial H}{\partial q_3}\frac{\partial p_x}{\partial p_3}\right)$$ (2)

حيث: $\left(j=1,2,3 \Leftarrow x,y,z \Leftrightarrow q_1,q_2,q_3\right)$، كما أن :

$$H=T+v=\frac{1}{2}mv^2+v(x,y,z)=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2m}+v(x,y,z) \quad 2$$

$$\Rightarrow[H,p_x]=\left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial p_x}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial p_x}{\partial p_x}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial p_x}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial p_x}{\partial p_y}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial p_z}\frac{\partial p_x}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial p_x}{\partial p_z}\right) \quad 2$$

$$=\left(0-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+(0-0)+(0-0)=-\frac{\partial v}{\partial x}=F_x \quad 2$$

وبالتالي فان أقواس بواصون لاندفاع (كمية حركة) نقطة مادية تساوي إلى: $[H,\vec{p}]=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}=\vec{F}$ 2

نقول عن نقطة مادية أنها حرة الحركة أذا انعدمت القوة $\vec{F}$ المؤثرة عليها، أي أن $[H,\vec{P}]=0$، وبالتالي فان $\vec{P}=\text{constant}$ تكاملاً للحركة. 2

جواب السؤال الرابع(15 درجة)

1. تُعطى معادلة هاملتون – جاكوبي في الميكانيكا لموجي بالصيغة $\frac{1}{2m}(gradS)^2+v-E-i\hbar\frac{\nabla^2 S}{2m}=0$ 3 يُعبر الحد الأخير عن التأثيرات الموجية، بسبب وجود ثابت بلانك. 1 يمكن إهمالها عندما $(gradS)^2>>\hbar|\nabla^2 S|$ 3 يسمى التقريب شبه الكلاسيكي.
2. تُعطى الطاقة الحركية بالعلاقة:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\dot{\vec{r}}_i.\dot{\vec{r}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\{(\vec{\omega}\times r_i)(\vec{\omega}\times r_i)\}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\{\vec{\omega}.[\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)]\} \quad 4$$

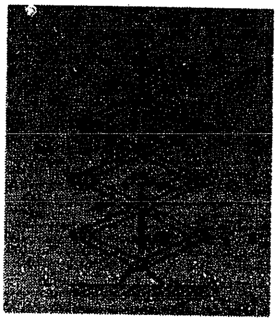
$$=\frac{1}{2}\vec{\omega}.\sum_{i=1}^{N}m_i.\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times r_i)=\frac{1}{2}\vec{\omega}\sum m.\vec{r}_i\times\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{L} \quad 4$$

طرطوس في 2023/2/1

أ. د. محمد حسن فاهود

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الفيزياء سنة ثانية فيزياء		أسم الطالب: امتحان ميكانيك تحليلي - الفصل الدراسي الثاني 2021– 2022 م الدرجة العظمى: تسعون - مدة الامتحان: ساعتان

أجب عن الأسئلة التالية (12د +13د+20د+15د+10د+20د=90 درجة)



1- اذكر المفهوم الفيزيائي لكلٍ مما يلي:
جملة مادية حرة – جملة مادية طليقة – درجات حرية الجملة – انتقال افتراضي – ارتباط مثالي – إحداثيات معممة.

2- اوجد العلاقة بين القوتين $\bar{p}$ و $\bar{Q}$ في الآلة الرافعة المبينة في الشكل، وذلك في حالة التوازن. هل يمكن لقوة Q مقدارها 2000N أن ترفع ثقل P مقداره 6000N ؟

3- تتحرك نقطة مادية كتلتها m على كرة **ملساء** نصف قطرها a. بفرض أن النقطة لا تغادر الكرة.

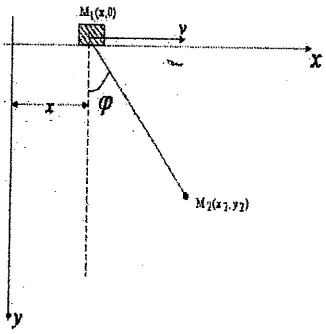
أ- هل تحقق حركة النقطة المادية معادلة الكرة؟ اكتب معادلة الكرة $f(x,y,z)=.........$، ما هو عدد الإحداثيات المستقلة؟ ما هي القوى المؤثرة في النقطة المادية؟ اكتب مساقط هذه القوى $F_x=.......,F_y=.......,F_z=......$.

ب- تُعطى معادلة توازن النقطة على سطح الكرة حسب طريقة مضاريب لاغرانج بالعلاقة التالية:

$$\left(F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x+\left(F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y+\left(F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z=0$$

بالاستفادة من طريقة اختيار مضاريب لاغرانج λ اوجد مواضع توان النقطة على الكرة.

4- يهتز نواس بسيط كتلته m_2 وطوله ℓ وتتحرك نقطة تعليقه التي كتلتها m_1 على المحور الأفقي ox كما في الشكل المرسوم جانباً. المطلوب:



أ- ما هو عدد درجات حرية الجملة؟

ب- اوجد الطاقة الحركية والطاقة الكمونية للجملة. اكتب تابع لاغرانج للجملة.

ت- حصلنا من دراسة النواس السابق في حالة الاهتزازات الصغيرة على المعادلة التالية:

$$\frac{m_2}{m_1+m_2}\ddot{\varphi}+\frac{g}{\ell}\varphi=0$$ استنتج دور الاهتزاز في هذه الحالة؟ ثم استنتج قيمة هذا الدور عندما تكون الكتلة m_1 معدومة ونقطة تعليق النواس ثابتة.

5- يُعطى هاملتون نواس توافقي وحيد البعد بالعلاقة $H=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$. اوجد باستخدام معادلات هاملتون حركة النواس واكتب صيغة الحل العام لها.

6- يخضع جسيم لتأثير كمون $V(x,y,z)$. اكتب صيغة تابع هاملتون لهذا الجسيم, وإذا علمت أن $L_x=yp_z-zp_y$. وأن أقواس بواصون لتابع ما f تُعطى بالصيغة التالية:

$$[H,f]=\left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p_x}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p_y}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial p_z}\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p_z}\right)$$

احسب $[H,L_x]$ ثم استنتج $[H,\bar{L}]$. متى يكون $\bar{L}$ تكاملاً للحركة؟

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 26/6/2022م

أ. د. محمد حسن فاهود

جامعة طرطوس
كلية العلوم - قسم الفيزياء
سلم تصحيح أسئلة امتحان مقرر الميكانيك التحليلي سنة ثانية فيزياء
الفصل الدراسي الثاني 2021-2022

جواب السؤال الأول (12 درجة)

- الجملة المادية الحرة: هي الجملة المادية التي لا تخضع لأي قوى. 2
- الجملة المادية الطليقة: هي الجملة المادية التي تخضع أثناء حركتها للقوى فعالة فقط 2
- درجات حرية الجملة: هو عدد الإحداثيات المستقلة اللازمة لدراسة الجملة، أو هو عدد الإحداثيات اللازمة لوصف الجملة فيما لو كانت طليقة مطروحاً منه عدد معادلات الارتباط. 2
- انتقال افتراضي: نرمز له بالرمز $\delta\vec{r}$ (تمييزاً له عن الانتقال الحقيقي $d\vec{r}$) ويحدث الانتقال الافتراضي بثبات الزمن. 2
- الارتباط المثالي: هو الارتباط الذي يكون فيه العمل الافتراضي لردود الفعل يساوي الصفر 2
- الإحداثيات المعممة: هي إحداثيات مستقلة كافية لتعيين الجملة المدروسة ويرمز لها بالرمز $q_1, q_2, \ldots, q_n$. 2

جواب السؤال الثاني (13 درجة)

بإعطاء المجموعة انتقالاً افتراضياً فإن جميع أقطار متوازيات الأضلاع المكونة من القضبان تستطيل بمقدار واحد قدره δs ويكون عندئذ: 4

$$\delta\xi_B = 3\delta s \quad , \quad \delta\xi_A = \delta s$$

وحسب مبدأ العمل الافتراضي لدينا:

$$\sum_i \delta A_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \Rightarrow \vec{P}\cdot\delta\vec{\xi}_B + \vec{Q}\cdot\delta\vec{\xi}_A = 0 \quad 4$$

بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي موجه نحو الأعلى نجد:

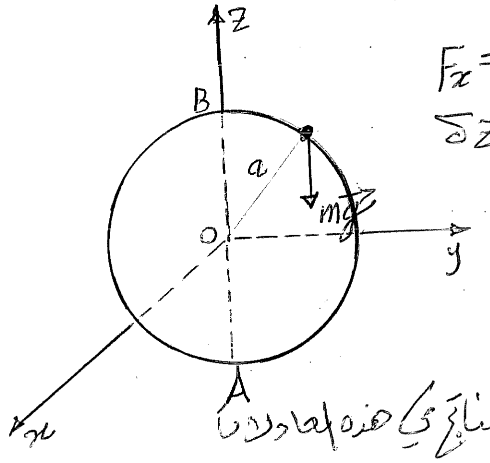
$$(3P - Q)\delta s = 0 \Rightarrow Q = 3P \quad 4$$

نعم تستطيع رفع ثقل مقداره $6000N$. 1

جواب السؤال الثالث (20 درجة)

3

أ) لم تحقق حركة النقطة المادية معادلة الكرة أي معادلة قرنًا (1) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0$
يوجد إحداثيان مستقلان، لأنه توجد معادلة ارتباط واحدة وبالتالي يكون عدد الإحداثيات
المستقلة مساويًا $3N-1=3-1=2$ ، تخضع النقطة المادية لقوة ثقلها فقط وبالتالي فإن



$$F_x=0,\ F_y=0,\ F_z=-mg \quad (2)$$ 3

ب) نختار λ بحيث تجعل أحد الأقواس معدومًا ولكن أمثال δz
وبما أن للسؤال درجتي حرية فيمكن اعتبار δx و δy
انتقالين افتراضيين مستقلين، يكون عندئذٍ: 2

$$0+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0\ ,\ 0+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0,\ -mg+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0\ (3)$$ 3

نحسب $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ من معادلة الكرة ونعوض النتائج في هذه المعادلات

$$0+2\lambda x=0,\ 0+2\lambda y=0,\ -mg+2\lambda z=0\ (4)$$ 3

بإضافة معادلة الارتباط إلى هذه المعادلات نحصل على أربع معادلات نعين منها x,y,z,λ

$$\Rightarrow 2\lambda x=0\Rightarrow x=0\ ,\ 2\lambda y=0\Rightarrow y=0$$ 3

بالتعويض في معادلة الكرة نجد $z=\pm a$ إذاً توازن النقطة المادية في
الموضعين $(0,0,a)$ و $(0,0,-a)$ وبالتعويض عن قيمة z في المعادلة الثالثة من (4) نجد 2

1 $\lambda=\pm\frac{mg}{2a}$

جواب السؤال الرابع (15 درجة)

أ) للجملة درجتا حرية 1

ب) لإيجاد الطاقة الكامنة والطاقة الحركية نقوم بحساب الإحداثيات للكتلتين، حيث نجد:

$$\vec{OM_2}=\vec{OM_1}+\vec{M_1M_2}\Rightarrow x_2=x+l\sin\varphi\ ,\ y_2=l\cos\varphi$$ 2

$$\Rightarrow \dot{x}_2=\dot{x}+l\dot{\varphi}\cos\varphi\ ,\ \dot{y}=-l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

الطاقة الحركية للكتلة M_1 هي $T_1=\frac{1}{2}M_1\dot{x}^2$

الطاقة الحركية للكتلة M_2 هي

$$T_2=\frac{1}{2}M_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)=\frac{1}{2}M_2(\dot{x}^2+l^2\dot{\varphi}^2+2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi)$$ 3

توجد طاقة كامنة للكتلة M_2 فقط هي:

$$V=-\int\vec{F}d\vec{r}=-M_2gy_2=-M_2gl\cos\varphi$$ 3

وبالتالي فإن تابع لاغرانج الجملة هو

$$L=T_1+T_2-V=\frac{1}{2}(M_1+M_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}M_2(\ell^2\dot{\varphi}^2+2\ell\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi)+M_2 g\ell\cos\varphi \quad 2$$

$$\frac{M_2}{M_1+M_2}\ddot{\varphi}+\frac{g}{\ell}\varphi=0 \Rightarrow \ddot{\varphi}+\frac{M_1+M_2}{M_2}\frac{g}{\ell}\varphi=0 \Rightarrow \ddot{\varphi}+\omega^2\varphi=0 \quad 2$$

حيث أن

$$\omega=\sqrt{\frac{M_1+M_2}{M_2}\frac{g}{\ell}} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{M_1+M_2}{M_2}\frac{g}{\ell}} \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{M_2}{M_1+M_2}\frac{\ell}{g}} \quad 1$$

عندما $M_1=0$ تؤول المسألة إلى نواس بسيط نقطة تعليقه ثابتة، نعطى دوره في حالة الاهتزازات الصغيرة بالعلاقة $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ 1

جواب السؤال الخامس (10 درجات)

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}=P_x \quad (1) \qquad 3 \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial x}=-m\omega^2 x=-\dot{P}_x \quad (2) \qquad 3$$

باشتقاق المعادلة (1) والتعويض في (2) نحصل على

$$-m\ddot{x}=-m\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x}+\omega^2 x=0 \quad 3$$

يعطى حلها بالصيغة

$$x=A\sin(\omega t+\varphi) \quad 1$$

جواب السؤال السادس (20 درجة)

يعطى تابع هاملتون في هذه الحالة بدلالة الإحداثيات والدفع المعممة بالصيغة

$$H=\frac{1}{2m}(P_x^2+P_y^2+P_z^2)+V(x,y,z) \quad 4$$

$$[H,L_x]=\left(\frac{\partial H}{\partial P_x}\frac{\partial L_x}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial L_x}{\partial P_x}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial P_y}\frac{\partial L_x}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial L_x}{\partial P_y}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial P_z}\frac{\partial L_x}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial L_x}{\partial P_z}\right)$$

$$=\left(\frac{P_x}{m}0-\frac{\partial V}{\partial x}0\right)+\left(\frac{P_y}{m}P_z+\frac{\partial V}{\partial y}z\right)+\left(-\frac{P_z}{m}P_y-\frac{\partial V}{\partial z}y\right) \quad 10$$

$$=\frac{\partial V}{\partial y}z-\frac{\partial V}{\partial z}y=-F_y z+F_z y=-(\vec{r}\times\vec{\nabla}V)_x=(\vec{r}\times\vec{F})_x=M_x$$

$$\Rightarrow [H,\vec{L}]=M_x\vec{i}+M_y\vec{j}+M_z\vec{k}=\vec{M} \quad 2$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=[H,\vec{L}]=0$$

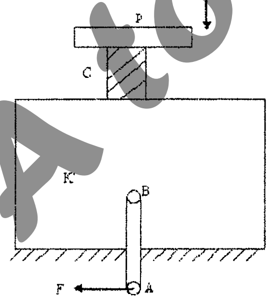
يكون $\vec{L}$ تكاملاً للحركة عندما ينعدم أقواس بواسون المقابلة لـ $\vec{L}$ 4

جامعة طرطوس		الاسم :
كلية العلوم		امتحان مقرر ميكانيك تحليلي - الدرجة:90 – مدة الامتحان:ساعتان
قسم الفيزياء– السنة الثانية		الدورة الفصلية الأولى 2021 –2022م

أجب عن الأسئلة التالية

السؤال الأول(20درجة)

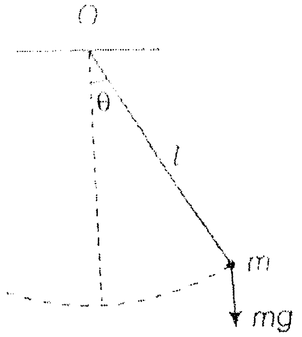
1- اذكر المفهوم الفيزيائي لكلٍ مما يلي:
جملة مادية حرة – جملة مادية مقيدة – درجات حرية الجملة– انتقال افتراضي – ارتباط مثالي – إحداثيات معممة.



2- يتم رفع ثقل $\vec{P}$ عن طريق التأثير بقوة $\vec{F}$ على ذراع طوله $AB=\ell$ كما في الشكل الموضح جانباً. يدير الذراع صامولة C خطوتها b (يرتفع الثقل P مسافة قدرها b عند دوران الذراع AB دورة كاملة)، ترفع بدورها الثقل $\vec{P}$ إلى أعلى (رافعة السيارة). احسب العلاقة بين القوتين $\vec{P}$ و $\vec{F}$ في حالة التوازن.

السؤال الثاني(30درجة)

1. اذكر نص المبدأ الديناميكي للانتقالات الافتراضية لحركة مجموعة مادية خاضعة لارتباطات مثالية هولونومية، معبراً عنه بعلاقة رياضية.



2. يهتز نواس بسيط في مستوي عمودي كما هو مبين في الشكل المرسوم جانباً. يطلب:
أ- اوجد الطاقة الحركية والطاقة الكامنة للنواس وبعد ذلك تابع لاغرانج.
ب- استنتج معادلة حركة كرة النواس من معادلة لاغرانج.
ت- احسب دور الاهتزازات الصغيرة السعة.
3. يعطى هاملتون هزاز توافقي وحيد البعد بالعلاقة: $H=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\omega^2q^2$
اوجد معادلات هاملتون (معادلات الحركة) للهزاز، واوجد الحل العام.

السؤال الثالث(25 درجة)

ليكن $f(p_i, q_i, t)$ تابعاً للمتحولات القانونية والزمن.

أ- احسب $\frac{df}{dt}$ المشتق الكلي، وبالاستفادة من معادلات هاملتون اكتب $[H, f]$ صيغة أقواس بواصون للتابع f، متى نقول عن f أنه تكاملاً للحركة؟.
ب- اثبت باستخدام أقواس بواصون $[H, \vec{p}]$ أن كمية حركة نقطة مادية تكامل للحركة.

السؤال الرابع(15 درجة)

1. اكتب فقط صيغة معادلة هاملتون – جاكوبي في الميكانيك الموجي، واذكر الحد الذي يعبر عن الميكانيك الموجي، ولماذا هذا الحد يُعبر عن الميكانيك الموجي؟.
2. يدور جسم صلب بسرعة زاوية $\vec{\omega}$، فيه نقطة واحد مثبتة. استنتج T طاقة الحركة الدورانية للجسم الصلب.

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2022/2/8م

أ. د. محمد حسن فاهود

سلم تصحيح أسئلة امتحان مقرر ميكانيك تحليلي لطلاب السنة الثانية فيزياء

الدورة الفصلية الأولى 2021—2022

جواب السؤال الأول (20 درجة)

1- جملة مادية حرة: هي الجملة المادية التي لا تؤثر عليها أية قوى مطلقاً. 1

- جملة مادية طليقة: هي الجملة المادية التي تتحرك تحت تأثير قوى متكافئة فقط. 1

- درجات حرية الجملة: هي عدد الوسطاء المستقلة اللازمة لدراسة الجملة، أو هو عدد الإحداثيات اللازمة لوصف الجملة فيما لو كانت طليقة مطروحاً منه عدد معادلات الارتباط. 2

- الارتباط الهولونومي: هو ارتباط تفاضلي يمكن مكاملته، وبالتالي يؤول إلى ارتباط هندسي. 1

- الانتقال الافتراضي: يرمز له بالرمز $\delta \vec{r}$ ويحدث بثبات الزمن. 1

- الارتباط المثالي: هو الارتباط الذي يكون فيه العمل الافتراضي لرد الفعل معدوم 2

$$\delta A(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \delta \vec{r} = 0$$

- الإحداثيات المعممة: هي إحداثيات مستقلة كافية لتعيين الجملة المدروسة، يرمز لها بالرمز 2

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

2- ترسم النقطة A قوساً من دائرة عند إعطائها انتقالاً افتراضياً قدره δr_A ، أي أن $\delta r_A = l\,\delta\varphi$ حيث $\delta\varphi$ انتقال افتراضي للزاوية φ. ويرتفع عندئذٍ الثقل Q للأعلى مسافة قدرها δs، ويكون حسب مبدأ العمل الافتراضي

$$\sum_i \delta A_i = \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{Q}\,\delta \vec{s} = 0 \quad (2)$$

فمثلاً (يكون انتقال القوة $\vec{P}$ عكس انتقال القوة $\vec{Q}$) عندها:

$$P\,\delta r_A - Q\,\delta s = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow P l\,\delta\varphi - Q\,\delta s \Rightarrow P l\,\delta\varphi = Q\,\delta s$$

* نوجد العلاقة بين δs و $\delta\varphi$ كما يلي: 2

عندما يدور الذراع AB زاوية $\delta\varphi$ فإن القوة Q ترتفع مسافة δs

عندما يدور الذراع AB زاوية (دورة كاملة) 2π ترتفع القوة Q مسافة h

$$\Rightarrow \frac{\delta\varphi}{2\pi} = \frac{\delta s}{h} \Rightarrow \delta\varphi = 2\pi \frac{\delta s}{h} \quad (2)$$

$$\Rightarrow p\ell 2\pi \frac{\delta s}{h} = Q\,\delta s \Rightarrow Q = 2\pi \frac{\ell}{h} p \quad (2)$$

يذكر أنه يمكن رفع ثقل أكبر عند ثبوت القوة $\vec{P}$ بزيادة ذراع الرافعة ℓ ونقصان خطوة اللولب، كما أنه لا يمكن على الإطلاق حل هذه المسألة بواسطة طرق الاستاتيكا البيانية نظراً لأن أجزاء الآلة غير معلومة.

جواب السؤال الثاني (30 درجة)

1. ينص المبدأ الديناميكي للانتقالات الافتراضية على: يكون مجموع الأعمال الافتراضية لكل القوى (الفعالة والعطالة) المؤثرة على حركة مجموعة مادية خاضعة لارتباطات مثالية هو لوضعية مسارية الصفر. (3)

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i - m_i \vec{W}_i)\cdot\delta\vec{r}_i \equiv \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i - \vec{J}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \quad (4)$$

2. أ)

الطاقة الكامنة $V = mg\ell(1-\cos\theta)$ or $V = -mg\ell\cos\theta$ (3)

الطاقة الحركية $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta^2$ (3)

تابع لاغرانج $L = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta^2 + mg\ell\cos\theta$ (3)

ب)

معادلة الحركة للنواس $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow m\ell^2\ddot\theta - mg\ell\sin\theta = 0$ (2)

$$\ddot\theta - \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

ت) في حالة الاهتزازات صغيرة السعة

$$\sin\theta \simeq \theta \Rightarrow \ddot\theta - \frac{g}{\ell}\theta = 0 \text{ or } \ddot\theta - \omega^2\theta = 0 \quad (2)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (2)$$

وهو دور الاهتزاز صغير السعة.

3-

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot q = p \;,\; \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot p = \omega^2 q \quad (2)$$

نحصل من اشتقاق المعادلة الأولى بالنسبة للزمن على

$$\ddot q = \dot p = -\omega^2 q \quad (2)$$

بفرض أن $q = x \Leftarrow$

$$\ddot x + \omega^2 x = 0 \quad (2)$$

هي معادلة تفاضلية نعطي حلها بالصيغة:

$$x = A\sin(\omega t+\varepsilon) + B\cos(\omega t+\varepsilon) \quad (2)$$

جواب السؤال الثالث (25 درجة)

-1

$$\frac{df}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_j}\dot{p}_j+\frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)+\frac{\partial f}{\partial t} \quad (2)$$

يمكن الاستفادة من معادلات هاملتون:

$$\frac{df}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}+\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=[H,f]+\frac{\partial f}{\partial t} \quad (2)$$

أقواس بواسون

$$[H,f]=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}\right) \quad (2)$$

تكون أقواس بواسون تكاملاً للحركة إذا كان: $[H,f]=0$ (2)

2- نحسب أقواس بواسون $[H,\vec{P}]$ فنجد:

$$[H,\vec{P}]=[H,p_x]\vec{i}+[H,p_y]\vec{j}+[H,p_z]\vec{k} \quad (2)$$

نحسب أولاً $[H,p_x]$

$$[H,p_x]=\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_x}{\partial q_j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial p_x}{\partial p_j}\right)=\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_x}{\partial q_1}-\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial p_x}{\partial p_1}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_x}{\partial q_2}-\frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial p_x}{\partial p_2}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial p_3}\frac{\partial p_x}{\partial q_3}-\frac{\partial H}{\partial q_3}\frac{\partial p_x}{\partial p_3}\right) \quad (2)$$

حيث $q_1,q_2,q_3 \Leftrightarrow x,y,z \Leftarrow j=1,2,3$ أي أن:

$$H=T+V=\frac{1}{2}mv^2+V(x,y,z)=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2m}+V(x,y,z) \quad (3)$$

$$\Rightarrow [H,p_x]=\left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial p_x}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial p_x}{\partial p_x}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial p_x}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial p_x}{\partial p_y}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial H}{\partial p_z}\frac{\partial p_x}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial p_x}{\partial p_z}\right)=\left(0-\frac{\partial V}{\partial x}\right)+(0-0)+(0-0)=-\frac{\partial V}{\partial x}=F_x \quad (4)$$

وبالتالي فإن أقواس بواسون لكمية الحركة تساوي إلى: (2)

$$[H,\vec{P}]=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}=\vec{F} \quad (2)$$

تكون تكاملاً للحركة إذا كانت النقطة حرة $\vec{F}=0$. (2)

جواب السؤال الرابع (15 درجة)

$$\frac{1}{2m}(\text{grad}\, S)^2 + V - E - i\hbar\,\frac{\nabla^2 S}{2m} = 0 \quad 3$$ -1

يعبر الحد الأخير عن التأثيرات الموجية ويمكن إهماله عند

$$(\text{grad}\, S)^2 \gg \hbar\,|\nabla^2 S| \quad 3$$ يسمى التقريب شبه الكلاسيكي

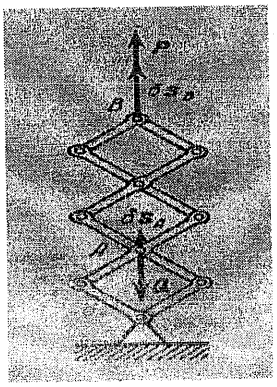
$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \left\{(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\right\} = \frac{1}{2}\sum m_i \left\{\vec{\omega}\cdot\left[\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\right]\right\} \quad 3$$ .2

$$= \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\sum_i m_i\,\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) = \frac{1}{2}\vec{\omega}\sum_i m_i\,\vec{r}_i\times\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} \quad 3 \quad 3$$

جامعة طرطوس		الاسم :
كلية العلوم		امتحان مقرر ميكانيك تحليلي - الدرجة:90 – مدة الامتحان:ساعتان
قسم الفيزياء– السنة الثانية		الدورة الفصلية الثانية للعام الدراسي 2020 – 2021م

أجب عن الأسئلة التالية

السؤال الأول(20درجة)



1- اذكر المفهوم الفيزيائي لكلٍ مما يلي:
جملة مادية حرة – جملة مادية طليقة – درجات حرية الجملة – ارتباط هولونومي – انتقال افتراضي – ارتباط مثالي – إحداثيات معممة.

2- اوجد العلاقة بين القوتين $\vec{p}$ و $\vec{Q}$ في الآلة الرافعة المبينة في الشكل، وذلك في حالة التوازن. هل يمكن لقوة مقدارها 1000N أن ترفع سيارة ثقلها 3000N؟

السؤال الثاني(30درجة)

1. اذكر نص المبدأ الديناميكي للانتقالات الافتراضية لحركة مجموعة مادية خاضعة لارتباطات مثالية هولونومية، معبراً عنه بعلاقة رياضية.
2. يهتز نواس بسيط كتلته m، وطوله ℓ في مستوي عمودي. اوجد تابع لاغرانج لهذا النواس، واوجد معادلة حركته، واحسب دور الاهتزازات الصغيرة السعة(ارسم شكلاً يوضح هذا النواس).
3. يعطى هاملتون هزاز توافقي وحيد البعد بالعلاقة: $H=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\omega^2q^2$
اوجد معادلات هاملتون (معادلات الحركة) للهزاز، واوجد الحل العام.

السؤال الثالث(25 درجة)

ليكن $f\,(p_j,q_j,t)$ تابعاً للمتحولات القانونية والزمن.

أ- احسب $\frac{df}{dt}$ المشتق الكلي، وبالاستفادة من معادلات هاملتون اكتب $[H,f]$ صيغة اقواس بواسون للتابع f، متى نقول عن f أنه تكاملاً للحركة؟.

ب- اثبت باستخدام اقواس بواسون $[H,\vec{p}]$ أن كمية حركة نقطة مادية تكامل للحركة.

السؤال الرابع(15 درجة)

1. اكتب فقط صيغة معادلة هاملتون – جاكوبي في الميكانيك الموجي، واذكر الحد الذي يعبر عن الميكانيك الموجي، ولماذا هذا الحد يُعبر عن الميكانيك الموجي؟.
2. يدور جسم صلب بسرعة زاوية $\vec{\omega}$، فيه نقطة واحد مثبتة. اثبت أن طاقة الحركة الدورانية للجسم الصلب تعطى بالعلاقة $T=\frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{L}$.

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2021/8/1م

أ. د. محمد حسن فاهود

سلم تصحيح أسئلة امتحان مقرر ميكانيك تحليلي لطلاب السنة الثانية فيزياء

الفصل الدراسي من العام الدراسي 2021-202

جواب السؤال الأول [20]

1- * جملة مادية حرة: لا تؤثر عليها أية قوة مطلقاً. (1) (1)

* جملة مادية طليقة: تتحرك تحت تأثير قوى فعّالة فقط.

* درجات الحرية للجملة: هو عدد الوسطاء المستقلة اللازمة لدراسة الجملة (2) أو هو عدد الإحداثيات اللازمة لوصف الجملة فيما لو كانت طليقة مطروحاً منه عدد معادلات الارتباط.

* الارتباط الهولونومي: هو الارتباط التفاضلي الذي يمكن مكاملته وبالتالي يؤول إلى ارتباط هندسي. (1)

* الانتقال الافتراضي: يُرمز له بالرمز $\delta\vec{r}$ تمييزاً عن الانتقال الحقيقي $d\vec{r}$ ويحدث بثبات الزمن. (1)

* الارتباط المثالي: هو الارتباط الذي يكون فيه العمل الافتراضي لرد الفعل يساوي الصفر $\delta A(\vec{R})=\vec{R}\cdot\delta\vec{r}=0$ (2)

* الإحداثيات المعممة: هي إحداثيات مستقلة كافية لتعيين الجملة المدروسة يرمز لها بالرمز $q_1, q_2, \dots\dots, q_n$ (2)

2- بإعطاء المجموعة انتقالاً افتراضياً (إزاحة افتراضية)، فإن جميع أقطار متوازيات الأضلاع المكونة من القضبان ترتفع بمقدار واحد قدره δs وعندئذٍ:

$$\delta s_B=3\delta s \quad , \quad \delta s_A=\delta s$$ (2)

يكون حسب مبدأ العمل الافتراضي أن:

$$\sum_i \delta A_i=\sum_i \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$$ (2)

$$\vec{P}\cdot\delta\vec{s}_B+\vec{Q}\,\delta\vec{s}_A=0 \Rightarrow 3\vec{P}\,\delta s+\vec{Q}\,\delta s=0$$ (2)

بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي موجه نحو الأعلى نجد:

$$(3P-Q)\,\delta=0 \Rightarrow Q=3P$$ (2) (2)

نعم يمكن لقوة مقدارها 1000N أن ترفع سيارة ثقلها 3000N.

جواب السؤال الثاني [30]

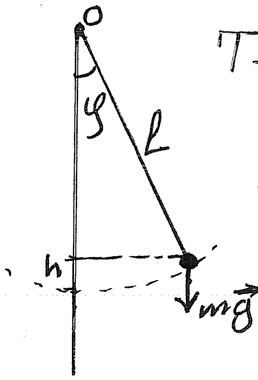
1- يكون مجموع الأعمال الافتراضية لكافة القوى (الفعالة والعطالية) المؤثرة على حركة مجموعة مادية خاضعة لارتباطات مثالية هولونومية مساوية الصفر. (3)

ويعبر عنه رياضياً بالعلاقة:

$$\delta A=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i-m_i\vec{W}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i\equiv\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i-\vec{J}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=0 \quad (4)$$

2- يمكن تعيين موضع النواس بواسطة إحداثية واحدة φ، وبالتالي فإننا (1)

نختار $q=\varphi$ (1)



تكون الطاقة الحركية مساوية إلى:

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2l^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \quad (2)$$

وتعطى الطاقة الكامنة بالعلاقة:

$$V=mgh=mgl(1-\cos\varphi) \quad (2)$$

وتابع لاغرانج هو:

$$L=T-V=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2-mgl(1-\cos\varphi) \quad (3)$$

معادلة لاغرانج $\Longrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0\Rightarrow l\ddot{\varphi}+g\sin\varphi=0 \quad (2)$$

في حالة الاهتزازات الصغيرة السعة يكون

$$\sin\varphi\to\varphi\Rightarrow\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0\Rightarrow\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi=0 \quad (2)$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{g}{l}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2)$$

3- لدينا من معادلات هاملتون

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\dot{q}=p\ ,\quad \frac{\partial H}{\partial q}=-\dot{p}=\omega^2q \quad (2)$$

نحصل من اشتقاق المعادلة الأولى بالنسبة للزمن على:

$$\ddot{q}=\dot{p}=-\omega^2q\Rightarrow\ddot{q}+\omega^2q=0 \quad (2)\ (2)$$

تمثل هذه المعادلة معادلة حركة هزاز توافقي في بعد واحد بالصيغة

$$q=A\sin(\omega t+\varepsilon)+B\cos(\omega t+\varepsilon) \quad (2)$$

جواب السؤال الثالث [25]

1-

$$\frac{df}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_j}\dot{p}_j+\frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)+\frac{\partial f}{\partial t} \quad 2$$

بالاستفادة من معادلات هاملتون يكون:

$$\frac{df}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=[H,f]+\frac{\partial f}{\partial t} \quad 2$$

حيث أن

$$[H,f]=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}\right) \quad 2$$

أقواس بواسون

يكون التابع f تكاملاً للحركة إذا كان

$$[H,f]=0 \quad 2$$

2- لإثبات أن p تكاملاً للحركة يجب أن نحسب أقواس بواسون $[H,\vec{p}]$ في

$$[\vec{H},\vec{p}]=[H,p_x]\,\vec{i}+[H,p_y]\,\vec{j}+[H,p_z]\,\vec{k} \quad 2$$

نحسب من أجل ذلك أولاً $[H,p_x]$:

$$[H,p_x]=\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_x}{\partial q_j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial p_x}{\partial p_j}\right)=\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_x}{\partial q_1}-\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial p_x}{\partial p_1}\right)+$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_x}{\partial q_2}-\frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial p_x}{\partial p_2}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial p_3}\frac{\partial p_x}{\partial q_3}-\frac{\partial H}{\partial q_3}\frac{\partial p_x}{\partial p_3}\right) \quad 2$$

حيث أن ($q_1,q_2,q_3 \Longleftrightarrow x,y,z \Longleftarrow j=1,2,3$) ومنه يكون:

$$H=T+V=\frac{1}{2}mv^2+V(x,y,z)=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2m}+V(x,y,z) \quad 3$$

$$\Rightarrow [H,p_x]=\left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial p_x}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial p_x}{\partial p_x}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial p_x}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial p_x}{\partial p_y}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial H}{\partial p_z}\frac{\partial p_x}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial p_x}{\partial p_z}\right)=\left(0-\frac{\partial V}{\partial x}\right)+(0-0)+(0-0)$$

$$=-\frac{\partial V}{\partial x}=F_x \quad 4$$

وبالتالي فإن أقواس بواسون لاندفاع (كمية حركة) نقطة مادية يساوي إلى:

$$[H, \vec{P}] = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = \vec{F} \quad (2)$$

نقول عن نقطة مادية أنها حرة إذا انعدمت القوة $\vec{F}$ المؤثرة عليها، أي أن $[H, \vec{P}] = 0$ وبالتالي $\vec{p} = const$ (2) تكامل الحركة.

جواب السؤال الرابع [15]

1- تعطى صيغة معادلة هاملتون - جاكوبي في الميكانيك الموجي بالصيغة:

$$\frac{1}{2m}(\text{grad}\, S)^2 + V - E - i\hbar \frac{\nabla^2 S}{2m} = 0 \quad (3)$$

يُعبر الحد الأخير عن التأثيرات الموجية، ويمكن إهماله عندما $(\text{grad}\, S)^2 \gg \hbar |\nabla^2 S|$ (3) يسمى بالتقريب شبه الكلاسيكي.

2.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i (\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i \{(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\cdot(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\} = \frac{1}{2}\sum m_i \{\vec{\omega} \cdot [\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)]\} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\omega}\sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2}\vec{\omega}\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\omega}\,\vec{L} \quad \text{و} \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

أ.د. محمد حسن فاهور

طرطوس في 2024/8/16