ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية **العلوم**

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

اسئلة دورات محلولة

الفيزياء الاحصائية

A 2 Z LIBRARY

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الفيزياء	اسم الطالب: الدرجة العظمى: تسعون درجة مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2024 - 2025

س١- أجب عن البندين التاليين: (50 درجة).

10 **١-** عرف عنصر فراغ الحجم الطوري $d\Gamma$ ، ثم استنتج حجوم العناصر التالية $d\Gamma(P)$ و $d\Gamma(\upsilon)$ و $d\Gamma(\varepsilon)$

30 **٢- مسألة:** جملة مكونة من N جسيم $(N>>1)$، موزعة على ثلاث سويات للطاقة، $\varepsilon_1=0\ \ (J)$ و $\varepsilon_2=KT\ \ (J)$ و $\varepsilon_3=2KT\ \ (J)$، السويات متحللة بالشكل $g_1=N$ و $g_2=g_3=1$. والمطلوب:

١- أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي (العدد فقط بدلالة N).

٢- أوجد طاقة الحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2}, \overbrace{0}^{\varepsilon_3})$، ثم أوجد وزنها الإحصائي (بدلالة N). في الحالات التالية:

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

(بفرض $N=2$ ، احسب القيم الرقمية للأوزان الإحصائية للحالات السابقة (A,B,C)، ومثلها.)

٣- بفرض أن الجسيمات متمايزة، أوجد أرقام انشغال حالة التوزع الماكروي الأكثر احتمال (N_1, N_2, N_3) بدلالة العدد N وتابع التحاص Z، وتحقق من ذلك (تحقق أن $N_1+N_2+N_3=N$). ما نوع التوزع الحاصل ؟.

10 **٣-** أوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال $N_o(0{,}8\vartheta_H \to \vartheta_H)$.

علماً أن قيم تابع الخطأ الموافقة: $E_r(1)=0{,}8427$ و $E_r(0{,}8)=0{,}7421$ مع الرسم التوضيحي المناسب.

س٢- أجب عن البنود التالية: (40 درجة).

35 **١-** استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل – بولتزمان (بدلالة الثابت $\alpha=m/2kT$).

ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

- أوجد قيمة السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H بدلالة α، ثم أوجد قيمة السرعتين $\overline{\vartheta}$ و $\overline{\vartheta^2}$ والتشتت $\overline{\Delta\vartheta^2}$ بدلالة ϑ_H.

توجيه: استفد في الحل من تكاملات بواسون التالية

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2}dx=\begin{cases}\dfrac{n!}{\frac{n}{2}!\,2^{n+1}}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha^{n+1}}} & ;\ n\ (\text{زوجي})\ \text{و}\ n\ge 0\\[2ex] \dfrac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ;\ n\ (\text{فردي})\ \text{و}\ n=2m+1\ \text{و}\ m\ge 0\end{cases}$$

5 **٢-** جملتان تمتلكان نفس العدد من السويات والجسيمات الكلاسيكية، فإذا علمت أن سويات الجملة الأولى متحللة والثانية غير متحللة، والسؤال: أي الجملتين يمتلك أكبر عدد لحالات التوزع الماكروي الإجمالي.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس: / / 2025

مدرس المقرر د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2024 – 2025 (تسعون درجة)

10

ج ١ : (50 درجة).

١- يعطى عنصر الفراغ الطوري $\Gamma(q, P)$ بدلالة إحداثيي الموضع q والاندفاع P المعممين. فيكون عنصر حجم الفراغ الطوري $d\Gamma$ بدلالة عنصري الحجم dq_V و dP_V (الخاصين بالموضع والاندفاع على الترتيب)، بالشكل:

$$d\Gamma = dq_V . dP_V \qquad (1)$$

نفرض للسهولة أن عنصر الحجم الخاص بالموضع مساوياً للحجم $dq_V = V$ لأنه يمثل جداءات لعناصر الموضع.

عنصر فراغ الاندفاع الطوري:

نأخذ عنصر الحجم الخاص بالاندفاع مساوياً لعنصر حجم الكرة التي نصف قطرها الاندفاع P ذاته كما يلي:

$$dP_V = d(\frac{4}{3}\pi P^3) = 4\pi P^2 dP$$

بالتعويض في (1) عن كلٍ بقيمته نحصل على عنصر فراغ الاندفاع الطوري:

$$\boxed{d\Gamma(P) = 4\pi V P^2 dP} \qquad (2)$$

عنصر فراغ السرعة الطوري:

نجده من علاقة كمية الحركة بالسرعة حسب العلاقة:

$$P = m\vartheta \quad \Rightarrow \quad dP = m d\vartheta$$

وبالتعويض في (2) عن كلٍ بقيمته نحصل على عنصر فراغ السرعة الطوري :

$$\boxed{d\Gamma(\vartheta) = 4\pi V m^3 \vartheta^2 d\vartheta} \qquad (3)$$

عنصر فراغ الطاقة الطوري:

نجده من عبارة الطاقة الحركية (باعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم المدروس هي طاقة حركية فقط).

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m\vartheta^2 = \frac{P^2}{2m} \qquad (*)$$

وكما هو واضح يمكن إيجاده بالتعويض عن قيمة الاندفاع من (*) في (2) كما يلي:

$$P^2 = 2m\varepsilon \quad \Rightarrow \quad P = \sqrt{2m\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad dP = \frac{m\,d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}$$

وبالتعويض في (2) نحصل على عنصر فراغ الطاقة الطوري :

$$d\Gamma(\varepsilon) = 4\pi V\, 2m\varepsilon \frac{m\,d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} = 2\pi V \sqrt{2m}\,\sqrt{\varepsilon}\, 2m\, d\varepsilon$$

$$\boxed{d\Gamma(\varepsilon) = 2\pi V (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon} \qquad (4)$$

2- المسألة: 30

١ - عدد حالات التوزع الماكروي:

$$N_o = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!} = \frac{(N+3-1)!}{N!\,(3-1)!} = \frac{(N+2)!}{2\,N!} = \frac{(N+2)(N+1)\,N!}{2\,N!} = \frac{(N+2)(N+1)}{2}$$

٢ - طاقة الحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N-1}}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$ نجدها من العلاقة

$$U_{(N-1,1,0)} = \sum_i N_i \varepsilon_i = (N-1)\times 0 + 1\times KT + 0\times 2KT = KT$$

الأوزان الإحصائية:

A - الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = N!\left(\frac{N^{N-1}}{(N-1)!}\,\frac{1^1}{1!}\,\frac{1^0}{0!}\right) = N\,N^{N-1} = N^N$$

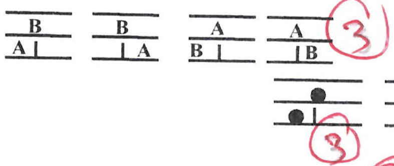
B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)}=\frac{(N-1+N-1)!}{(N-1)!\,(N-1)!}\,\frac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)!}\,\frac{(0+1-1)!}{0!\,(1-1)!}=\frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}$$ ١ ١

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1},\overset{\varepsilon_2}{1},\overset{\varepsilon_3}{0})$ تحقق الشرط $g_i\ge N_i$ فهي مقبولة

$$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)}=\frac{N!}{(N-1)!\,(N-N+1)!}\,\frac{1!}{1!\,(1-1)!}\,\frac{1!}{0!\,(1-0)!}=N$$ ١ ١

الحسابات الرقمية والتمثيل: الحالة المطلوبة هي $(\overset{\varepsilon_1}{1},\overset{\varepsilon_2}{1},\overset{\varepsilon_3}{0})$ و $g_1=2$ و $g_2=g_3=1$



A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية): $W_{M-B}=N^N=2^2=4$ ١

B- الجسيمات بوزونات: $W_{B-E}=\frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}=\frac{2!}{1}=2$ ١ ١

C- الجسيمات فيرميونات: $W_{F-D}=N=2$

٣- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية، نوجد تحاص الجملة z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z=\sum_i g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}=\sum_i g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT}=N\,e^{-0}+1e^{-1}+1e^{-2}=N+e^{-1}+e^{-2}$$ ١

نوجد رقم انشغال السويات في الحالة الأكثر احتمال من مكسويل

$$N_i=g_i\,e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}=e^{\alpha}g_i\,e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}=\frac{N}{Z}g_i\,e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}$$ ١

فيكون: $N_1=\frac{N}{Z}N\,e^{-0}=\frac{N^2}{Z}$ و $N_2=\frac{N}{Z}1e^{-1}=\frac{N}{Z}e^{-1}$ و $N_3=\frac{N}{Z}1e^{-2}=\frac{N}{Z}e^{-2}$. ١ ١ ١

ويمكن التحقق من ذلك بالجمع

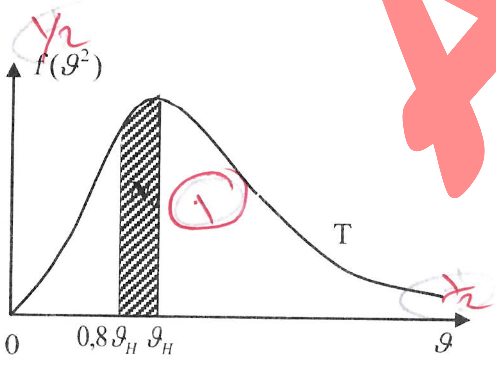
$$N_1+N_2+N_3=\frac{N^2}{Z}+\frac{N}{Z}e^{-1}+\frac{N}{Z}e^{-2}=\frac{N}{Z}(N+e^{-1}+e^{-2})=\frac{N}{Z}Z=N$$ ١

لإيجاد نوع التوزع الحاصل (في الحالة الأكثر احتمال) نوجد نسب أرقام الإنشغال

$\frac{N_1}{N_2}=N\,e>1 \Rightarrow N_1>N_2$ و $\frac{N_2}{N_3}=\frac{e^{-1}}{e^{-2}}=e>1 \Rightarrow N_2>N_3$ و $\frac{N_1}{N_3}=N\,e^2>1 \Rightarrow N_1>N_3$ ١ ١ ١

نستنتج أن: $N_1>N_2>N_3$ فالتوزع طبيعي.

٣- ١٥



لدينا قانون عدد الجسيمات التي تنحصر سرعها في المجال $N_o(0\to\vartheta_o)$

$$N_o(0\to\vartheta_o)=N\left[E_r(x)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}x\,e^{-x^2}\right] \quad (*)$$ ٢

نكتب المجال المطلوب بالشكل:

$$N_o(0,8\,\vartheta_H\to\vartheta_H)=N_o(0\to\vartheta_H)-N_o(0\to0,8\,\vartheta_H)$$ ٢

نستخدم (*) في التعبير عن قيمة كلٍ حد من المجال

$N_o(0\to\vartheta_H)$ و $N_o(0\to0,8\,\vartheta_H)$ كما يلي:

$$N_o(0,8\,\vartheta_H\to\vartheta_H)=N\left[E_r(1)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\times1\times e^{-(1)^2}\right]-N\left[E_r(0,8)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\times0,8\times e^{-(0,8)^2}\right]$$ ٢

$$=N[0,8427-0,4153]-N[0,7421-0,4758]=(42,74\%-26,63\%)\,N=16,11\%\,N$$ ١ ١

ج ٢ : (40 درجة).

١ : لإيجاد تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان: 35

ننطلق من العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعها المطلقة وفق توزع M-B في مجال السرعات $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$.

$$dN(\vartheta) = \frac{N}{Z} e^{\beta m \vartheta^2/2}\, g(\vartheta)\, d\vartheta$$ 2

ونعوض عن المقدار $g(\vartheta)\, d\vartheta$ بقيمتة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري

$$g(\vartheta)\, d\vartheta = C\, d\Gamma(\vartheta) = CV\, 4\pi\; m^3\, \vartheta^2\, d\vartheta$$ 2

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z = CV\,(2\pi\, m KT)^{3/2}$ ، وعن الطاقة $\varepsilon = m\vartheta^2/2$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(\vartheta) = \frac{N}{CV\,(2\pi\, m KT)^{3/2}}\, e^{-m\vartheta^2/2KT}\, CV\, 4\pi\, m^3\, \vartheta^2\, d\vartheta$$ 2

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(\vartheta) = 4\pi\, N\left(\frac{m}{2\pi\; KT}\right)^{3/2} \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\, d\vartheta$$ 1

نعتبر أن $\boxed{\alpha = m/2\,KT}$

$$dN(\vartheta) = 4\pi\, N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\, d\vartheta$$ 2

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع السرع بدلالة تابع كثافة السرع كما يلي:

$$dF(\vartheta) = \frac{dN(\vartheta)}{N} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\, d\vartheta = f(\vartheta^2)\, d\vartheta$$ 2

حيث يعبر $f(\vartheta^2)$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

$$f(\vartheta^2) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}$$ 2

للبرهان على أن $f(\vartheta^2)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على السرعة في المجال $]0 \to \infty[$.

$$\int_0^\infty f(\vartheta^2)\, d\vartheta = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^\infty \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\, d\vartheta$$ 1

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^\infty \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\, d\vartheta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

$$F(\vartheta) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1$$ 2

- السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H : نجدها باشتقاق تابع الكثافة $f(\vartheta^2) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}$ وإعدام المشتق كما يلي:

1

$$\frac{\partial\, f(\vartheta^2)}{\partial\vartheta} = 0 \;\Rightarrow\; 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\left(2\vartheta\, e^{-\alpha\vartheta^2} - 2\alpha\,\vartheta\,\vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; 2\vartheta\, e^{-\alpha\vartheta^2}(1 - \alpha\,\vartheta^2) = 0$$

الحلول الناتجة عندما $\vartheta\, e^{-\alpha\vartheta^2} = 0$ هي $\vartheta = \infty$ و $\vartheta = 0$ وهي غير مقبولة. 1

وعندما $1 - \alpha\,\vartheta^2 = 0$ نجد:

$$\vartheta_H = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$ 2

القيمة الوسطى للسرعة المطلقة $\overline{\vartheta}$:

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta = 1$ (واستخدام تكاملات بواسون)

$$\overline{\vartheta} = \int_0^\infty \vartheta\, f(\vartheta^2)\,d\vartheta = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty \vartheta^3\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta}_{1/2\alpha^2} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{2\alpha^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\vartheta_H \approx 1{,}13\,\vartheta_H$$

1 1 1 1 1

القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة $\overline{\vartheta^2}$:

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta = 1$ (واستخدام تكاملات بواسون)

$$\overline{\vartheta^2} = \int_0^\infty \vartheta^2\, f(\vartheta^2)\,d\vartheta = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty \vartheta^4\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta}_{\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} = \frac{3}{2}\frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2}\vartheta_H^2$$

1 1 1 1 1

التشتت

$$\overline{\Delta\vartheta^2} = \overline{\vartheta^2} - \overline{\vartheta}^2 = \frac{3}{2}\vartheta_H^2 - \frac{4}{\pi}\vartheta_H^2 = \frac{3\pi-8}{2\pi}\vartheta_H^2 \approx \frac{1{,}43}{6{,}28}\vartheta_H^2 \approx 0{,}228\,\vartheta_H^2$$

1 1 1 1 1

٢- يعطى عدد حالات التوزع الماكروي للجملة الكلاسيكية بالقانون التالي $N_o = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!}$ 3 5

وكما هو واضح فليس لدرجة التحلل أي دور في عدد حالات التوزع الماكروي، فالجملتان تملكان نفس العدد. 2

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الثاني للعام الدراسي 2023 - 2024

س١- أجب عن البنود التالية: (50 درجة).

١- تعطى الطاقة الكمومية لجسيم كتلته m يتحرك انسحابياً في بئر كمومي حجمه V بدلالة عدد الكم الرئيسي n بالعلاقة $\varepsilon_n = \dfrac{\pi^2 \hbar^2}{2mV^{2/3}} n^2$ ، والمطلوب: برهن أن عدد السويات $N(\varepsilon)$ يرتبط بدرجة التحلل $g(\varepsilon)$ وبعنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma(\varepsilon)$ بالشكل التالي: $dN(\varepsilon) = g(\varepsilon)\, d\varepsilon = C\, d\Gamma(\varepsilon)$ ، حيث $C = 1/h^3$. 15

٢- يتحرك جسيم كتلته m انسحابياً في عصابة طاقة طورية $d\Gamma(\varepsilon)$. والمطلوب: أوجد عدد الحالات الكوانتية (درجة التحلل $g(\varepsilon) = dN(\varepsilon)/d\varepsilon = C\, d\Gamma(\varepsilon)/d\varepsilon$ ومثلها بيانياً بدلالة ε، وذلك عندما تتم الحركة في الحالات التالية:
١- في الفراغ، ٢- على سطح، ٣- على مستقيم. 15

٣- جملة مكونة من عدد لانهائي من الجسيمات غير المتمايزة، موزعة على عدد لانهائي من السويات، طاقات هذه السويات بالشكل: $\varepsilon_n = n\varepsilon_o \quad ; n = 0,1,2,3,......$ ، ودرجات تحللها معطاة بالعلاقة: $g_n = n + 1$. والمطلوب: 20

١- أوجد تحاص الجملة Z.

٢- أوجد متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ في الحالات: $\varepsilon_o << KT$ و $\varepsilon_o = KT$ و $\varepsilon_o >> KT$.

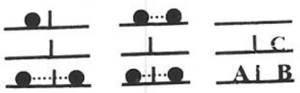
س٢- أجب عن البنود التالية: (40 درجة).

١- وضح بالرسم وقليل من الشرح سلوك البوزونات والفيرميونات، كلاً على حدة، في جملة مكونة من عدد من سويات الطاقة المتحللة عند درجة الصفر المطلق. 10

- ما هو اسم الحالة التي تخضع لها البوزونات عند درجة الصفر المطلق.
- عرف (مستلهماً من الشكل) سوية فيرمي، وحدد موقعها عليه عند درجة الصفر المطلق.

٢- أوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال $N_o(0{,}8\vartheta_H \rightarrow \vartheta_H)$.
علماً أن قيم تابع الخطأ الموافقة: $E_r(1) = 0{,}8427$ و $E_r(0{,}8) = 0{,}7421$ مع الرسم التوضيحي المناسب. 10

٣- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد حالتها الماكروية الأم ونوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها، واحسب وزنها الإحصائي. 20



مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الاثنين 1 / 7 / 2024

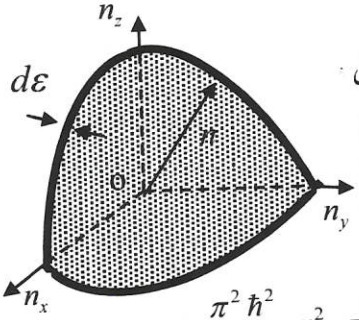
مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الثاني للعام الدراسي 2023 – 2024 (تسعون درجة)

ج ١: (50 درجة).

١- بما أن عدد الكم الرئيسي n موجب دوماً، حيث $n=\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}$ 15



فيكون عدد السويات $N(\varepsilon)$ المتوضعة في الحيز الموجب للمساقط $n_{x,y,z}$ الموضح بالشكل مساوياً لـ 1/8 العدد الكلي للسويات المتوضعة داخل فراغ الكرة (التي نصف قطرها n)

$$N(\varepsilon)=\frac{1}{8}(\frac{4}{3}\pi n^3) \qquad (*)$$

وبما أن صيغة العدد الكمي الرئيسي بدلالة السوية والحجم هي:

$$\varepsilon_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mV^{2/3}}n^2 \Rightarrow n^2=\frac{8m}{h^2}\varepsilon_n V^{2/3} \Rightarrow \quad n=\frac{2(2m)^{1/2}}{h}(\varepsilon_n)^{1/2}V^{1/3} \qquad (**)$$

5

للحصول على عدد السويات $N(\varepsilon)$ المتوضعة داخل الكرة (تابع توزع السويات داخل الكرة) نعوض (**) في (*) بعد إزالة الدليل n المتعلق بالسوية ε_n بالشكل التالي:

$$N(\varepsilon)=\frac{4}{3}\pi\frac{V}{h^3}(2m)^{3/2}(\varepsilon)^{3/2} \qquad (***)$$

وحيث أن تابع التوزع $N(\varepsilon)$ يعبر عن عدد السويات، فإن مفاضلته تعبر عن عدد السويات المتوضعة في المجال الطاقي $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$. لذا نفرض تابع كثافة التوزع $g(\varepsilon)$ (الذي يساوي مشتقة تابع التوزع بالنسبة لـ ε) كما يلي:

$$\frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon}=g(\varepsilon)=2\pi\frac{V}{h^3}(2m)^{3/2}(\varepsilon)^{1/2} \Leftrightarrow \quad dN(\varepsilon)=g(\varepsilon)d\varepsilon$$

5

نستنتج مما سبق أن تابع كثافة التوزع $g(\varepsilon)$ يعبر عن كثافة التنضد أو درجة التحلل لحالات الانتقال المسموحة، ويأخذ الشكل:

$$g(\varepsilon)=2\pi CV(2m)^{3/2}(\varepsilon)^{1/2} \qquad ; C=1/h^3$$

وبما أن صيغة عنصر فراغ الطاقة الطوري

$$d\Gamma(\varepsilon)=2\pi V(2m)^{3/2}(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$

نستنتج العلاقة المطلوبة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري.

$$dN(\varepsilon)=g(\varepsilon)d\varepsilon=C\,d\Gamma(\varepsilon)$$

5

٢-

١- الحركة في الفراغ: بداية نوجد عدد الحالات الكوانتية بدلالة الاندفاع 15

وذلك باعتبار $V=\int dq_V=\int dx\,dy\,dz$ و $dP_V=d(\frac{4}{3}\pi P^3)$ و $C=1/h^3$

$$dN(P)=g(P)dP=C\,d\Gamma(P)=\underbrace{C}_{1/h^3}\underbrace{dq_V}_{V=\int dx\,dy\,dz}\underbrace{dP_V}_{d(\frac{4}{3}\pi P^3)}=\frac{V}{h^3}d(\frac{4}{3}\pi P^3)=\frac{V}{h^3}4\pi P^2dP$$

وبالاستفادة من علاقة الطاقة بالاندفاع نوجد عدد الحالات الكوانتية بدلالة الطاقة.

$$P^2=2m\varepsilon \Rightarrow P=\sqrt{2m\varepsilon} \Rightarrow dP=\frac{m\,d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} \qquad (*)$$

$$dN(\varepsilon)=g(\varepsilon)d\varepsilon=C\,d\Gamma(\varepsilon))=4\pi\frac{V}{h^3}2m\varepsilon\frac{m\,d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}=4\pi\frac{V}{2h^3}\sqrt{2m\varepsilon}\,2m\,d\varepsilon=2\pi\frac{V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon \qquad (a)$$

$$\Rightarrow g(\varepsilon)=\frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\underbrace{2\pi\frac{V}{h^3}(2m)^{3/2}}_{Cte}\varepsilon^{1/2}=Cte\ \varepsilon^{1/2}$$

5

تمثل العلاقة (a) معادلة جزء من قطع مكافئ كما في الحالة A من الشكل

٢- الحركة على السطح: بداية نوجد عدد الحالات الكوانتية بدلالة الاندفاع

وذلك باعتبار $S=\int dq_V=\int dx\,dy$ و $dP_V=d(\pi P^2)$ و $C=1/h^2$

$$dN(P)=g(P)\,dP=C\,d\Gamma(P)=\underbrace{C}_{1/h^2}\ \underbrace{dq_V}_{S=\int dx dy}\ \underbrace{dP_V}_{d(\pi P^2)}=\frac{S}{h^2}d(\pi P^2)=\frac{S}{h^2}2\pi P\,dP$$

وبالاستفادة من (*) نوجد عدد الحالات الكوانتية بدلالة الطاقة.

$$dN(\varepsilon)=g(\varepsilon)\,d\varepsilon=C\,d\Gamma(\varepsilon))=\frac{S}{h^2}2\pi\sqrt{2m\varepsilon}\ \frac{m\,d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}=\frac{S}{h^2}2\pi m\,d\varepsilon \qquad \text{(b)}$$

$$\Rightarrow\ g(\varepsilon)=\frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\underbrace{\frac{S}{h^2}2\pi m}_{Cte}=Cte$$

5

تمثل العلاقة (b) معادلة مستقيم كما في الحالة B من الشكل

٣- الحركة على مستقيم: بداية نوجد عدد الحالات الكوانتية بدلالة الاندفاع

وذلك باعتبار $L=\int dq_V=\int dx$ و $dP_V=dP_x$ و $C=1/h$

$$dN(P)=g(P)\,dP=C\,d\Gamma(P)=\underbrace{C}_{1/h}\ \underbrace{dq_V}_{L=\int dx}\ \underbrace{dP_V}_{dP_x}=\frac{L}{h}dP_x$$

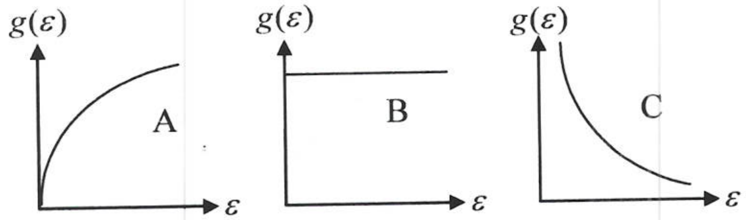
وبالاستفادة من (*) نوجد عدد الحالات الكوانتية بدلالة الطاقة.

$$dN(\varepsilon)=g(\varepsilon)\,d\varepsilon=C\,d\Gamma(\varepsilon))=\frac{L}{h}\underbrace{\frac{m\,d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}}_{dP_x}=\frac{L}{2h}\frac{2m\,d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}=\frac{L}{2h}\sqrt{2m}\,\varepsilon^{-1/2}\,d\varepsilon \qquad \text{(c)}$$

$$\Rightarrow\ g(\varepsilon)=\frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\underbrace{\frac{L}{2h}\sqrt{2m}}_{Cte}\ \varepsilon^{-1/2}=Cte\ \ \varepsilon^{-1/2}$$

5

تمثل العلاقة (c) معادلة فرع من قطع زائد كما في الحالة C من الشكل



٣- ١- نحسب Z من صيغة التجميع في المجال $[0\to\infty[$ كما يلي: 20

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty}g_n e^{\beta\varepsilon_n}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{n\beta\varepsilon_o}$$

نفرض $x=e^{\beta\varepsilon_o}<1$

لأن $e^{\beta\varepsilon_o}=e^{-\varepsilon_o/KT}=(1/e^{\varepsilon_o/KT})<1$ حيث يكون $e^{\varepsilon_o/KT}>1$ في الحالتين $\varepsilon_o>KT$ و $\varepsilon_o<KT$:

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n=1+2x+3x^2+4x^3+......$$

وبفرض $m=n+1$ يمكننا كتابة Z بدلالة مشتق سلسلة أخرى S_m كما يلي:

$$Z=\sum_{m=1}^{\infty}m\,x^{m-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d\,x^m}{dx}=\frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty}x^m=\frac{d}{dx}(1+x+x^2+x^3+......)=1+2x+3x^2+4x^3+......$$

وبإيجاد عبارة الحد العام للسلسلة الجديدة S_m (باعتبارها سلسلة هندسية أساسها $x=e^{\beta\varepsilon_o}<1$):

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + ... = 1\frac{1-x^{m+1}}{1-x} = \frac{1-0}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$Z = \frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)} = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = (1-e^{\beta\varepsilon_o})^{-2}$$ 6

٢- نوجد متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ من العلاقة: $\bar{\varepsilon} = \frac{\partial Ln Z}{\partial \beta}$

$$Ln Z = Ln(1-e^{\beta\varepsilon_o})^{-2} = -2\, Ln(1-e^{\beta\varepsilon_o})$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial Ln Z}{\partial \beta} = -2\frac{-\varepsilon_o e^{\beta\varepsilon_o}}{1-e^{\beta\varepsilon_o}} = \frac{2\varepsilon_o}{e^{-\beta\varepsilon_o}-1} = \frac{2\varepsilon_o}{e^{\varepsilon_o/KT}-1}$$ 5

من أجل $\varepsilon_o << KT$ ننشر التابع الأسي ونكتفي بالحدين الأول والثاني $e^{\varepsilon_o/KT} \approx 1 + \frac{\varepsilon_o}{KT}$ وبالتعويض نجد:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_o}{1+\frac{\varepsilon_o}{KT}-1} \approx 2\,KT$$ 3

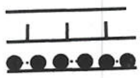
من أجل $\varepsilon_o = KT$ نجد: $\bar{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_o}{e-1} \approx 1{,}16\,KT \;\Rightarrow\; \bar{\varepsilon} > KT$ 3

من أجل $\varepsilon_o >> KT$ يصبح المقدار $e^{\varepsilon_o/KT} >> 1$ ويهمل الواحد الموجود في المقام فنجد: $\bar{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_o}{e^{\varepsilon_o/KT}} \approx 0$ 3

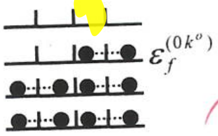
ج ٢: (40 درجة).

١: 10

- عند درجة الصفر المطلق تهبط كافة **البوزونات** الموزعة على سويات الطاقة العليا إلى السوية الدنيا وتخضع في هذه الحالة لتكاثف آينشتين، كما بالشكل.



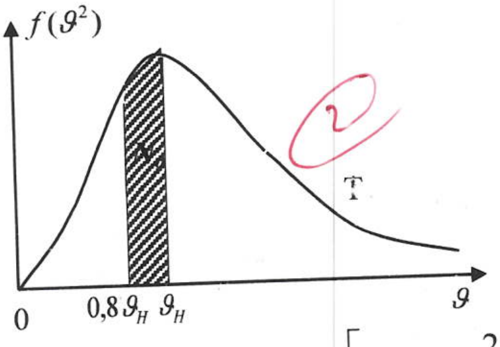
- عند درجة الصفر المطلق تهبط كافة **الفيرميونات** الموزعة على سويات الطاقة العليا إلى السويات الدنيا بحيث يحدث ملئ للحجرات بدءاً من السوية الدنيا بمعدل فيرميون واحد لكل حجرة. والسوية التي ينتهي عندها الملئ تدعى سوية فيرمي. وعليه نعرف ما يلي: 4



تعريف سوية فيرمي: هي أعلى سويات الطاقة المشغولة كلياً أو جزئياً بالفيرميونات (عند درجة الصفر المطلق)، حيث تكون السويات الدنيا $\varepsilon < \varepsilon_f$ مشغولة بالكامل (ممتلئة)، أما العليا $\varepsilon > \varepsilon_f$ فتكون فارغة تماماً. 2

٢- لدينا قانون عدد الجسيمات التي تنحصر سرعها في المجال $N_o(0 \to \vartheta_o)$ 10

$$N_o(0 \to \vartheta_o) = N\left[E_r(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}\right] \qquad (*)$$



نكتب المجال المطلوب بالشكل: 2

$$N_o(0{,}8\vartheta_H \to \vartheta_H) = N_o(0 \to \vartheta_H) - N_o(0 \to 0{,}8\vartheta_H)$$

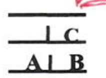
نستخدم (*) في التعبير عن قيمة كلٍ حد من المجال $N_o(0 \to 0{,}8\,\vartheta_H)$ و $N_o(0 \to \vartheta_H)$ كما يلي:

$$N_o(0{,}8\vartheta_H \to \vartheta_H) = N\left[E_r(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times 1 \times e^{-(1)^2}\right] - N\left[E_r(0{,}8) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times 0{,}8 \times e^{-(0{,}8)^2}\right]$$

$$= N[0{,}8427 - 0{,}4153] - N[0{,}7421 - 0{,}4758] = (42{,}74\% - 26{,}63\%)\,N = 16{,}11\%\,N$$ 8

٣-

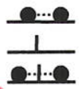
٢٥



الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$

الوزن الإحصائي $W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1,0)} = 3!\left(\frac{2^2}{2!}\,\frac{2^1}{1!}\,\frac{1^0}{0!}\right) = 24$

5

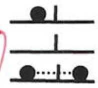


الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{2})$

الوزن الإحصائي

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(2,0,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(0+2-1)!}{0!\,1!}\,\frac{(2+1-1)!}{2!\,0!} = 3\times1\times1 = 3$$

5



الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(0+2-1)!}{0!\,1!}\,\frac{(1+2-1)!}{1!\,1!} = 3\times1\times2 = 6$$

5

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = \frac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\frac{2!}{0!\,(2-0)!}\,\frac{2!}{1!\,(2-1)!} = 1\times1\times2 = 2$$

5

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2023 - 2024

س1- أجب عن البنود التالية: (50 درجة).

1- استنتج عبارة **رقم الانشغال** $N_{i(B-E)_{\max}}$ لتوزع بوزة - آينشتين، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من N جسيم $(N>>1)$، موزعة على ثلاث سويات للطاقة، $\varepsilon_1=0\ \ (J)$ و $\varepsilon_2=KT\ \ (J)$ و $\varepsilon_3=2KT\ \ (J)$، السويات متحللة بالشكل $g_1=N$ و $g_2=g_3=1$. والمطلوب:

1- أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي (العدد فقط بدلالة N).

2- أوجد طاقة الحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1},\overbrace{1}^{\varepsilon_2},\overbrace{0}^{\varepsilon_3})$، ثم أوجد وزنها الإحصائي (بدلالة N). في الحالات التالية:
A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.
(بفرض $N=2$، احسب القيم الرقمية للأوزان الإحصائية للحالات السابقة (A,B,C)، ومثلها.)

3- بفرض أن الجسيمات متمايزة، أوجد أرقام انشغال حالة التوزع الماكروي الأكثر احتمال (N_1,N_2,N_3) بدلالة العدد N وتابع التحاص Z، وتحقق من ذلك (تحقق أن $N_1+N_2+N_3=N$). ما نوع التوزع الحاصل ؟.

4- إذا كانت الجسيمات بوزونات: ماذا يمكنك القول عن حالة ودرجة حرارة الجملة الواقعة بحالة التوزع الماكروي $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1},\overbrace{1}^{\varepsilon_2},\overbrace{0}^{\varepsilon_3})$، مثّل بالرسم هذه الحالة (لا تتقيد بدرجة التحلل المعطاة).

5- إذا كانت الجسيمات فيرميونات: والجملة متعددة سويات الطاقة ومتعددة التحلل وواقعة عند درجة الصفر المطلق، المطلوب: مثّل بالرسم شكلاً توضح عليه توضع الفيرميونات على السويات، ثم اعط تعريفاً واحداً لسوية فيرمي.

3- أوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال $N_o(\vartheta_H\to 1{,}6\ \vartheta_H)$.
علماً أن قيم تابع الخطأ الموافقة: $E_r(1)=0{,}8427$ و $E_r(1{,}6)=0{,}9763$

س2- أجب عن البنود التالية: (40 درجة).

1- استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل – بولتزمان (بدلالة الثابت $\alpha=m/2kT$).
ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

- أوجد قيمة السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H بدلالة α، ثم أوجد قيمة السرعتين $\overline{\vartheta}$ و $\overline{\vartheta^2}$ والتشتت $\overline{\Delta\vartheta^2}$ بدلالة ϑ_H.

توجيه: استفد في الحل من تكاملات بواسون التالية

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2}dx=\begin{cases}\dfrac{n!}{\frac{n}{2}!\,2^{n+1}}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha^{n+1}}} & ;\ n\ (\text{زوجي})\ \wp\ n\geq 0\\[2ex] \dfrac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ;\ n\ (\text{فردي})\ \wp\ n=2m+1\ \wp\ m\geq 0\end{cases}$$

2- جملتان تمتلكان نفس العدد من السويات والجسيمات الكلاسيكية، فإذا علمت أن سويات الجملة الأولى متحللة والثانية غير متحللة، والسؤال: أي الجملتين يمتلك أكبر عدد لحالات التوزع الماكروي الإجمالي.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الاثنين 19/ 2/ 2024

مدرس المقرر د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2023 – 2024 (تسعون درجة)

ج 1: (50 درجة).

1- استنتاج رقم الانشغال لتوزع $N_{\underset{\max}{i(B-E)}}$ 15

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (B-E). المعطاة بالعلاقة: $W_{B-E}=\prod_i \frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}$

وحيث أن الجسيمات هي بوزونات (كمية) فيكون عددها N_i ودرجة تحلل سويات الطاقة g_i كبيرين، لذا يُهمل الواحد في توزع (B-E) وتصبح عبارة الوزن الإحصائي بالشكل التالي: $W_{B-E}\approx\prod_i \frac{(N_i+g_i)!}{N_i!\,g_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{B-E})$ ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{B-E})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d\,Ln(W_{B-E})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{B-E})\approx Ln\prod_i \frac{(N_i+g_i)!}{N_i!\,g_i!}=\sum_i\left[Ln(N_i+g_i)!-Ln\,N_i!-Ln\,g_i!\right]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنغ $Ln\,x!\approx x\,Ln\,x$ نجد:

$$Ln(W_{B-E})\approx\sum_i\left[(N_i+g_i)\,Ln(N_i+g_i)-N_i\,Ln\,N_i-g_i\,Ln\,g_i\right]$$

بما أن W_{B-E} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d\,Ln(W_{B-E})=\frac{\partial\,Ln(W_{B-E})}{\partial N_i}dN_i\approx\frac{\partial}{\partial N_i}\sum_i\left[(N_i+g_i)\,Ln(N_i+g_i)-N_i\,Ln\,N_i-g_i\,Ln\,g_i\right]dN_i$$

$$\approx\sum_i\left[Ln(N_i+g_i)+\frac{N_i+g_i}{N_i+g_i}-Ln\,N_i-\frac{N_i}{N_i}\right]dN_i=\sum_i\left[Ln(N_i+g_i)-Ln\,N_i\right]dN_i$$

$$d\,Ln(W_{B-E})\approx\sum_i Ln\frac{N_i+g_i}{N_i}dN_i$$

10

بالتعويض في (1) نجد، مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$N=\sum_i N_i\ \Rightarrow\ dN=\sum_i dN_i \qquad \text{و} \qquad U=\sum_i\varepsilon_i N_i\ \Rightarrow\ dU=\sum_i\varepsilon_i\,dN_i$$

$$d\,Ln(W_{B-E})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0$$

$$\sum_i\left(Ln\frac{N_i+g_i}{N_i}+\alpha+\beta\varepsilon_i\right)dN_i=0\ \Rightarrow\ Ln\frac{N_i+g_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\varepsilon_i)\ \Rightarrow\ \frac{N_i+g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}-1\ \Rightarrow\ \boxed{N_{\underset{\max}{i(B-E)}}=\frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}-1}}$$

5

2- المسألة: 30

1- عدد حالات التوزع الماكروي:

$$N_o=\frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!}=\frac{(N+3-1)!}{N!\,(3-1)!}=\frac{(N+2)!}{2\,N!}=\frac{(N+2)(N+1)\,N!}{2\,N!}=\frac{(N+2)(N+1)}{2}$$

3

2- طاقة الحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1},\overbrace{1}^{\varepsilon_2},\overbrace{0}^{\varepsilon_3})$ نجدها من العلاقة

$$U_{(N-1,1,0)}=\sum_i N_i\,\varepsilon_i=(N-1)\times 0+1\times KT+0\times 2KT=KT$$

1

الأوزان الإحصائية:

A - الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(N-1,1,0)}=N!\left(\frac{N^{N-1}}{(N-1)!}\frac{1^1}{1!}\frac{1^0}{0!}\right)=N\,N^{N-1}=N^N$$ 3

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\Rightarrow W_{(N-1,1,0)}=\frac{(N-1+N-1)!}{(N-1)!\,(N-1)!}\frac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)!}\frac{(0+1-1)!}{0!\,(1-1)!}=\frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}$$ 3

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1},\overbrace{1}^{\varepsilon_2},\overbrace{0}^{\varepsilon_3})$ تحقق الشرط $g_i\ge N_i$ فهي مقبولة

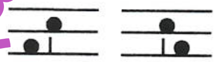
$$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}\Rightarrow W_{(N-1,1,0)}=\frac{N!}{(N-1)!\,(N-N+1)!}\frac{1!}{1!\,(1-1)!}\frac{1!}{0!\,(1-0)!}=N$$ 3

الحسابات الرقمية والتمثيل: الحالة المطلوبة هي $(\overbrace{1}^{\varepsilon_1},\overbrace{1}^{\varepsilon_2},\overbrace{0}^{\varepsilon_3})$ و $g_1=2$ و $g_2=g_3=1$

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية): $W_{M-B}=N^N=2^2=4$

B- الجسيمات بوزونات: $W_{B-E}=\frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}=\frac{2!}{1}=2$

C- الجسيمات فيرميونات: $W_{F-D}=N=2$



6

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية، نوجد تحاص الجملة z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z=\sum_i g_i e^{\beta\varepsilon_i}=\sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT}=Ne^{-0}+1e^{-1}+1e^{-2}=N+e^{-1}+e^{-2}$$

نوجد رقم انشغال السويات في الحالة الأكثر احتمال من مكسويل

$$N_i=g_ie^{\alpha+\beta\varepsilon_i}=e^{\alpha}g_ie^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}=\frac{N}{Z}g_ie^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}$$

فيكون: $N_1=\frac{N}{Z}Ne^{-0}=\frac{N^2}{Z}$ و $N_2=\frac{N}{Z}1e^{-1}=\frac{N}{Z}e^{-1}$ و $N_3=\frac{N}{Z}1e^{-2}=\frac{N}{Z}e^{-2}$.

ويمكن التحقق من ذلك بالجمع

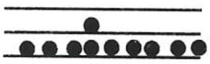
$$N_1+N_2+N_3=\frac{N^2}{Z}+\frac{N}{Z}e^{-1}+\frac{N}{Z}e^{-2}=\frac{N}{Z}(N+e^{-1}+e^{-2})=\frac{N}{Z}Z=N$$ 5

لإيجاد نوع التوزع الحاصل (في الحالة الأكثر احتمال) نوجد نسب أرقام الانشغال

$\frac{N_1}{N_2}=Ne>1\Rightarrow N_1>N_2$ و $\frac{N_2}{N_3}=\frac{e^{-1}}{e^{-2}}=e>1\Rightarrow N_2>N_3$ و $\frac{N_1}{N_3}=Ne^2>1\Rightarrow N_1>N_3$

نستنتج أن: $N_1>N_2>N_3$ فالتوزع طبيعي.

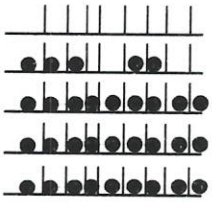
4- عندما تكون الجسيمات بوزونات: فتكون الجملة الواقعة وفق التوزع الماكروي $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1},\overbrace{1}^{\varepsilon_2},\overbrace{0}^{\varepsilon_3})$ بحالة تكاثف، ودرجة حرارتها هي درجة آينشتين



2

5- عندما تكون الجسيمات فيرميونات: تتوضع الفيرميونات عند درجة الصفر المطلق على كافة السويات الدنيا بمعدل فيرميون واحد لكل درجة تحلل.

- تكون كافة السويات الأدنى من سوية فيرمي $f(\varepsilon)$ مملوءة (مشغولة) بمعدل فيرميون واحد لكل درجة تحلل والسويات الأعلى فارغة تماماً.
- سوية فيرمي هي أعلى سويات الطاقة المشغولة كلياً أو جزئياً بالفيرميونات



4

3- نكتب المجال المطلوب بالشكل:

$$N_o(\vartheta_H\to1{,}6\,\vartheta_H)=N_o(0\to1{,}6\,\vartheta_H)-N_o(0\to\vartheta_H)$$

نستخدم (*) في التعبير عن قيمة كلٍ من $N_o(0\to1{,}6\,\vartheta_H)$ و $N_o(0\to\vartheta_H)$ كما يلي:

15

$$N_o(\vartheta_H \to 1{,}6\,\vartheta_H) = N\left[E_r(1{,}6) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}1{,}6\,e^{-(1{,}6)^2}\right] - N\left[E_r(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}1\,e^{-(1)^2}\right]$$

$$N_o(\vartheta_H \to 1{,}6\,\vartheta_H) = N\left[E_r(1{,}6) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1{,}6}{e^{(1{,}6)^2}} - E_r(1) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{e}\right]$$

5

وبإجراء الحسابات والتعويض عن $E_r(1{,}6)$ و $E_r(1)$ بقيمتيهما من جدول الخطأ نجد:

$$N_o(\vartheta_H \to 1{,}6\,\vartheta_H) = N[0{,}9763 - 0{,}1396 - 0{,}8427 + 0{,}4151] = 0{,}4091\,N = 40{,}91\,\%\,N$$

ج 2: (40 درجة).

1: لإيجاد تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان: 35

ننطلق من العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعها المطلقة وفق توزع M-B في مجال السرعات $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$.

$$dN(\vartheta) = \frac{N}{Z}e^{\beta m \vartheta^2/2}\,g(\vartheta)\,d\vartheta$$

ونعوض عن المقدار $g(\vartheta)\,d\vartheta$ بقيمتة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري

$$g(\vartheta)\,d\vartheta = C\,d\Gamma(\vartheta) = CV\,4\pi\,m^3\,\vartheta^2\,d\vartheta$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z = CV\,(2\pi\,m\,KT)^{3/2}$ ، وعن الطاقة $\varepsilon = m\vartheta^2/2$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(\vartheta) = \frac{N}{CV\,(2\pi\,m\,KT)^{3/2}}e^{-m\vartheta^2/2KT}\,CV\,4\pi\,m^3\,\vartheta^2\,d\vartheta$$

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(\vartheta) = 4\pi\,N\left(\frac{m}{2\pi\,KT}\right)^{3/2}\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta$$

نعتبر أن $\boxed{\alpha = m/2KT}$

$$dN(\vartheta) = 4\pi\,N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta$$

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع السرع بدلالة تابع كثافة السرع كما يلي:

$$dF(\vartheta) = \frac{dN(\vartheta)}{N} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta = f(\vartheta^2)\,d\vartheta$$

حيث يعبر $f(\vartheta^2)$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

$$f(\vartheta^2) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}$$

6

للبرهان على أن $f(\vartheta^2)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على السرعة في المجال $]0 \to \infty[$.

$$\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty \vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^\infty \vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

$$F(\vartheta) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1$$

6

• السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H : نجدها باشتقاق تابع الكثافة $f(\vartheta^2)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}$ وإعدام المشتق كما يلي:

$$\frac{\partial f(\vartheta^2)}{\partial\vartheta}=0 \Rightarrow 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\left(2\vartheta\, e^{-\alpha\vartheta^2}-2\alpha\,\vartheta\,\vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\right)=0 \Rightarrow 2\vartheta\, e^{-\alpha\vartheta^2}(1-\alpha\,\vartheta^2)=0$$

الحلول الناتجة عندما $\vartheta\, e^{-\alpha\vartheta^2}=0$ هي $\vartheta=\infty$ و $\vartheta=0$ وهي غير مقبولة.

وعندما $1-\alpha\,\vartheta^2=0$ نجد:

$$\vartheta_H=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

6

<u>القيمة الوسطى للسرعة المطلقة</u> $\overline{\vartheta}$:

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta=1$ (واستخدام تكاملات بواسون)

$$\overline{\vartheta}=\int_0^\infty \vartheta\, f(\vartheta^2)\,d\vartheta=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty \vartheta^3 e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta}_{1/2\alpha^2}=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{2\alpha^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\vartheta_H\approx 1{,}13\,\vartheta_H$$

6

<u>القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة</u> $\overline{\vartheta^2}$:

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta=1$ (واستخدام تكاملات بواسون)

$$\overline{\vartheta^2}=\int_0^\infty \vartheta^2 f(\vartheta^2)\,d\vartheta=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty \vartheta^4\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta}_{\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}}=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}=\frac{3}{2}\frac{1}{\alpha}=\frac{3}{2}\vartheta_H^2$$

6

<u>التشتت</u>

$$\overline{\Delta\vartheta^2}=\overline{\vartheta^2}-\overline{\vartheta}^2=\frac{3}{2}\vartheta_H^2-\frac{4}{\pi}\vartheta_H^2=\frac{3\pi-8}{2\pi}\vartheta_H^2\approx\frac{1{,}43}{6{,}28}\vartheta_H^2\approx 0{,}228\,\vartheta_H^2$$

5

2- يعطى عدد حالات التوزع الماكروي للجملة الكلاسيكية بالقانون التالي $N_o=\frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!}$ 5

وكما هو واضح فليس لدرجة التحلل أي دور في عدد حالات التوزع الماكروي، فالجملتان تملكان نفس العدد.

5

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2022 - 2023

س١- أجب عن البنود التالية: (55 درجة).

15

١- بفرض أن تابع كثافة السرعة المطلقة لتوزع $M\text{-}B$ في المجال $]0 \to \infty[$ هو $f(\vartheta^2) = 4\pi\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2}$

- أوجد قيمة السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H بدلالة α، ثم أوجد قيمة السرعتين $\overline{\vartheta}$ و $\overline{\vartheta^2}$ والتشتت $\overline{\Delta\vartheta^2}$ بدلالة ϑ_H.
- ارسم الخط البياني لتابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ عند درجة حرارة محددة T، وحدد عليه كل من ϑ_H و $\overline{\vartheta}$ و $\sqrt{\overline{\vartheta^2}}$.

توجيه: استفد في الحل من تكاملات بواسون التالية

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} \dfrac{n!}{\frac{n}{2}!\, 2^{n+1}}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha^{n+1}}} & ; n\ (\text{زوجي}) \quad \wp \quad n \geq 0 \\ \dfrac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ; n\ (\text{فردي}) \quad \wp \quad n = 2m+1 \quad \wp \quad m \geq 0 \end{cases}$$

20

٢- مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة $\varepsilon_1 = KT\ \ (J)$ و $\varepsilon_2 = 2KT\ \ (J)$ و $\varepsilon_3 = 3KT\ \ (J)$، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_2 = 2$ و $g_3 = 1$. والمطلوب:

١- ارسم هيكل السويات والتحللات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي.

٢- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N_3}})_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$، ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0{,}368$ و $e^{-2} = 0{,}135$ و $e^{-3} = 0{,}05$).

20

٣- استفد من صيغتي تابع التحاص $Z = \sum_i g_i e^{\beta\varepsilon_i}$ وتابع الكثافة الاحتمالي $P_i = \dfrac{g_i}{Z} e^{\beta\varepsilon_i}$ في إيجاد ما يلي:

أ- القيمة الوسطى $\overline{\varepsilon}$، والانحراف المعياري $\overline{\varepsilon^2}$، والتشتت $\overline{\Delta\varepsilon^2}$، بدلالة تابع التحاص Z والمشتقة $\partial/\partial\beta$.

ب- صيغة طاقة الجملة بدلالة المشتقة $\partial/\partial T$.

س٢- أجب عن البندين التاليين: (35 درجة).

20

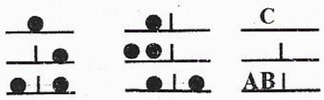
١- إذا علمت أن الطاقة الداخلية لغاز البوزون عند درجات حرارة تفوق درجة التكاثف $T > T_B$ هي ذاتها الطاقة الداخلية لغاز مكسويل الكلاسيكي $U_{\max} = \dfrac{3}{2}NKT = U_{Clas}$.

وعند الدرجات الأقل $T \leq T_B$ تأخذ الصيغة $U_{\min} \approx 0{,}77\, NKT\left(\dfrac{T}{T_B}\right)^{3/2}$. والمطلوب:

- أوجد السعات الحرارية $C_{V\max}$ و $C_{V\min}$ لمجالي الحرارة، وارسم الخط البياني لتحولات C_V بدلالة T مع الشرح.
- برهن أن الأنتروبية تعطى وفق الصيغة $S = \int_0^T C_V \dfrac{dT}{T}$، ثم أوجد قيمتها عند الطاقات العالية والمنخفضة.

15

٢- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد حالتها الماكروية الأم ونوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها، واحسب وزنها الإحصائي.



مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الخميس 14/9/2023

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2022 – 2023 (تسعون درجة)

ج ١: (55 درجة).

١:

15

- <u>السرعة الأكثر احتمالاً</u> ϑ_H : نجدها باشتقاق تابع الكثافة $f(\vartheta^2)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}$ وإعدام المشتق كما يلي:

$$\frac{\partial f(\vartheta^2)}{\partial\vartheta}=0 \Rightarrow 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\left(2\vartheta\,e^{-\alpha\vartheta^2}-2\alpha\,\vartheta\,\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\right)=0 \;\Rightarrow\; 2\vartheta\,e^{-\alpha\vartheta^2}(1-\alpha\,\vartheta^2)=0$$

2

الحلول الناتجة عندما $\vartheta\,e^{-\alpha\vartheta^2}=0$ هي $\vartheta=\infty$ و $\vartheta=0$ وهي غير مقبولة.

وعندما $1-\alpha\,\vartheta^2=0$ نجد: $\vartheta_H=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$

<u>القيمة الوسطى للسرعة المطلقة</u> $\bar{\vartheta}$:

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta=1$ (واستخدام تكاملات بواسون)

$$\bar{\vartheta}=\int_0^\infty \vartheta\,f(\vartheta^2)\,d\vartheta=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty \vartheta^3\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta}_{1/2\alpha^2}=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{2\alpha^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\vartheta_H\approx 1{,}13\,\vartheta_H$$

4

<u>القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة</u> $\overline{\vartheta^2}$:

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta=1$ (واستخدام تكاملات بواسون)

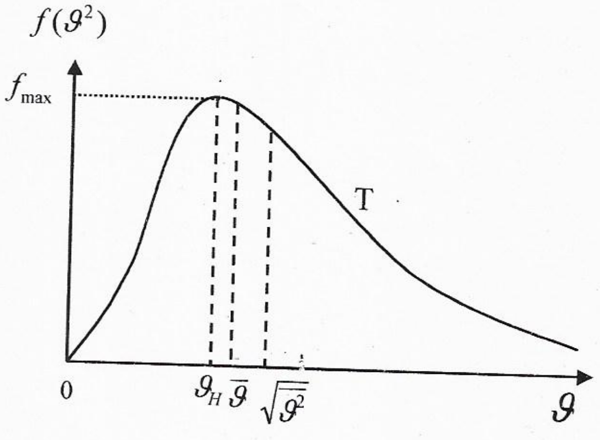
$$\overline{\vartheta^2}=\int_0^\infty \vartheta^2\,f(\vartheta^2)\,d\vartheta=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty \vartheta^4\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta}_{\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}}=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}=\frac{3}{2}\frac{1}{\alpha}=\frac{3}{2}\vartheta_H^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{\overline{\vartheta^2}}\approx 1{,}22\,\vartheta_H$$

4

<u>التشتت</u> $\overline{\Delta\vartheta^2}$:

$$\overline{\Delta\vartheta^2}=\overline{\vartheta^2}-\bar{\vartheta}^2=\frac{3}{2}\vartheta_H^2-\frac{4}{\pi}\vartheta_H^2$$
$$=\frac{3\pi-8}{2\pi}\vartheta_H^2\approx\frac{1{,}43}{6{,}28}\vartheta_H^2\approx 0{,}228\,\vartheta_H^2$$

4



- الخط البياني لتابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ عند درجة حرارة محددة T

1

٢ـ المسألة:

20

١ـ عدد حالات التوزع الماكروي:

ε_3, ε_2, ε_1

$$N_o=\frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!}=\frac{(1000+3-1)!}{1000\,!\,(3-1)!}=\frac{1002\,!}{1000\,!\times 2\,!}=\frac{1002\times1001\times1000!}{1000\,!\times 2\,!}=501501$$

5

٢ـ نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overbrace{N_1}^{\varepsilon_1},\overbrace{N_2}^{\varepsilon_2},\overbrace{N_3}^{\varepsilon_3})_{max}$ من العبارة

$$N_i=\frac{N}{Z}g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT}\quad ;\; Z=\sum_i g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT}=2e^{-1}+2e^{-2}+e^{-3}=1{,}056$$

3

$$N_1=\frac{N}{Z}g_1\,e^{-\varepsilon_1/KT}=\frac{1000}{1{,}056}2\,e^{-1}\approx 697$$

3

$$N_2=\frac{N}{Z}g_2\,e^{-\varepsilon_2/KT}=\frac{1000}{1,056}2\,e^{-2}\approx 256$$ (3)

$$N_3=\frac{N}{Z}g_3\,e^{-\varepsilon_3/KT}=\frac{1000}{1,056}\,e^{-3}\approx 47$$ (3)

التحقق: $N=N_1+N_2+N_3=697+256+47=1000$ (1)

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}=\sum_i N_i\,\varepsilon_i=N_1\,\varepsilon_1+N_2\,\varepsilon_2+N_3\,\varepsilon_3=697KT+256\times 2KT+47\times 3KT=1350\,KT$$ (2)

٣- أ- نحسب القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}$ من العلاقة (20)

$$\bar{\varepsilon}=\sum_i \varepsilon_i P_i=\frac{1}{Z}\sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta\varepsilon_i}$$

بما أن $\frac{\partial Z}{\partial\beta}=\sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta\varepsilon_i}$ نجد بالتعويض $\bar{\varepsilon}=\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}=\frac{\partial Z/Z}{\partial\beta}=\frac{\partial Ln Z}{\partial\beta}$ (5)

$$\overline{\varepsilon^2}=\sum_i \varepsilon_i^2 P_i=\frac{1}{Z}\sum_i \varepsilon_i^2 g_i e^{\beta\varepsilon_i}$$ (5)

بما أن $\frac{\partial Z}{\partial\beta}=\sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta\varepsilon_i}$ يكون $\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2}=\sum_i \varepsilon_i^2 g_i e^{\beta\varepsilon_i}$ نجد بالتعويض $\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2}$

$$\overline{\Delta\varepsilon^2}=\overline{\varepsilon^2}-\bar{\varepsilon}^2=\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2}-\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2$$

$$=\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial Z}{\partial\beta}-\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2$$

$$=\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{Z^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)\frac{\partial Z}{\partial\beta}-\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2$$

$$=\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial Z/Z}{\partial\beta}\right)+\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2-\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2=\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial Ln Z}{\partial\beta}\right)=\frac{\partial^2 Ln Z}{\partial\beta^2}$$ (5)

ب- إيجاد صيغة طاقة الجملة بدلالة المشتقة $\partial/\partial T$.

وجدنا أن $\bar{\varepsilon}=\frac{\partial Ln Z}{\partial\beta}$ وبالاستفادة من العلاقة بين المشتقات $\frac{\partial}{\partial\beta}=KT^2\frac{\partial}{\partial T}$

ومن علاقة الطاقة الداخلية $U=N\bar{\varepsilon}$ نجد

$$U=N\bar{\varepsilon}=N\left(\frac{\partial Ln Z}{\partial\beta}\right)_V=NKT^2\frac{\partial Ln Z}{\partial T}$$ (5)

ج ٢: (35 درجة).

١: (20)

- **حساب الحرارة النوعية (السعة الحرارية):**

- من أجل $\boxed{T>T_B}$: تتوافق السعة الحرارية للبوزونات مع السعة الحرارية للغاز الكلاسيكي

$$\boxed{C_{V\max}=\left(\frac{\partial U_{\max}}{\partial T}\right)_V=\frac{3}{2}NK=C_{V\,Clas}}$$ (3)

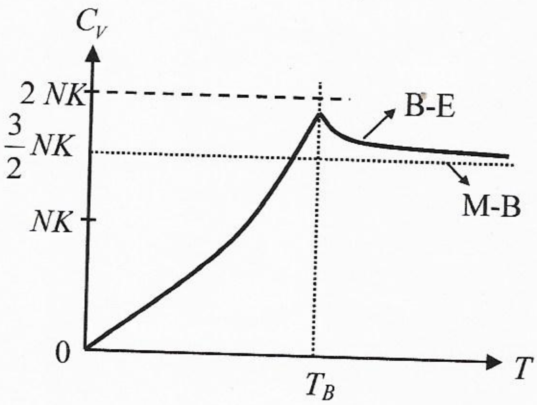
نلاحظ هنا أنه عند الطاقات العالية تكون $C_{V\max}$ غير تابعة لدرجة الحرارة T.

- من أجل $\boxed{T\le T_B}$:

$$C_{V\min}=\left(\frac{\partial U_{\min}}{\partial T}\right)_V\approx\frac{5}{2}\,0,77\,NKT_B^{-3/2}\,T^{3/2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{C_{V\min}=1,92\,NK\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}}$$ (3)

نلاحظ هنا أنه عند الطاقات المنخفضة تكون $C_{V\,min}$ تابعة لتغيرات درجة الحرارة T .

يوضح الشكل تمثيل $C_{V\,min}$ (السعة الحرارية لغاز البوزون عند الطاقات المختلفة)



- عند الطاقات المنخفضة: أي في المجال الواقع بجوار T_B

نلاحظ أن $C_V = 0$ عندما $T = 0k^o$، وتزداد بازدياد T بشكل يتناسب طرداً مع $T^{3/2}$ إلى أن تصل لقيمتها القصوى $C_V = 1{,}92\,NK$ عندما $T = T_B$. 2

- وعند الطاقات العالية: أي عندما $T > T_B$ تنخفض قيمة C_V بازدياد T لتأخذ قيمة ثابتة $C_V = \frac{3}{2}NK$، كما هو الحال في الغاز الكلاسيكي الخاضع لتوزع M-B . 2

- **برهان صيغة الانتروبية:**

من المبدأ الأول في الترموديناميك يكون $\delta Q = dU$ ونحسب الأنتروبية من عبارة كلاوزيوس كما يلي:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} = C_V \frac{dT}{T} \qquad ; dU = C_V dT$$

2

وبالمكاملة نحصل على صيغة الأنتروبية $S = \int_0^T C_V \frac{dT}{T}$

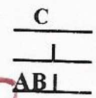
حساب الانتروبية:

- عند الطاقات العليا: $S_{max} = \int_0^T C_{V\,max} \frac{dT}{T} = \frac{3}{2} NK\,LnT$ 4

- عند الطاقات المنخفضة: $S_{min} = \int_0^T C_{V\,min} \frac{dT}{T}$ 4

$$S_{min} = \int_0^T 1{,}92\,NK\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} \frac{dT}{T} = 1{,}92\,NK\,T_B^{-3/2} \int_0^T T^{1/2} dT = 1{,}92\,NK\,T_B^{-3/2}\,\frac{2}{3} T^{3/2} = 1{,}28\,NK\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}$$

-٢ 15



الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

الوزن الإحصائي $W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^{3} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = 3!\left(\frac{2^2}{2!}\,\frac{2^0}{0!}\,\frac{1^1}{1!}\right) = 12$ 4

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

الوزن الإحصائي

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3} \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(1+2-1)!}{1!\,1!} = 3 \times 3 \times 2 = 18$$ 4

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3} \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,1,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(1+2-1)!}{1!\,1!}\,\frac{(1+1-1)!}{1!\,0!} = 3 \times 2 \times 1 = 6$$ 4

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{3} \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,1,1)} = \frac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\frac{2!}{1!\,(2-1)!}\,\frac{1!}{1!\,(1-1)!} = 1 \times 2 \times 1 = 2$$ 3

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية
السنة الثالثة فيزياء / الفصل الثاني للعام الدراسي 2022 - 2023

س1- أجب عن البنود التالية: (55 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{i(M-B)_{\max}}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من N جسيم $(N>>1)$، موزعة على ثلاث سويات للطاقة، $\varepsilon_1=0\ \ (J)$ و $\varepsilon_2=KT\ \ (J)$ و $\varepsilon_3=2KT\ \ (J)$، السويات متحللة بالشكل $g_1=N$ و $g_2=g_3=1$. والمطلوب:

1- أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي (العدد فقط بدلالة N).

2- أوجد طاقة الحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1},\overbrace{1}^{\varepsilon_2},\overbrace{0}^{\varepsilon_3})$، ثم أوجد وزنها الإحصائي (بدلالة N). في الحالات التالية:
A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.
(بفرض $N=2$، احسب القيم الرقمية للأوزان الإحصائية للحالات السابقة (A,B,C)، ومثلها.)

3- بفرض أن الجسيمات متمايزة، أوجد أرقام انشغال حالة التوزع الماكروي الأكثر احتمال (N_1,N_2,N_3) بدلالة العدد N وتابع التحاصل Z، وتحقق من ذلك (تحقق أن $N_1+N_2+N_3=N$). ما نوع التوزع الحاصل ؟.

4- إذا كانت الجسيمات بوزونات: ماذا يمكنك القول عن حالة ودرجة حرارة الجملة الواقعة بحالة التوزع الماكروي $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1},\overbrace{1}^{\varepsilon_2},\overbrace{0}^{\varepsilon_3})$، مثِّل بالرسم هذه الحالة (لا تتقيد بدرجة التحلل المعطاة).

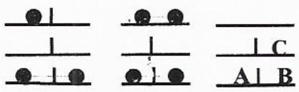
5- إذا كانت الجسيمات فيرميونات: والجملة متعددة سويات الطاقة ومتعددة التحلل وواقعة عند درجة الصفر المطلق، المطلوب: مثِّل بالرسم شكلاً توضح عليه توضع الفيرميونات على السويات، ثم اعط تعريفاً واحداً لسوية فيرمي.

3- استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل – بولتزمان (بدلالة الثابت $\alpha=m/2kT$).
ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استفد في الحل من تكاملات بواسون التالية (بحالة n زوجي)
$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2}dx=\frac{n!}{\frac{n}{2}!\,2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}}$$

س2- أجب عن النقاط الثلاث التالية: (35 درجة)

- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد حالتها الماكروية الأم ونوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها، واحسب وزنها الإحصائي.



- اكتب العبارة العامة لأرقام انشغال مكسويل وبوزة وفيرمي، ومثّل بيانياً المشغولية عند الطاقات العالية والمنخفضة.
- استنتج عبارة تحاصل الغاز الفونوني Z في الأجسام الصلبة وفقاً لتفسير آينشتين.

علماً أن: سويات طاقة الفونونات $\varepsilon_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ وهي غير متحللة، ودرجة آينشتين $\theta_E=\hbar\omega/K$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الاثنين 10/ 7/ 2023

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية

السنة الثالثة فيزياء الفصل الثاني للعام الدراسي 2022 – 2023 (تسعون درجة)

ج 1: (55 درجة).

1- استنتاج رقم الانشغال لتوزع $N_{\underset{\max}{i(M-B)}}$ 20

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B}=N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$، ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{M-B})$، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B})+\alpha\, dN+\beta\, dU=0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{M-B})=Ln\,N!+\sum_i\left[N_i\,Ln\,g_i-Ln\,N_i!\right]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $Ln\,x!\approx x\,Ln\,x-x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B})\approx N\,Ln\,N-N+\sum_i(N_i\,Ln\,g_i-N_i\,Ln\,N_i+N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B})=\frac{\partial\,Ln(W_{M-B})}{\partial N_i}dN_i\approx\frac{\partial}{\partial N_i}\left[N\,Ln\,N-N+\sum_i(N_i\,Ln\,g_i-N_i\,Ln\,N_i+N_i)\right]dN_i \qquad (*)$$

$$\approx 0-0+\sum_i(Ln\,g_i-Ln\,N_i-1+1)\,dN_i=\sum_i Ln\frac{g_i}{N_i}dN_i$$ 12

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات و الطاقة التاليين:

$$N=\sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN=\sum_i dN_i \quad \text{و} \quad U=\sum_i \varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU=\sum_i \varepsilon_i\, dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln\frac{g_i}{N_i}dN_i+\alpha\sum_i dN_i+\beta\sum_i\varepsilon_i\, dN_i=0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i\left(Ln\frac{g_i}{N_i}+\alpha+\beta\,\varepsilon_i\right)dN_i=0\;\Rightarrow\; Ln\frac{g_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\,\varepsilon_i)\;\Rightarrow\;\frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\,\varepsilon_i)}$$

$$\boxed{N_{i(M-B)}=g_i\,e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}}\;\Leftrightarrow\;\boxed{N_{i(M-B)}=e^{\alpha}\,g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}}$$ 8

2- المسألة: 20

1- عدد حالات التوزع الماكروي:

$$N_o=\frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!}=\frac{(N+3-1)!}{N!\,(3-1)!}=\frac{(N+2)!}{2\,N!}=\frac{(N+2)(N+1)N!}{2\,N!}=\frac{(N+2)(N+1)}{2}$$ 2

2- طاقة الحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N-1}},\overset{\varepsilon_2}{1},\overset{\varepsilon_3}{0})$ نجدها من العلاقة

$$U_{(N-1,1,0)}=\sum_i N_i\,\varepsilon_i=(N-1)\times 0+1\times KT+0\times 2KT=KT$$ 1

الأوزان الإحصائية:

A - الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(N-1,1,0)}=N!\left(\frac{N^{N-1}}{(N-1)!}\,\frac{1^1}{1!}\,\frac{1^0}{0!}\right)=N\,N^{N-1}=N^N$$ 2

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)\,!}\ \Rightarrow\ W_{(N-1,1,0)}=\frac{(N-1+N-1)!}{(N-1)!\,(N-1)\,!}\,\frac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)\,!}\,\frac{(0+1-1)!}{0!\,(1-1)\,!}=\frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}$$ 2

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1},\overset{\varepsilon_2}{1},\overset{\varepsilon_3}{0})$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي مقبولة

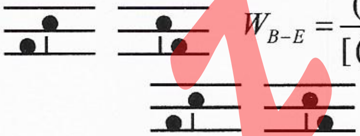
$$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i\,!}{N_i\,!\,(g_i-N_i)\,!}\ \Rightarrow\ W_{(N-1,1,0)}=\frac{N!}{(N-1)\,!\,(N-N+1)\,!}\,\frac{1\,!}{1!\,(1-1)\,!}\,\frac{1\,!}{0!\,(1-0)\,!}=N$$ 2

الحسابات الرقمية والتمثيل: الحالة المطلوبة هي $(\overset{\varepsilon_1}{1},\overset{\varepsilon_2}{1},\overset{\varepsilon_3}{0})$ و $g_1=2$ و $g_2=g_3=1$

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية): $W_{M-B}=N^N=2^2=4$

B- الجسيمات بوزونات: $W_{B-E}=\dfrac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}=\dfrac{2!}{1}=2$

C- الجسيمات فيرميونات: $W_{F-D}=N=2$



3

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية، نوجد تحاص الجملة z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z=\sum_i g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}=\sum_i g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT}=N\,e^{-0}+1e^{-1}+1e^{-2}=N+e^{-1}+e^{-2}$$ 1

نوجد رقم انشغال السويات في الحالة الأكثر احتمال من مكسويل

$$N_i=g_i\,e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}=e^{\alpha}g_i\,e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}=\frac{N}{Z}g_i\,e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}$$

فيكون: $N_1=\dfrac{N}{Z}N\,e^{-0}=\dfrac{N^2}{Z}$ و $N_2=\dfrac{N}{Z}1e^{-1}=\dfrac{N}{Z}e^{-1}$ و $N_3=\dfrac{N}{Z}1e^{-2}=\dfrac{N}{Z}e^{-2}$. 3

ويمكن التحقق من ذلك بالجمع

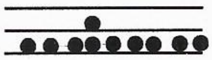
$$N_1+N_2+N_3=\frac{N^2}{Z}+\frac{N}{Z}e^{-1}+\frac{N}{Z}e^{-2}=\frac{N}{Z}(N+e^{-1}+e^{-2})=\frac{N}{Z}Z=N$$ 1

لإيجاد نوع التوزع الحاصل (في الحالة الأكثر احتمال) نوجد نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_1}{N_2}=N\,e>1\ \Rightarrow\ N_1>N_2 \quad و \quad \frac{N_2}{N_3}=\frac{e^{-1}}{e^{-2}}=e>1\ \Rightarrow\ N_2>N_3 \quad و \quad \frac{N_1}{N_3}=N\,e^{2}>1\ \Rightarrow\ N_1>N_3$$

نستنتج أن: $N_1>N_2>N_3$ فالتوزع طبيعي. 1

4- عندما تكون الجسيمات بوزونات: فتكون الجملة الواقعة وفق التوزع الماكروي $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1},\overset{\varepsilon'_2}{1},\overset{\varepsilon_3}{0})$ بحالة تكاثف، ودرجة حرارتها هي درجة آينشتين 1



5- عندما تكون الجسيمات فيرميونات: تتوضع الفيرميونات عند درجة الصفر المطلق على كافة السويات الدنيا بمعدل فيرميون واحد لكل درجة تحلل.

- تكون كافة السويات الأدنى من سوية فيرمي $f(\varepsilon)$ مملوءة (مشغولة) بمعدل فيرميون واحد لكل درجة تحلل والسويات الأعلى فارغة تماماً. 1
- سوية فيرمي هي أعلى سويات الطاقة المشغولة كلياً أو جزئياً بالفيرميونات

3- لإيجاد تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان: 15

نطلق من العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعها المطلقة وفق توزع M-B في مجال السرعات $[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$.

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{Z}e^{\beta m\vartheta^2/2}\,g(\vartheta)\,d\vartheta$$

ونعوض عن المقدار $g(\vartheta)\,d\vartheta$ بقيمته من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري

$$g(\vartheta)\,d\vartheta = C\,d\Gamma(\vartheta) = CV\,4\pi\, m^3\,\vartheta^2\,d\vartheta$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z = CV\,(2\pi\, m\, KT)^{3/2}$ ، وعن الطاقة $\varepsilon = m\vartheta^2/2$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(\vartheta) = \frac{N}{CV\,(2\pi\, m\, KT)^{3/2}}\, e^{-m\vartheta^2/2KT}\, CV\,4\pi\, m^3\,\vartheta^2\,d\vartheta$$ (4)

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(\vartheta) = 4\pi\, N\left(\frac{m}{2\pi\, KT}\right)^{3/2}\vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta$$

نعتبر أن $\boxed{\alpha = m/2KT}$

$$dN(\vartheta) = 4\pi\, N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta$$

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع السرع بدلالة تابع كثافة السرع كما يلي:

$$dF(\vartheta) = \frac{dN(\vartheta)}{N} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta = f(\vartheta^2)\,d\vartheta$$

حيث يعبر $f(\vartheta^2)$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

$$f(\vartheta^2) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}$$ (6)

للبرهان على أن $f(\vartheta^2)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على السرعة في المجال $]0 \to \infty[$.

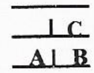
$$\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^\infty \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

$$F(\vartheta) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1$$ (5)

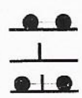
أجوبة نقاط السؤال الثاني: (35 درجة)

- تحديد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات. فيرميونات) الموزعة على السويات في الجمل التالية 15



الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$ (1)

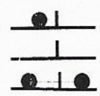
الوزن الإحصائي $W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1,0)} = 3!\left(\frac{2^2}{2!}\,\frac{2^1}{1!}\,\frac{1^0}{0!}\right) = 24$ (3)



الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{2})$ (1)

الوزن الإحصائي

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,0,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(0+2-1)!}{0!\,1!}\,\frac{(2+1-1)!}{2!\,0!} = 3\times1\times1 = 3$$ (3)



الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{1})$ (1)

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\;\Rightarrow\; W_{(2,0,1)}=\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(0+2-1)!}{0!\,1!}\,\frac{(1+2-1)!}{1!\,1!}=3\times1\times2=6$$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}\;\Rightarrow\; W_{(2,0,1)}=\frac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\frac{2!}{0!\,(2-0)!}\,\frac{2!}{1!\,(2-1)!}=1\times1\times2=2$$

- تأخذ العبارة العامة لأرقام انشغال مكسويل وبوزة وفيرمي الشكل

$$\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}\pm m}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}\pm1}$$

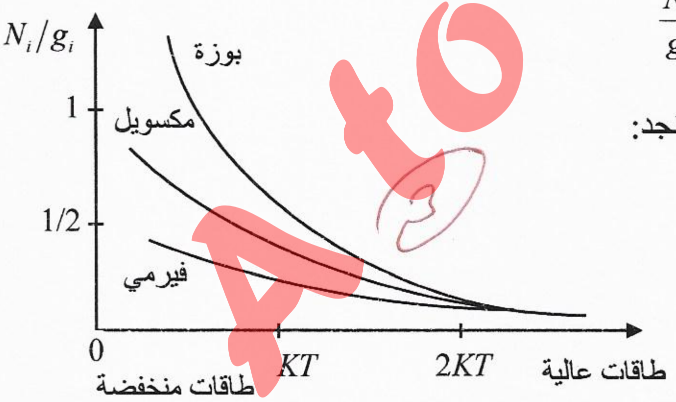
حيث يأخذ الثابت m القيمة صفر في توزع مكسويل والقيمة واحد في توزعي بوزة وفيرمي، والإشارة السالبة لبوزة والموجبة لفيرمي.

<u>عند الطاقات العالية</u> $(\varepsilon_i-\mu)>>KT$ يؤول توزعي بوزة وفيرمي إلى توزع مكسويل (يُهمل الواحد في المقام)

$$\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}\pm1}\approx\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}}<<1\quad\Rightarrow\quad\frac{N_i}{g_i}\to0$$

<u>عند الطاقات المنخفضة</u> $(\varepsilon_i-\mu)<<KT$ يكون $e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}\geq1$ فنجد:

- من أجل مكسويل $\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}}\leq1$
- من أجل بوزة $\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}-1}>>1$
- من أجل فيرمي $\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}+1}\leq\frac{1}{2}$



شكل ( )

- تعطى طاقة الهزاز الكوانتي بالصيغة $\varepsilon_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$

أي أن للهزاز طاقة $\varepsilon_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$ في السوية الأرضية $n=0$ عند درجة الصفر المطلق $T=0\,k^o$

يعطى تابع تحاص سويات الطاقة غير المتحللة للفونونات بصيغته المعروفة

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{g_n}_{1}e^{\beta\varepsilon_n}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{\beta(n+\frac{1}{2})\hbar\omega}=e^{\beta\frac{\hbar\omega}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{\beta n\hbar\omega}=e^{-\frac{\hbar\omega}{2KT}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{n\hbar\omega}{KT}}=e^{-\frac{\theta_E}{2T}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\frac{\theta_E}{T}}$$

حيث افترضنا درجة حرارة آينشتين $\theta_E=\frac{\hbar\omega}{K}$ مقدار ثابت، وبكتابة المجموع نجد

$$Z=e^{-\frac{\theta_E}{2T}}(1+e^{-\frac{\theta_E}{T}}+e^{-2\frac{\theta_E}{T}}+e^{-3\frac{\theta_E}{T}}+\ldots\ldots)$$

السلسلة هندسية حدها الأول واحد وأساسها $e^{-\frac{\theta_E}{T}}<1$ فيكون مجموعها $S=1\frac{1-\overbrace{(e^{-\frac{\theta_E}{T}})^n}^{0}}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}}\approx\frac{1}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}}$ وبالتعويض

$$Z=e^{-\frac{\theta_E}{2T}}\Big/1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}$$

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠٢٢ - ٢٠٢٣

س١ - أجب عن البنود التالية: (٥٠ درجة).

١- A- ارسم معين الطاقات واستفد منه في إيجاد تفاضلات توابع الطاقة، ووضع التوابع المناسبة في الفراغات في ما يلي:

$$-P=\left.\frac{\partial\ldots}{\partial V}\right)_S=\left.\frac{\partial\ldots}{\partial V}\right)_T \qquad \text{و} \qquad V=\left.\frac{\partial\ldots}{\partial P}\right)_S=\left.\frac{\partial\ldots}{\partial P}\right)_T$$

B- برهن صحة العلاقات التالية: (توجيه: استفد من ١ في برهان ٢)

١- $U=F-T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ ٢- $C_V=-T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V$ ٣- $U=-T^2\left(\frac{\partial (F/T)}{\partial T}\right)_V$

٢- مسألة: جملة مكونة من 5000 جسيم متمايز موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1=KT\ (J)$ و $\varepsilon_2=2KT\ (J)$، السويتان متحللتان بالشكل $g_1=3$ و $g_2=2$. والمطلوب:

١- ارسم هيكل السويات والتحللات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي.

٢- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}},\overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2}})_{\max}$. ثم تحقق أن $N=N_1+N_2$، ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1}=0{,}368$ و $e^{-2}=0{,}135$).

٣- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1+1}},\overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2-1}})$

ملاحظة: يرجى تدقيق النتائج الرقمية لهذه المسألة لأنها هامة

٣- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد حالتها الماكروية الأم ونوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها، واحسب وزنها الإحصائي.

س٢ - أجب عن البندين التاليين: (٤٠ درجة).

١- بفرض أن تابع كثافة السرعة المطلقة لتوزع M-B في المجال $]0\to\infty[$ هو $f(\vartheta^2)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2}$

- أوجد قيمة السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H بدلالة α، ثم أوجد قيمة السرعتين $\overline{\vartheta}$ و $\overline{\vartheta^2}$ والتشتت $\overline{\Delta\vartheta^2}$ بدلالة ϑ_H.
- برهن اعتماداً على $f(\vartheta^2)$ أن: $\overline{\vartheta}\left(\overline{\frac{1}{\vartheta}}\right)=\frac{4}{\pi}$.

توجيه: استفد في الحل من تكاملات بواسون التالية

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2}dx=\begin{cases}\dfrac{n!}{\frac{n}{2}!\,2^{n+1}}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha^{n+1}}} & ;n\ (\text{زوجي}\quad)\ \text{و}\ n\ge 0\\[2ex] \dfrac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ;n\ (\text{فردي}\quad)\ \text{و}\ n=2m+1\ \text{و}\ m\ge 0\end{cases}$$

٢- عرف تابع فيرمي $f(\varepsilon)$، ومثله بيانياً عند سوية فيرمي للطاقة $\varepsilon_f(T=0k^o)$.

ثم مثّله في جوارها من أجل $T\neq 0$، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon=\varepsilon_f(0)\pm KT$.

- اذكر ثلاث تعاريف مختلفة لسوية فيرمي $\varepsilon_f^{(o)}$.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الاثنين ٦/ ٣/ ٢٠٢٣

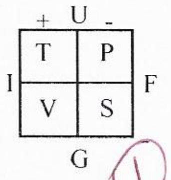
مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء

الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠٢٢ – ٢٠٢٣ (تسعون درجة)

ج ١: (٥٠ درجة)

١- A- نستفيد من تفاضلات توابع الطاقة التالية 15



١- $U(S,V)\Rightarrow dU = T\,dS - P\,dV$ 1

٢- $F(T,V)\Rightarrow dF = -S\,dT - P\,dV$ 1

٣- $G(T,P)\Rightarrow dG = -S\,dT + V\,dP$ 1

٤- $I(S,P)\Rightarrow dI = T\,dS + V\,dP$ 1

1

$$-P = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \quad \text{و} \quad V = \left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T$$ 2 2

B- برهان صحة العلاقات

١- بما أن $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ نعوض في العبارة $F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ فنجد: $F + TS = U$ 2

٢- من تعريف C_V : حيث $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ ، وبالاستفادة من العبارة (١) حيث: $U = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ نجد:

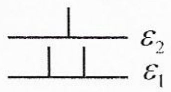
$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial}{\partial T}\left[F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V\right] = \left[\frac{\partial F}{\partial T} - \frac{\partial F}{\partial T} - T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right]_V = -T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V$$ 2

٣- نبدأ من الطرف الأيمن:

$$-T^2\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{F}{T}\right)_V = -T^2\left(\frac{T\frac{\partial F}{\partial T} - F}{T^2}\right)_V = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = F + TS = U$$ 2

٢- المسألة: 20

١- عدد حالات التوزع الماكروي:



$$N_o = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!} = \frac{(5000+2-1)!}{5000\,!\,(2-1)!} = \frac{5001\,!}{5000\,!} = \frac{5001\times 5000!}{5000\,!} = 5001$$ 3

٢- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overbrace{N_1}^{\varepsilon_1},\overbrace{N_2}^{\varepsilon_2})_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i/KT} \qquad ; Z = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = 3e^{-1} + 2e^{-2} = 1,104 + 0,270 = 1,374$$ 3

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1 e^{-\varepsilon_1/KT} = \frac{5000}{1,374} 3e^{-1} \approx 4017$$ 3

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 e^{-\varepsilon_2/KT} = \frac{5000}{1,374} 2e^{-2} \approx 983$$ 3

$$N = N_1 + N_2 = 4017 + 983 = 5000$$ 2

وهي حالة توزع طبيعي لأن $N_1 > N_2$

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1,N_2,\cancel{N_3})_{\max}} = \sum_i N_i\,\varepsilon_i = N_1\,\varepsilon_1 + N_2\,\varepsilon_2 = 4017\,KT + 983\times 2KT = 5983\,KT$$ 2

٣- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

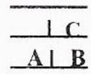
$$W_{(N_1,N_2)_{\max}} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N!\,\left(\frac{3^{N_1}}{N_1!}\,\frac{2^{N_2}}{N_2!}\right)$$

$$W'_{(N_1+1,N_2-1)} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N!\left(\frac{3^{N_1+1}}{(N_1+1)!}\,\frac{2^{N_2-1}}{(N_2-1)!}\right)$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2)_{\max}}}{W'_{(N_1+1,N_2-1)}} = \frac{3^{N_1}}{N_1!}\,\frac{2^{N_2}}{N_2!}\,\frac{(N_1+1)!}{3^{N_1+1}}\,\frac{(N_2-1)!}{2^{N_2-1}} = \frac{3^{N_1}}{N_1!}\,\frac{2^{N_2}}{N_2\,(N_2-1)!}\,\frac{(N_1+1)N_1!}{3\times 3^{N_1}}\,\frac{(N_2-1)!}{2^{-1}\times 2^{N_2}}$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2)_{\max}}}{W'_{(N_1+1,N_2-1)}} = \frac{2(N_1+1)}{3N_2} = \frac{2(4018)}{3\times 983} \approx 2{,}7 > 1 \quad\Rightarrow\quad W_{(N_1,N_2)_{\max}} > W'_{(N_1+1,N_2-1)}$$ (4)

-٣ (15)



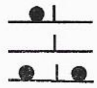
الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$ (1)

الوزن الإحصائي $W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1,0)} = 3!\left(\frac{2^2}{2!}\,\frac{2^1}{1!}\,\frac{1^0}{0!}\right) = 24$ (3)

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{2})$ (1)

الوزن الإحصائي

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(2,0,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(0+2-1)!}{0!\,1!}\,\frac{(2+1-1)!}{2!\,0!} = 3\times1\times1 = 3$$ (3)



الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{1})$ (1)

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(0+2-1)!}{0!\,1!}\,\frac{(1+2-1)!}{1!\,1!} = 3\times1\times2 = 6$$ (3)

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = \frac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\frac{2!}{0!\,(2-0)!}\,\frac{2!}{1!\,(2-1)!} = 1\times1\times2 = 2$$ (3)

ج ٢: (٤٠ درجة) (20)

:١ السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H: نجدها باشتقاق تابع الكثافة $f(\vartheta^2) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}$ وإعدام المشتق كما يلي:

$$\frac{\partial f(\vartheta^2)}{\partial\vartheta} = 0 \Rightarrow 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\left(2\vartheta\, e^{-\alpha\vartheta^2} - 2\alpha\,\vartheta\,\vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\right) = 0 \Rightarrow 2\vartheta\, e^{-\alpha\vartheta^2}(1-\alpha\vartheta^2) = 0$$

الحلول الناتجة عندما $\vartheta\, e^{-\alpha\vartheta^2} = 0$ هي $\vartheta = \infty$ و $\vartheta = 0$ وهي غير مقبولة.

وعندما $1-\alpha\vartheta^2 = 0$ نجد:

$$\vartheta_H = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$ (4)

القيمة الوسطى للسرعة المطلقة $\bar{\vartheta}$:

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta = 1$ (واستخدام تكاملات بواسون)

$$\bar{\vartheta} = \int_0^\infty \vartheta f(\vartheta^2)\,d\vartheta = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty \vartheta^3\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta}_{1/2\alpha^2} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{2\alpha^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\vartheta_H \approx 1{,}13\,\vartheta_H$$ (4)

$$\left(\overline{\frac{1}{v}}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{v} f(v^2)\,dv = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty v\, e^{-\alpha v^2}\,dv = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{2\alpha} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\alpha}$$

$$\Rightarrow \bar{v}\left(\overline{\frac{1}{v}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}v_H\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\alpha} = \frac{4}{\pi}\,\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{4}{\pi}$$ (4)

القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة $\overline{\vartheta^2}$:

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta = 1$ (واستخدام تكاملات بواسون)

$$\overline{\vartheta^2} = \int_0^\infty \vartheta^2 f(\vartheta^2)\,d\vartheta = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty \vartheta^4 e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta}_{\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} = \frac{3}{2}\frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2}\vartheta_H^2$$ 4

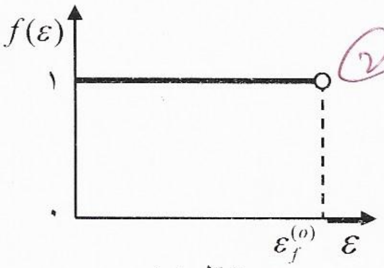
التشتت

$$\overline{\Delta\vartheta^2} = \overline{\vartheta^2} - \overline{\vartheta}^2 = \frac{3}{2}\vartheta_H^2 - \frac{4}{\pi}\vartheta_H^2 = \frac{3\pi - 8}{2\pi}\vartheta_H^2 \approx \frac{1{,}43}{6{,}28}\vartheta_H^2 \approx 0{,}228\,\vartheta_H^2$$ 4

٢: 20 يُعرف تابع فيرمي من عبارة توزع (فيرمي – ديراك) لعدد dN من الجسيمات الواقعة في مجال الطاقة $(\varepsilon \to \varepsilon + d\varepsilon)$ الذي درجة تحلله $(g \to g + dg)$ بالشكل :

$$dN = \frac{dg(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(o)}{KT}} + 1} = \frac{g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(o)}{KT}} + 1} = f(\varepsilon)\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon \quad ; f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(o)}{KT}} + 1}$$ 1

حيث $\varepsilon_f(0)$ سوية فيرمي عند درجة الصفر المطلق $T = 0k^o$ ، ونمثله بالشكل :

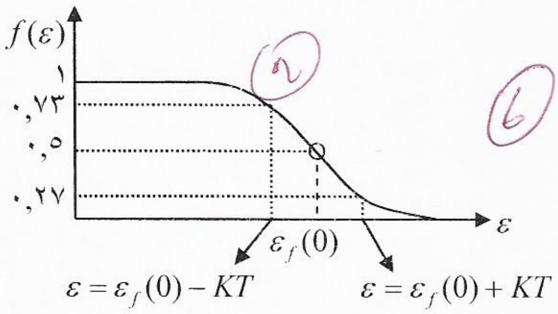


6

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(o)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{-\infty} + 1} = 1 & ; \varepsilon < \varepsilon_f \\ \dfrac{1}{e^{+\infty} + 1} = 0 & ; \varepsilon > \varepsilon_f \\ \dfrac{1}{e^{0/0} + 1} = XX & ; \varepsilon = \varepsilon_f \end{cases}$$

نستنتج أن تابع فيرمي هو تابع احتمال لأنه يأخذ قيمه في المجال [١ - ٠] . شكل ( )

وفي جوار سوية فيرمي ، من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon = \varepsilon_f(0) \pm KT$.



6

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(o)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{-1} + 1} \approx 0{,}73 & ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) - KT \\ \dfrac{1}{e^{0} + 1} = 0{,}5 & ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) \\ \dfrac{1}{e^{+1} + 1} \approx 0{,}27 & ; \varepsilon_f(0) + KT \end{cases}$$

- تعاريف سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(o)}$:

١- هي الطاقة الموافقة لتوزع الفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0k^o$

٢- هي أعلى سويات الطاقة المشغولة بالكامل بالفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0k^o$ وبمعدل فيرميون واحد لكل حالة مسموحة من أجل $\varepsilon_i < \varepsilon_f^{(o)}$ ، وفارغة من أجل $\varepsilon_i > \varepsilon_f^{(o)}$ 3

٣- هي الطاقة الموافقة لقيمة تابع فيرمي الاحتمالي $f(\varepsilon) = 0{,}5$

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2021 - 2022

س1- أجب عن البنود التالية: (55 درجة).

1- بفرض أن

التركيز الكمي للإلكترونات في قطاع التوصيل CB في الدرجة T هو $n_e \approx 2\left(\dfrac{2\pi\, m_e\, KT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon_c-\varepsilon_f(T)}{KT}}$

والتركيز الكمي للثقوب في قطاع التكافؤ VB عند نفس الدرجة T هو $n_h \approx 2\left(\dfrac{2\pi\, m_h\, KT}{h^2}\right)^{3/2} e^{\frac{\varepsilon_V-\varepsilon_f(T)}{KT}}$

وأن $m_e \approx m_h$ و $n_e \approx n_h$ (عند نفس درجة الحرارة)

المطلوب: برهن أن سوية فيرمي $\varepsilon_f(T)$ في أشباه الموصلات تقع في منتصف فجوة الطاقة ε_g تماماً.

2- مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة $\varepsilon_1 = KT \ \ (J)$ و $\varepsilon_2 = 2KT \ \ (J)$ ، $\varepsilon_3 = 3KT \ \ (J)$ السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_2 = 2$ و $g_3 = 1$. والمطلوب:

1- ارسم هيكل السويات والتحللات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي.

2- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N_3}})_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$ ،
ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0{,}368$ و $e^{-2} = 0{,}135$ و $e^{-3} = 0{,}05$).

3- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1+1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2-2}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N_3+1}})$

3- استفد من صيغتي تابع التحاص $Z = \sum\limits_i g_i\, e^{\beta \varepsilon_i}$ وتابع الكثافة الاحتمالي $P_i = \dfrac{g_i}{Z}\, e^{\beta \varepsilon_i}$ في إيجاد ما يلي:

أ- القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}$ ، والانحراف المعياري $\overline{\varepsilon^2}$ ، والتشتت $\overline{\Delta \varepsilon^2}$ ، بدلالة تابع التحاص Z والمشتقة $\partial/\partial\beta$.

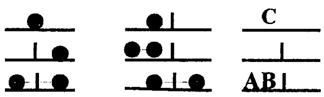
ب- صيغة طاقة الجملة بدلالة المشتقة $\partial/\partial T$.

س2- أجب عن البنود التالية: (35 درجة).

1- عرف تابع فيرمي $f(\varepsilon)$ ، ومثّله بيانياً عند سوية فيرمي للطاقة $\varepsilon_f(T = 0k^o)$.
ثم مثّله في جوارها من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon = \varepsilon_f(0) \pm KT$.

- اذكر ثلاث تعاريف مختلفة لسوية فيرمي $\varepsilon_f^{(o)}$.

2- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد حالتها الماكروية الأم ونوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها، واحسب وزنها الإحصائي.



مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الخميس 8 / 9 / 2022

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2021 – 2022 (تسعون درجة)

ج 1: (55 درجة).

1: بنسبة العلاقتين 10

$$\frac{n_e}{n_h} \approx \left(\frac{m_e}{m_h}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon_C - \varepsilon_f(T)}{KT}} e^{-\frac{\varepsilon_V - \varepsilon_f(T)}{KT}} = \left(\frac{m_e}{m_h}\right)^{3/2} e^{\frac{2\,\varepsilon_f(T) - (\varepsilon_V + \varepsilon_C)}{KT}}$$

بأخذ لغارتم الطرفين

$$Ln\frac{n_e}{n_h} \approx \frac{3}{2} Ln\frac{m_e}{m_h} + \frac{2\,\varepsilon_f(T) - (\varepsilon_V + \varepsilon_C)}{KT}$$ 5

وباعتبار $m_e \approx m_h$ و $n_e \approx n_h$ (عند نفس درجة الحرارة) نجد (باعتبار $Ln1 = 0$)

$$\varepsilon_f(T) \approx \frac{1}{2}(\varepsilon_V + \varepsilon_C)$$

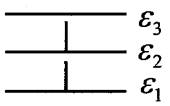
وبما أن عرض فجوة الطاقة (القطاع المحظور) $\varepsilon_g = \varepsilon_C - \varepsilon_V \;\Rightarrow\; \varepsilon_C = \varepsilon_g + \varepsilon_V$ وبالتعويض

$$\varepsilon_f(T) \approx \frac{1}{2}(2\,\varepsilon_V + \varepsilon_g)$$

$$\varepsilon_f(T) \approx \varepsilon_V + \frac{1}{2}\varepsilon_g$$ 5

2- المسألة: 25

1- عدد حالات التوزع الماكروي:



$$N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N!\,(N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(1000+3-1)!}{1000\,!\,(3-1)!} = \frac{1002\,!}{1000\,! \times 2\,!} = \frac{1002 \times 1001 \times 1000!}{1000\,! \times 2\,!} = 501501$$ 5

2- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overbrace{N_1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{N_2}^{\varepsilon_2}, \overbrace{N_3}^{\varepsilon_3})_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT} \quad ; Z = \sum_i g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} + e^{-3} = 1{,}056$$ 3

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1\, e^{-\varepsilon_1/KT} = \frac{1000}{1{,}056} 2\, e^{-1} \approx 697$$ 3

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2\, e^{-\varepsilon_2/KT} = \frac{1000}{1{,}056} 2\, e^{-2} \approx 256$$ 3

$$N_3 = \frac{N}{Z} g_3\, e^{-\varepsilon_3/KT} = \frac{1000}{1{,}056} e^{-3} \approx 47$$ 3

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 697 + 256 + 47 = 1000$$ 1

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}} = \sum_i N_i\, \varepsilon_i = N_1\, \varepsilon_1 + N_2\, \varepsilon_2 + N_3\, \varepsilon_3 = 697KT + 256 \times 2KT + 47 \times 3KT = 1340\, KT$$ 2

3- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i\,!} = N!\,\left(\frac{2^{N_1}}{N_1\,!}\frac{2^{N_2}}{N_2\,!}\frac{1^{N_3}}{N_3\,!}\right)$$

$$W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N!\left(\frac{2^{N_1+1}}{(N_1+1)!}\frac{2^{N_2-2}}{(N_2-2)!}\frac{1^{N_3+1}}{(N_3+1)!}\right)$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2,N_3)\max}}{W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)}} = \frac{2^{N_1}}{N_1!}\frac{2^{N_2}}{N_2!}\frac{1}{N_3!}\frac{(N_1+1)!}{2^{N_1+1}}\frac{(N_2-2)!}{2^{N_2-2}}\frac{(N_3+1)!}{1} = \frac{2^{N_1}}{N_1!}\frac{2^{N_2}}{N_2(N_2-1)(N_2-2)!}\frac{1}{N_3!}\frac{(N_1+1)N_1!}{2\times 2^{N_1}}\frac{(N_2-2)!}{2^{-2}\times 2^{N_2}}\frac{(N_3+1)N_3!}{1}$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2,N_3)\max}}{W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)}} = 2\frac{(N_1+1)(N_3+1)}{N_2(N_2-1)} = 2\frac{(698)(48)}{256(255)} = 1{,}026 \quad\Rightarrow\quad W_{(N_1,N_2,N_3)\max} > W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)}$$

5

3- أ- نحسب القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}$ من العلاقة

20

$$\bar{\varepsilon} = \sum_i \varepsilon_i P_i = \frac{1}{Z}\sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta\varepsilon_i}$$

بما أن $\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta\varepsilon_i}$ نجد بالتعويض $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta} = \frac{\partial Z/Z}{\partial\beta} = \frac{\partial LnZ}{\partial\beta}$

5

$$\overline{\varepsilon^2} = \sum_i \varepsilon_i^2 P_i = \frac{1}{Z}\sum_i \varepsilon_i^2 g_i e^{\beta\varepsilon_i}$$

بما أن $\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta\varepsilon_i}$ يكون $\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \sum_i \varepsilon_i^2 g_i e^{\beta\varepsilon_i}$ نجد بالتعويض $\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2}$

5

$$\overline{\Delta\varepsilon^2} = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2} - \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial Z}{\partial\beta} - \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{Z^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)\frac{\partial Z}{\partial\beta} - \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial Z/Z}{\partial\beta}\right) + \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2 - \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial LnZ}{\partial\beta}\right) = \frac{\partial^2 LnZ}{\partial\beta^2}$$

5

ب- إيجاد صيغة طاقة الجملة بدلالة المشتقة $\partial/\partial T$.

وجدنا أن $\bar{\varepsilon} = \frac{\partial LnZ}{\partial\beta}$ وبالاستفادة من العلاقة بين المشتقات $\frac{\partial}{\partial\beta} = KT^2\frac{\partial}{\partial T}$

ومن علاقة الطاقة الداخلية $U = N\bar{\varepsilon}$ نجد

$$U = N\bar{\varepsilon} = N\left(\frac{\partial LnZ}{\partial\beta}\right)_V = NKT^2\frac{\partial LnZ}{\partial T}$$

5

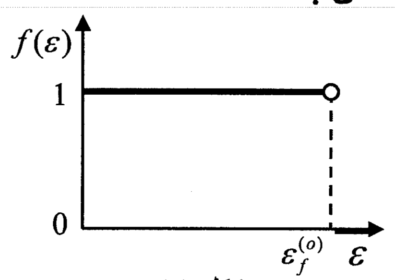
ج 2: (35 درجة).

1: يُعرف تابع فيرمي من عبارة توزع (فيرمي – ديراك) لعدد dN من الجسيمات الواقعة في مجال الطاقة $(\varepsilon \to \varepsilon + d\varepsilon)$ الذي درجة تحلله $(g \to g + dg)$ بالشكل :

17

$$dN = \frac{dg(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(o)}{KT}}+1} = \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(o)}{KT}}+1} = f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon \quad ; f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(o)}{KT}}+1}$$

حيث $\varepsilon_f(0)$ سوية فيرمي عند درجة الصفر المطلق $T = 0k^o$ ، ونمثله بالشكل :



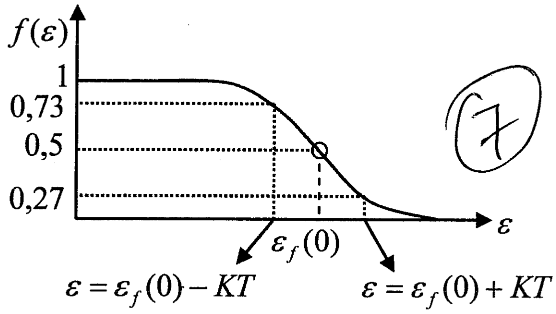
شكل ( )

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(o)}{KT}}+1} = \begin{cases} \frac{1}{e^{-\infty}+1} = 1 & ; \varepsilon < \varepsilon_f \\ \frac{1}{e^{+\infty}+1} = 0 & ; \varepsilon > \varepsilon_f \\ \frac{1}{e^{0/0}+1} = XX & ; \varepsilon = \varepsilon_f \end{cases}$$

7

نستنتج أن تابع فيرمي هو تابع احتمال لأنه يأخذ قيمه في المجال [0 - 1] .

وفي جوار سوية فيرمي ، من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon = \varepsilon_f(0) \pm KT$.



7

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{-1}+1} \approx 0{,}73 & ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) - KT \\ \dfrac{1}{e^{0}+1} = 0{,}5 & ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) \\ \dfrac{1}{e^{+1}+1} \approx 0{,}27 & ; \varepsilon_f(0) + KT \end{cases}$$

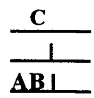
- تعاريف سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(o)}$: 3

1- هي الطاقة الموافقة لتوزع الفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0k^o$

2- هي أعلى سويات الطاقة المشغولة بالكامل بالفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0k^o$ وبمعدل فيرميون واحد لكل حالة مسموحة من أجل $\varepsilon_i < \varepsilon_f^{(o)}$ ، وفارغة من أجل $\varepsilon_i < \varepsilon_f^{(o)}$

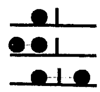
3- هي الطاقة الموافقة لقيمة تابع فيرمي الاحتمالي $f(\varepsilon) = 0{,}5$

-2 18



الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

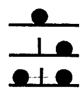
الوزن الإحصائي $W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^{3} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = 3!\left(\frac{2^2}{2!}\ \frac{2^0}{0!}\ \frac{1^1}{1!}\right) = 12$ 5



الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

الوزن الإحصائي

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3} \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\ \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\ \frac{(1+2-1)!}{1!\,1!} = 3 \times 3 \times 2 = 18$$ 5



الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{1})$ 2

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3} \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,1,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\ \frac{(1+2-1)!}{1!\,1!}\ \frac{(1+1-1)!}{1!\,0!} = 3 \times 2 \times 1 = 6$$ 3

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{3} \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,1,1)} = \frac{2!}{2!\,(2-2)!}\ \frac{2!}{1!\,(2-1)!}\ \frac{1!}{1!\,(1-1)!} = 1 \times 2 \times 1 = 2$$ 3

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية
السنة الثالثة فيزياء / الفصل الثاني للعام الدراسي 2021 - 2022

س ١- أجب عن البنود التالية: (55 درجة)

١- A- ارسم معين الطاقات واستفد منه في إيجاد تفاضلات توابع الطاقة، ووضع التوابع المناسبة في الفراغات في ما يلي: 12

$$-S = \left.\frac{\partial \ldots}{\partial T}\right)_V = \left.\frac{\partial \ldots}{\partial T}\right)_P \quad \text{و} \quad T = \left.\frac{\partial \ldots}{\partial S}\right)_V = \left.\frac{\partial \ldots}{\partial S}\right)_P$$

B- برهن صحة العلاقات التالية: (توجيه: استفد من ١ في برهان ٢)

١- $U = \left[\frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta}\right]_V$ ٢- $C_V = K\beta^2\left[\frac{\partial^2(\beta F)}{\partial \beta^2}\right]_V$ ٣- $U = -T^2\left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T}\right)_V$

٢- مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة $\varepsilon_1 = KT \ (J)$ 20
و $\varepsilon_2 = 2KT \ (J)$ و $\varepsilon_3 = 3KT \ (J)$، السويات متحللة بالشكل $g_1 = 3$ و $g_2 = 2$ و $g_3 = 1$. والمطلوب:

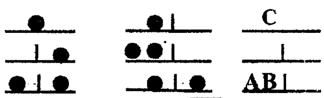
١- ارسم هيكل السويات والتحللات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي.

٢- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N_3}})_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$، وأنها حالة توزع طبيعي، ثم احسب طاقة هذه الحالة بدلالة KT. (علماً أن: $e^{-1} = 0{,}368$ و $e^{-2} = 0{,}135$ و $e^{-3} = 0{,}05$).

٣- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1 + 1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2 - 1}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N_3}})$

ملاحظة: يرجى تدقيق النتائج الرقمية لهذه المسألة لأنها هامة

٣- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد حالتها الماكروية الأم ونوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها، واحسب وزنها الإحصائي. 23



س ٢- أجب عن البندين التاليين: (35 درجة)

١- برهن أن تابع كثافة مركبة السرعة المطلقة المعروف بالسرعة الموجهة، ($G(\vartheta_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha \vartheta_x^2}$ غوص الطبيعي)، 20
هو تابع كثافة احتمال. ثم أوجد قيمة ما يلي: $\overline{\vartheta_x}$ ، $\overline{\vartheta_x^2}$ ، $\overline{\Delta \vartheta_x^{\,2}}$ ، $\overline{\vartheta^2 \vartheta_x}$ ، $\overline{\vartheta_x^3 \vartheta_y}$ ، $\overline{(\vartheta_x + b\vartheta_y)^2}$ ، $\overline{\vartheta_x^2 \vartheta_y^2}$.

توجيه: استفد في الحل من تكاملات بواسون التالية

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} \dfrac{n!}{\frac{n}{2}!\, 2^{n+1}}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha^{n+1}}} & ; n\ (\text{زوجي}) \ \wp \ n \geq 0 \\ \dfrac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ; n\ (\text{افردي}) \ \wp \ n = 2m+1 \ \wp \ m \geq 0 \end{cases}$$

٢- بفرض أن 15

التركيز الكمي للإلكترونات في قطاع التوصيل CB في الدرجة T هو $n_e \approx 2\left(\frac{2\pi m_e KT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_f(T)}{KT}}$

والتركيز الكمي للثقوب في قطاع التكافؤ VB عند نفس الدرجة T هو $n_h \approx 2\left(\frac{2\pi m_h KT}{h^2}\right)^{3/2} e^{\frac{\varepsilon_V - \varepsilon_f(T)}{KT}}$

وأن $m_e \approx m_h$ و $n_e \approx n_h$ (عند نفس درجة الحرارة)

المطلوب: برهن أن سوية فيرمي $\varepsilon_f(T)$ في أشباه الموصلات تقع في منتصف فجوة الطاقة ε_g تماماً.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الاثنين 27/ 6/ 2022

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية –

السنة الثالثة فيزياء الفصل الثاني للعام الدراسي 2021 – 2022 **(تسعون درجة)**

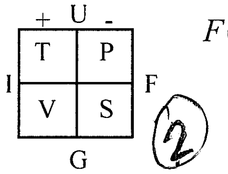
ج 1: (55 درجة).

-1 12

1- نستفيد من تفاضلات توابع الطاقة التالية

$$-1 \quad U(S,V) \Rightarrow dU = T\,dS - P\,dV \qquad -2 \quad F(T,V) \Rightarrow dF = -S\,dT - P\,dV$$

$$-3 \quad G(T,P) \Rightarrow dG = -S\,dT + V\,dP \qquad -4 \quad I(S,P) \Rightarrow dI = T\,dS + V\,dP$$



$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial I}{\partial S}\right)_P \quad \text{و} \quad -S = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P$$

4 2

2- برهان صحة العلاقات

1- نبدأ من الطرف الأيمن للمساواة فنجد :

$$\left[\frac{\partial(\beta F)}{\partial\beta}\right]_V = \left[F + \beta\frac{\partial F}{\partial\beta}\right]_V = F + \beta\left(\frac{\partial F}{\partial\beta}\right)_V$$

نوجد قيمة $\left(\frac{\partial F}{\partial\beta}\right)_V$ بإدخال درجة الحرارة T كوسيط بالشكل التالي:

$$\beta = -\frac{1}{KT} \Rightarrow T = -\frac{1}{K\beta} \quad \text{و} \quad ; S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\beta}\right)_V = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial\beta}\right)_V = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial T}{\partial\beta}\right)_V = -S\left(\frac{\partial T}{\partial\beta}\right)_V = -S\left(\frac{1}{K\beta^2}\right)_V$$

بالتعويض والاستفادة من معين الطاقات التالي نجد :

$$F + \beta\left(\frac{\partial F}{\partial\beta}\right)_V = F - \beta S\left(\frac{1}{K\beta^2}\right)_V = F - \frac{S}{K\beta} = F + TS = U$$

2

2- من تعريف C_V : حيث $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ ، وبالاستفادة من العبارة (1) حيث: $U = \left(\frac{\partial\beta F}{\partial\beta}\right)_V$

وبالتعويض عن المشتقة بقيمتها $\frac{\partial}{\partial T} = \frac{1}{KT^2}\frac{\partial}{\partial\beta}$ نجد:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{KT^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\beta F}{\partial\beta}\right)_V = \frac{K}{K^2T^2}\left(\frac{\partial^2\beta F}{\partial\beta^2}\right)_V = K\beta^2\left(\frac{\partial^2\beta F}{\partial\beta^2}\right)_V$$

2

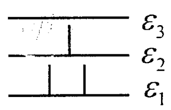
3- نبدأ من الطرف الأيمن:

$$-T^2\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{F}{T}\right)_V = -T^2\left(\frac{T\frac{\partial F}{\partial T} - F}{T^2}\right)_V = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = F + TS = U$$

2

-2 المسألة: 20

-1 عدد حالات التوزع الماكروي:



$$N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N!\,(N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(1000 + 3 - 1)!}{1000\,!\,(3-1)!} = \frac{1002\,!}{1000\,!\times 2\,!} = \frac{1002\times1001\times1000!}{1000\,!\times 2\,!} = 501501$$

5

-2 نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{N_1}, \overset{\varepsilon_2}{N_2}, \overset{\varepsilon_3}{N_3})_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i/KT} \quad ; Z = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = 3e^{-1} + 2e^{-2} + e^{-3} = 1{,}104 + 0{,}270 + 0{,}05 = 1{,}424$$

3

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1 e^{-\varepsilon_1/KT} = \frac{1000}{1{,}424} 3e^{-1} \approx 775$$

2

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 e^{-\varepsilon_2/KT} = \frac{1000}{1{,}424} 2e^{-2} \approx 190$$

2

$$N_3=\frac{N}{Z}g_3\,e^{-\varepsilon_3/KT}=\frac{1000}{1,424}\,e^{-3}\approx 35$$ 2

$$N=N_1+N_2+N_3=775+190+35=1000$$ 1

وهي حالة توزع طبيعي لأن $N_1>N_2>N_3$ 1

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}=\sum_i N_i\,\varepsilon_i=N_1\varepsilon_1+N_2\varepsilon_2+N_3\varepsilon_3=775\,KT+190\times2KT+35\times3KT=1260\,KT$$ 1

3- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}=N!\prod_i\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}=N!\left(\frac{3^{N_1}}{N_1!}\frac{2^{N_2}}{N_2!}\frac{1^{N_3}}{N_3!}\right)$$

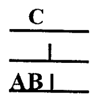
$$W'_{(N_1+1,N_2-1,N_3)}=N!\prod_i\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}=N!\left(\frac{3^{N_1+1}}{(N_1+1)!}\frac{2^{N_2-1}}{(N_2-1)!}\frac{1^{N_3}}{N_3!}\right)$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1,N_2-1,N_3)}}=\frac{3^{N_1}}{N_1!}\frac{2^{N_2}}{N_2!}\frac{1^{N_3}}{N_3!}\frac{(N_1+1)!}{3^{N_1+1}}\frac{(N_2-1)!}{2^{N_2-1}}\frac{N_3!}{1^{N_3}}=\frac{3^{N_1}}{N_1!}\frac{2^{N_2}}{N_2(N_2-1)!}\frac{1}{N_3!}\frac{(N_1+1)N_1!}{3\times3^{N_1}}\frac{(N_2-1)!}{2^{-1}\times2^{N_2}}\frac{N_3!}{1}$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1,N_2-1,N_3)}}=\frac{2(N_1+1)}{3N_2}=\frac{2(776)}{3\times190}\approx 2,7>1\quad\Rightarrow\quad W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}>W'_{(N_1+1,N_2-1,N_3)}$$ 3

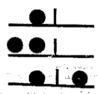
-3 23

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2},\overset{\varepsilon_2}{0},\overset{\varepsilon_3}{1})$ 1



الوزن الإحصائي $W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(2,0,1)}=3!\left(\frac{2^2}{2!}\frac{2^0}{0!}\frac{1^1}{1!}\right)=12$ 5

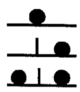
الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2},\overset{\varepsilon_2}{2},\overset{\varepsilon_3}{1})$ 1



الوزن الإحصائي

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\Rightarrow W_{(2,2,1)}=\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\frac{(1+2-1)!}{1!\,1!}=3\times3\times2=18$$ 5

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2},\overset{\varepsilon_2}{1},\overset{\varepsilon_3}{1})$ 1



الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\Rightarrow W_{(2,1,1)}=\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\frac{(1+2-1)!}{1!\,1!}\frac{(1+1-1)!}{1!\,0!}=3\times2\times1=6$$ 5

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}\Rightarrow W_{(2,1,1)}=\frac{2!}{2!\,(2-2)!}\frac{2!}{1!\,(2-1)!}\frac{1!}{1!\,(1-1)!}=1\times2\times1=2$$ 5

35 درجة

ج 2:

1: **هو تابع كثافة احتمال** لأنه يحقق الشرط الواحدي. 20

$$\int_{-\infty}^{+\infty}G(\upsilon_x)\,dx=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\upsilon_x^2}\,d\upsilon_x=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,2\int_0^{+\infty}\upsilon_x^{\,0}\,e^{-\alpha\upsilon_x^2}\,d\upsilon_x=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,2\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}=1$$ 6

إيجاد قيم المقادير: $\overline{\vartheta_x}$ ، $\overline{\vartheta_x^2}$ ، $\overline{\Delta\upsilon_x^{\,2}}$ ، $\overline{\vartheta^2\vartheta_x}$ ، $\overline{\vartheta_x^3\vartheta_y}$ ، $\overline{(\vartheta_x+b\vartheta_y)^2}$ ، $\overline{\vartheta_x^2\vartheta_y^2}$.

بما أن الأس فردي فنجد من تكاملات بواسون

2 $\overline{\vartheta_x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_x G(\vartheta_x) d\vartheta_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_x^{\,1} e^{-\alpha \vartheta_x^2} d\vartheta_x = 0$

تشير هذه النتيجة إلى أن عدد الجسيمات المتحركة وفق ox^+ يساوي العدد المتحرك وفق ox^-

2 $$\overline{\vartheta_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_x^2 G(\vartheta_x) d\vartheta_x = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^{+\infty} \vartheta_x^{\,2} e^{-\alpha \vartheta_x^2} d\vartheta_x = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \vartheta_x^{\,2} e^{-\alpha \vartheta_x^2} d\vartheta_x}_{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{KT}{m}$$

$\alpha = \frac{m}{2KT}$

2 $\overline{\Delta \upsilon_x^2} = \overline{\upsilon_x^2} - \overline{\upsilon_x}^{\,2} = 1/2\alpha = \frac{KT}{m}$

2 $\overline{\vartheta^2 \vartheta_x} = \overline{\vartheta^2}\ \overline{\vartheta_x} = 0 \quad ; \quad \overline{\vartheta_x} = 0$

2 $\overline{\vartheta_x^3 \vartheta_y} = \overline{\vartheta_x^3}\ \overline{\vartheta_y} = 0 \quad ; \quad \overline{\vartheta_y} = 0$

$\zeta = \frac{1+b^2}{2\alpha}$

2 $\overline{(\vartheta_x + b\vartheta_y)^2} = \overline{\vartheta_x}^{\,2} + 2b\ \overline{\vartheta_x}\ \overline{\vartheta_y} + b^2\ \overline{\vartheta_y}^{\,2} = (1+b^2)\frac{KT}{m} \quad ; \ \overline{\vartheta_x} = \overline{\vartheta_y} = 0$

2 $\overline{\vartheta_x^2 \vartheta_y^2} = \overline{\vartheta_x^2}\ \overline{\vartheta_y^2} = \left(\frac{KT}{m}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2$

:2 بنسبة العلاقتين

15

$$\frac{n_e}{n_h} \approx \left(\frac{m_e}{m_h}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon_C - \varepsilon_f(T)}{KT}} e^{-\frac{\varepsilon_V - \varepsilon_f(T)}{KT}} = \left(\frac{m_e}{m_h}\right)^{3/2} e^{\frac{2\varepsilon_f(T) - (\varepsilon_V + \varepsilon_C)}{KT}}$$

بأخذ لغارتم الطرفين

$$Ln\frac{n_e}{n_h} \approx \frac{3}{2} Ln\frac{m_e}{m_h} + \frac{2\varepsilon_f(T) - (\varepsilon_V + \varepsilon_C)}{KT}$$

وباعتبار $m_e \approx m_h$ و $n_e \approx n_h$ (عند نفس درجة الحرارة) نجد (باعتبار $Ln 1 = 0$)

$$\varepsilon_f(T) \approx \frac{1}{2}(\varepsilon_V + \varepsilon_C)$$ 12

وبما أن عرض فجوة الطاقة (القطاع المحظور) $\varepsilon_C = \varepsilon_g + \varepsilon_V \Rightarrow \varepsilon_g = \varepsilon_C - \varepsilon_V$ وبالتعويض

$$\varepsilon_f(T) \approx \frac{1}{2}(2\varepsilon_V + \varepsilon_g)$$

$$\varepsilon_f(T) \approx \varepsilon_V + \frac{1}{2}\varepsilon_g$$ 3

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2021 - 2022

الدورة الثالثة

س1- أجب عن البندين التاليين: (55 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(F-D)\,\max}$ لتوزع فيرمي - ديراك، في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج). 20

2- **مسألة:** جملة مكونة من جسيمين متمايزين موزعين على ثلاث سويات للطاقة $\varepsilon_1 = KT$ ، $\varepsilon_2 = 2KT$ ، $\varepsilon_3 = 3KT$ 20
السويات متحللة بالشكل: $g_1 = g_2 = 2$ و $g_3 = 1$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد نسب أرقام الانشغال، ما نوع التوزع الحاصل (طبيعي أم لا).
- أوجد تعاصي الجملة والطاقم (بدلالة e)، واستنتج من ذلك حصراً كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.
- تحقق من صحة نتائجك بحساب طاقم الجملة
- أوجد (مع تمثيل كافة الحالات الميكروية) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{1}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$ في الحالات التالية:
1- الجسيمان متمايزان A و B. 2- الجسيمان بوزونان. 3- الجسيمان فيرميونان.

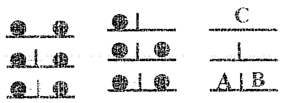
3- عرف تابع فيرمي $f(\varepsilon)$ ، ومثّله بيانياً عند سوية فيرمي للطاقة $\varepsilon_f(T = 0k^o)$. 15
ثم مثّله في جوارها من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon = \varepsilon_f(0) \pm KT$.

- اذكر ثلاث تعاريف مختلفة لسوية فيرمي $\varepsilon_f^{(o)}$.

س2- أجب عن البندين التاليين: (35 درجة).

1- استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان (بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$). 20
ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

2- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها 15



ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

توجيه: استفد في الحل من تكاملات بواسون التالية (بحالة n زوجي)
$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{\frac{n}{2}!\, 2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}}$$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الأحد 20/ 2/ 2022

مدرس المقرر د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء

الفصل الأول للعام الدراسي 2021 – 2022 (تسعون درجة)

ج 1: 55 درجة

1- استنتاج **رقم الانشغال** لتوزع $N_{\underset{max}{(F-D)}}$

20

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (F-D). المعطاة بالعلاقة: $W_{F-D}=\prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}$

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التحلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i. أي $\boxed{g_i>>N_i}$.

5

نوجد بدايةً $Ln(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d\,Ln(W_{F-D})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{F-D})\approx Ln\prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}=\sum_i\left[Ln\,g_i!-Ln\,N_i!-Ln(g_i-N_i)!\right]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنغ $Ln\,x!\approx x\,Ln\,x$ نجد:

$$Ln(W_{F-D})\approx\sum_i\left[g_iLn\,g_i-N_i\,Ln\,N_i-g_iLn(g_i-N_i)+N_i\,Ln(g_i-N_i)\right]$$

بما أن W_{F-D} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d\,Ln(W_{F-D})=\frac{\partial\,Ln(W_{F-D})}{\partial N_i}dN_i\approx\frac{\partial}{\partial N_i}\sum_i\left[g_iLn\,g_i-N_i\,Ln\,N_i-g_iLn(g_i-N_i)+N_i\,Ln(g_i-N_i)\right]dN_i$$

$$\approx\sum_i\left[-Ln\,N_i-1+\frac{g_i}{g_i-N_i}+Ln(g_i-N_i)-\frac{N_i}{g_i-N_i}\right]dN_i=\sum_i\left(Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}-1+\frac{g_i-N_i}{g_i-N_i}\right)dN_i$$

$$d\,Ln(W_{F-D})\approx\sum_i Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}dN_i$$

10

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$N=\sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN=\sum_i dN_i \qquad \text{و} \qquad U=\sum_i\varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU=\sum_i\varepsilon_i\,dN_i$$

$$d\,Ln(W_{F-D})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0$$

$$\sum_i\left(Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}+\alpha+\beta\varepsilon_i\right)dN_i=0\;\Rightarrow\;Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\varepsilon_i)\;\Rightarrow\;\frac{g_i-N_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow\;\frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}+1\;\Rightarrow\;\boxed{N_{\underset{max}{i(F-D)}}=\frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}+1}}$$

5

2- المسألة: 20

- حالات التوزع الماكروي: $N_o=\frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!}=\frac{(2+3-1)!}{2!(3-1)!}=\frac{4!}{2!\,2!}=6$ 2

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U=\sum_i N_i\,\varepsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزع الماكروي الستة.

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي: $\left\{\underbrace{(2,0,0)}_{U=2KT},\underbrace{(0,2,0)}_{U=4KT},\underbrace{(0,0,2)}_{U=6KT},\underbrace{(1,1,0)}_{U=3KT},\underbrace{(1,0,1)}_{U=4KT},\underbrace{(0,1,1)}_{U=5KT}\right\}$ 2

- نحسب نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_i}{N_j}=\frac{e^{\alpha}\,g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}}{e^{\alpha}\,g_j\,e^{\beta\varepsilon_j}}=\frac{g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT}}{g_j\,e^{-\varepsilon_j/KT}}$$

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{2e^{-KT/KT}}{2e^{-2KT/KT}}=\frac{2e^{-1}}{2e^{-2}}=e>1 \Rightarrow N_1>N_2$$

$$\frac{N_1}{N_3}=\frac{2e^{-KT/KT}}{1e^{-3KT/KT}}=\frac{2e^{-1}}{1e^{-3}}=2e^2>1 \Rightarrow N_1>N_3$$

$$\frac{N_2}{N_3}=\frac{2e^{-2KT/KT}}{1e^{-3KT/KT}}=\frac{2e^{-2}}{1e^{-3}}=2e>1 \Rightarrow N_2>N_3$$

2

والتوزع طبيعي

• تحاص الجملة: $Z=\sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT}=2e^{-1}+2e^{-2}+e^{-3}$

تحاص الطاقم: $Z_\Omega=Z^N=(2e^{-1}+2e^{-2}+e^{-3})^2=4e^{-2}+4e^{-4}+e^{-6}+8e^{-3}+4e^{-4}+4e^{-5}$

نقارنه بالعبارة:

$$Z_\Omega=\sum_i W_i e^{-U_i/KT}=W_{(2,0,0)}e^{-2}+W_{(0,2,0)}e^{-4}+W_{(0,0,2)}e^{-6}+W_{(1,1,0)}e^{-3}+W_{(1,0,1)}e^{-4}+W_{(0,1,1)}e^{-5}$$

$$Z_\Omega=4e^{-2}+4e^{-4}+e^{-6}+8e^{-3}+4e^{-4}+4e^{-5}$$

فتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزع الماكروي بالشكل:

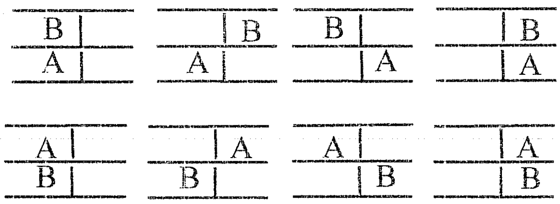
$W_{(2,0,0)}=4$, $W_{(0,2,0)}=4$, $W_{(0,0,2)}=1$, $W_{(1,1,0)}=8$, $W_{(1,0,1)}=4$, $W_{(0,1,1)}=4$ 4

الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة $(1,1,0)$

• للتحقق من صحة النتائج نحسب طاقم الجملة من العلاقة $\Omega=(\sum_i g_i)^N=5^2=25$

وهذا يتطابق مع الحسابات $\Omega=\sum_i W_i=4+4+1+8+4+4=25$ 1

• 1- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية) $W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(1,1,0)}=2!\left(\frac{2^1}{1!}\frac{2^1}{1!}\frac{1^0}{0!}\right)=8$



3

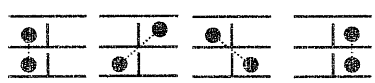
2- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}=\frac{(1+2-1)!}{1!\,(2-1)!}\frac{(1+2-1)!}{1!\,(2-1)!}\frac{(0+1-1)!}{0!\,(1-1)!}=4$$

3

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(1,1,0)$ تحقق الشرط $g_i\ge N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

$$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}=\frac{2!}{1!\,(2-1)!}\frac{2!}{1!\,(2-1)!}\frac{1!}{0!\,(1-0)!}=4$$



3

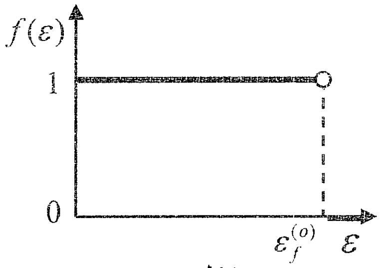
-3

15 يُعرف تابع فيرمي من عبارة توزع (فيرمي – ديراك) لعدد dN من الجسيمات الواقعة في مجال الطاقة $(\varepsilon\to\varepsilon+d\varepsilon)$ الذي درجة تحلله $(g\to g+dg)$ بالشكل :

$$dN=\frac{dg(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(0)}{KT}}+1}=\frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(0)}{KT}}+1}=f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon \quad ; f(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(0)}{KT}}+1}$$

2

حيث $\varepsilon_f(0)$ سوية فيرمي عند درجة الصفر المطلق $T=0k^o$ ، ونمثله بالشكل :



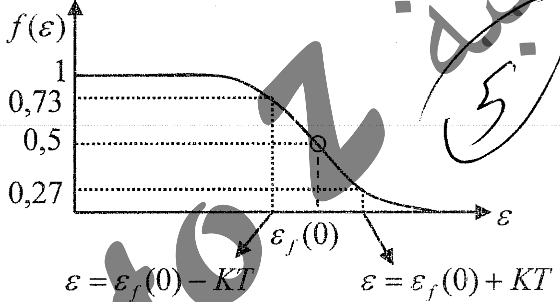
5

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(o)}{KT}}+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{-\infty}+1}=1 & ;\ \varepsilon<\varepsilon_f\\ \dfrac{1}{e^{+\infty}+1}=0 & ;\ \varepsilon>\varepsilon_f\\ \dfrac{1}{e^{0/0}+1}=XX & ;\ \varepsilon=\varepsilon_f\end{cases}$$

شكل ( )

نستنتج أن تابع فيرمي هو تابع احتمال لأنه يأخذ قيمه في المجال [1 - 0] .

وفي جوار سوية فيرمي ، من أجل $T\neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon=\varepsilon_f(0)\pm KT$.



5

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(0)}{KT}}+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{-1}+1}\approx 0{,}73 & ;\ \varepsilon=\varepsilon_f(0)-KT\\ \dfrac{1}{e^{0}+1}=0{,}5 & ;\ \varepsilon=\varepsilon_f(0)\\ \dfrac{1}{e^{+1}+1}\approx 0{,}27 & ;\ \varepsilon_f(0)+KT\end{cases}$$

- تعاريف سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(o)}$:

3

1- هي الطاقة الموافقة لتوزع الفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T=0k^o$

2- هي أعلى سويات الطاقة المشغولة بالكامل بالفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T=0k^o$ وبمعدل فيرميون واحد لكل حالة مسموحة من أجل $\varepsilon_i > \varepsilon_f^{(o)}$ ، وفارغة من أجل $\varepsilon_i<\varepsilon_f^{(o)}$

3- هي الطاقة الموافقة لقيمة تابع فيرمي الاحتمالي $f(\varepsilon)=0{,}5$

ج2: 35 درجة

1: لإيجاد تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان: 20

ننطلق من العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعها المطلقة وفق توزع M-B في مجال السرعات $[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$.

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{Z}e^{\beta m\vartheta^2/2}\,g(\vartheta)\,d\vartheta$$

ونعوض عن المقدار $g(\vartheta)d\vartheta$ بقيمته من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري

$$g(\vartheta)\,d\vartheta=C\,d\Gamma(\vartheta)=CV\,4\pi\ m^3\,\vartheta^2\,d\vartheta$$

وعن تابع التجاص Z بقيمته $Z=CV\,(2\pi mKT)^{3/2}$ ، وعن الطاقة $\varepsilon=m\vartheta^2/2$ ، واعتبار أن $\beta=-1/KT$. نجد:

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{CV\,(2\pi mKT)^{3/2}}e^{-m\vartheta^2/2KT}\,CV\,4\pi m^3\,\vartheta^2\,d\vartheta$$

10

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(\vartheta)=4\pi N\left(\frac{m}{2\pi\ KT}\right)^{3/2}\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta$$

نعتبر أن $\boxed{\alpha=m/2KT}$

$$dN(\vartheta)=4\pi N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta$$

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع السرع بدلالة تابع كثافة السرع كما يلي:

$$dF(\vartheta)=\frac{dN(\vartheta)}{N}=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\, d\vartheta=f(\vartheta^2)\,d\vartheta$$

حيث يعبر $f(\vartheta^2)$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

$$f(\vartheta^2)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}$$ 5

للبرهان على أن $f(\vartheta^2)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على السرعة في المجال $]0\to\infty[$.

$$\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\, d\vartheta$$

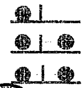
نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^\infty \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\, d\vartheta=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

$$F(\vartheta)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}=1$$ 5

:2 15

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2},\overset{\varepsilon_2}{0},\overset{\varepsilon_3}{1})$ 1

الوزن الإحصائي $W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(2,0,1)}=3!\left(\frac{2^2}{2!}\,\frac{2^0}{0!}\,\frac{1^1}{1!}\right)=12$ 3



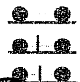
الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2},\overset{\varepsilon_2}{2},\overset{\varepsilon_3}{1})$ 1

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\Rightarrow W_{(2,2,1)}=\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(1+2-1)!}{1!\,1!}=3\times3\times2=18$$ 3

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}\Rightarrow W_{(2,2,1)}=\frac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\frac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\frac{2!}{1!\,(2-1)!}=1\times1\times2=2$$ 3



الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2},\overset{\varepsilon_2}{2},\overset{\varepsilon_3}{2})$ 1

الوزن الإحصائي

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\Rightarrow W_{(2,2,2)}=\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+1-1)!}{2!\,0!}=3\times3\times1=9$$ 3

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2020 - 2021

س1- أجب عن البنود التالية: (55 درجة).

1- تعطى عبارة الكثافة السطحية للتيار الإلكتروني بالعلاقة $J_x = \dfrac{2\,q}{\beta h^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta[\varepsilon - \varepsilon_f(T)]}\, dP_y\, dP_Z$ 15

فإذا علمت أن فرق الطاقة $\varepsilon - \varepsilon_f(T) = \phi + P^2/2m$ استنتج صيغة ريتشاردسون – دخمان لكثافة التيار.

2- مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة $\varepsilon_1 = KT \ \ (J)$ 20
و $\varepsilon_2 = 2KT \ \ (J)$ و $\varepsilon_3 = 3KT \ \ (J)$، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_2 = 2$ و $g_3 = 1$. والمطلوب:

1- ارسم هيكل السويات والتحللات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي.

2- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overbrace{\overline{N}_1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{\overline{N}_2}^{\varepsilon_2}, \overbrace{\overline{N}_3}^{\varepsilon_3})_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$،
ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0{,}368$ و $e^{-2} = 0{,}135$ و $e^{-3} = 0{,}05$).

3- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(\overbrace{\overline{N}_1 + 1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{\overline{N}_2 - 2}^{\varepsilon_2}, \overbrace{\overline{N}_3 + 1}^{\varepsilon_3})$.

3- استفد من صيغتي تابع التحاص $Z = \sum_i g_i\, e^{\beta \varepsilon_i}$ وتابع الكثافة الاحتمالي $P_i = \dfrac{g_i}{Z}\, e^{\beta \varepsilon_i}$ في إيجاد ما يلي: 20

أ- القيمة الوسطى $\overline{\varepsilon}$، والانحراف المعياري $\overline{\varepsilon^2}$، والتشتت $\overline{\Delta \varepsilon^2}$، بدلالة تابع التحاص Z والمشتقة $\partial/\partial\beta$.

ب- صيغة طاقة الجملة بدلالة المشتقة $\partial/\partial T$.

س2- أجب عن البنود التالية: (35 درجة).

1- استنتج تابع كثافة مركبة السرعة المطلقة ($G(\vartheta_x) = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha \vartheta_x^2}$ غوص الطبيعي)، أي ما يعرف بالسرعة الموجهة، 18

ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال. ثم أوجد قيمة ما يلي: $\overline{\vartheta_x}$ ، $\overline{\vartheta_x^2}$ ، $\overline{\Delta \vartheta_x^2}$

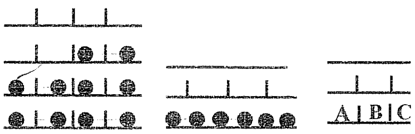
توجيه: استفد في الحل من تكاملات بواسون التالية

$$\int_0^{+\infty} x^n\, e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{\frac{n}{2}!\, 2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}} \quad ; n \ (\text{زوجي})$$

$$\int_0^{+\infty} x^n\, e^{-\alpha x^2} dx = \frac{m!}{2\alpha^{m+1}} \quad ; n \ (\text{فردي}) \ \ \wp \ \ n = 2m+1 \ \ \wp \ \ m \geq 0$$

2- حدد درجة حرارة وطاقة كل من الجمل الموضحة بالشكل (مرتفعة أو منخفضة)، مع التعليل المناسب ؟. 17

- أعد رسم الجمل، ثم حدد (لكل منها) نوع الجسيمات الموزعة على سوياتها، (كلاسيكية، بوزونات. فيرميونات) والحالة الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.
- ما هو اسم الحالة التي تخضع لها البوزونات.
- عرف (مستلهماً من الشكل المناسب) سوية فيرمي، وحدد موقعها عليه.



مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الثلاثاء 21/ 9/ 2021

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2020 – 2021 (تسعون درجة)

ج 1: (55 درجة).

1- بما أن كمية الحركة المتبقية هي المتعلقة بالمركبتين y و z تصبح علاقة فرق الطاقة بالشكل 15

$$\varepsilon - \varepsilon_f(T) = \phi + \frac{P_y^2 + P_z^2}{2m}$$

بالتعويض في عبارة التكامل الأخيرة نجد

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}\, dP_y\, dP_Z \quad \Rightarrow \quad J_x = \frac{2q}{\beta h^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta\left[\phi+\frac{P_y^2+P_z^2}{2m}\right]}\, dP_y\, dP_Z$$

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3} e^{\beta\phi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{P_y^2}{2mKT}}\, dP_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{P_z^2}{2mKT}}\, dP_Z$$ 5

وبالاستفادة من تكاملات بواسون

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2}dx = 2\int_0^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2}dx = 2\left(\frac{0!}{0!\,2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad ;\ n=0 \ (\text{زوجي})$$

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3} e^{-\phi/KT}\sqrt{2\pi mKT}\sqrt{2\pi mKT}$$ 5

وباعتبار $\beta = |1/KT|$ نجد صيغة ريتشاردسون – دخمان المطلوبة

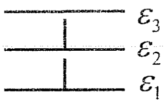
$$J_x = \frac{4\pi m q}{\beta^2 h^3} e^{-\phi/KT} = \frac{4\pi m q}{h^3}(KT)^2 e^{-\phi/KT}$$

أو بالشكل 5

$$J_x = \frac{4\pi m K^2 q}{h^3} T^2 e^{-\phi/KT} = \lambda T^2 e^{-\phi/KT} \quad ; \lambda = \frac{4\pi m_e K^2 q_e}{h^3} \approx 1{,}2\times 10^6 \ A/m^2 k^2$$

2- المسألة:

1- عدد حالات التوزع الماكروي: 27



$$N_o = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!} = \frac{(1000+3-1)!}{1000!\,(3-1)!} = \frac{1002!}{1000!\times 2!} = \frac{1002\times1001\times1000!}{1000!\times 2!} = 501501$$ 4

2- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N_3}})_{max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i/KT} \qquad ; Z = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} + e^{-3} = 1{,}056$$ 2

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1 e^{-\varepsilon_1/KT} = \frac{1000}{1{,}056} 2e^{-1} \approx 697$$ 2

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 e^{-\varepsilon_2/KT} = \frac{1000}{1{,}056} 2e^{-2} \approx 256$$ 2

$$N_3 = \frac{N}{Z} g_3 e^{-\varepsilon_3/KT} = \frac{1000}{1{,}056} e^{-3} \approx 47$$ 2

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 697 + 256 + 47 = 1000$$ 2

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}} = \sum_i N_i\,\varepsilon_i = N_1\,\varepsilon_1 + N_2\,\varepsilon_2 + N_3\,\varepsilon_3 = 697KT + 256\times 2KT + 47\times 3KT = 1350\,KT$$ 2

3- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N!\,\left(\frac{2^{N_1}}{N_1!}\frac{2^{N_2}}{N_2!}\frac{1^{N_3}}{N_3!}\right)$$

$$W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N!\,\left(\frac{2^{N_1+1}}{(N_1+1)!}\frac{2^{N_2-2}}{(N_2-2)!}\frac{1^{N_3+1}}{(N_3+1)!}\right)$$ 4

$$\frac{W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)}} = \frac{2^{N_1}}{N_1!}\frac{2^{N_2}}{N_2!}\frac{1}{N_3!}\frac{(N_1+1)!}{2^{N_1+1}}\frac{(N_2-2)!}{2^{N_2-2}}\frac{(N_3+1)!}{1} = \frac{2^{N_1}}{N_1!}\,\frac{2^{N_2}}{N_2(N_2-1)(N_2-2)!}\,\frac{1}{N_3!}\,\frac{(N_1+1)N_1!}{2\times 2^{N_1}}\,\frac{(N_2-2)!}{2^{-2}\times 2^{N_2}}\,\frac{(N_3+1)N_3!}{1}$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)}} = 2\,\frac{(N_1+1)(N_3+1)}{N_2(N_2-1)} = 2\,\frac{(698)(48)}{256(255)} = 1{,}026 \quad\Rightarrow\quad W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}} > W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)}$$

3- أ- نحسب القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}$ من العلاقة 20

$$\bar{\varepsilon} = \sum_i \varepsilon_i\,P_i = \frac{1}{Z}\sum_i \varepsilon_i\,g_i\,e^{\beta\,\varepsilon_i}$$

بما أن $\frac{\partial Z}{\partial\beta} = \sum_i \varepsilon_i\,g_i\,e^{\beta\,\varepsilon_i}$ نجد بالتعويض $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta} = \frac{\partial Z/Z}{\partial\beta} = \frac{\partial Ln Z}{\partial\beta}$ 5

$$\overline{\varepsilon^2} = \sum_i \varepsilon_i^2\,P_i = \frac{1}{Z}\sum_i \varepsilon_i^2\,g_i\,e^{\beta\,\varepsilon_i}$$

بما أن $\frac{\partial Z}{\partial\beta} = \sum_i \varepsilon_i\,g_i\,e^{\beta\,\varepsilon_i}$ يكون $\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2} = \sum_i \varepsilon_i^2\,g_i\,e^{\beta\,\varepsilon_i}$ نجد بالتعويض $\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2}$ 5

$$\overline{\Delta\varepsilon^2} = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2} - \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial Z}{\partial\beta} - \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{Z^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)\frac{\partial Z}{\partial\beta} - \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial Z/Z}{\partial\beta}\right) + \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2 - \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial Ln Z}{\partial\beta}\right) = \frac{\partial^2 Ln Z}{\partial\beta^2}$$ 5

ب- إيجاد صيغة طاقة الجملة بدلالة المشتقة $\partial/\partial T$.

وجدنا أن $\bar{\varepsilon} = \frac{\partial Ln Z}{\partial\beta}$ وبالاستفادة من العلاقة بين المشتقات $\frac{\partial}{\partial\beta} = KT^2\frac{\partial}{\partial T}$

ومن علاقة الطاقة الداخلية $U = N\,\bar{\varepsilon}$ نجد

$$U = N\,\bar{\varepsilon} = N\left(\frac{\partial Ln Z}{\partial\beta}\right)_V = NKT^2\frac{\partial Ln Z}{\partial T}$$ 5

ج 2: (35 درجة).

1: نعيد كتابة العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لمركبات سرعها المطلقة وفق توزع M-B في المجالات $[\vartheta_x,\vartheta_x+d\vartheta_x]$ ، $[\vartheta_y,\vartheta_y+d\vartheta_y]$ ، $[\vartheta_z,\vartheta_z+d\vartheta_z]$ كما يلي: 18

$$dN(\vartheta_{x,y,z}) = \frac{N}{Z}\,e^{\beta\varepsilon}\,g(\vartheta_{x,y,z})\,d\vartheta_{x,y,z} \qquad (1)$$

لمعرفة عدد الجسيمات المتحركة باتجاه أحد المحاور (ox مثلاً). (أي لمعرفة $dN(\vartheta_x)$ التي تنحصر سرعها في المجال $[\vartheta_x,\vartheta_x+d\vartheta_x]$)، نُعيد صياغة مفهوم عنصر فراغ الاندفاع الطوري بالشكل التالي:

$$d\Gamma(P_{x,y,z}) = dq_V . dP_V = V\, dP_x\, dP_y\, dP_z \qquad (2)$$

وبما أن $dP_x = m\,d\vartheta_x$ و $dP_y = m\,d\vartheta_y$ و $dP_z = m\,d\vartheta_z$

بالتعويض في (2) بعد استبدال مركبات الاندفاع بمركبات السرع

$$d\Gamma(\vartheta_{x,y,z}) = dq_V . dP_V = V\, m^3\, d\vartheta_x\, d\vartheta_y\, d\vartheta_z$$

وبالعودة إلى العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري التي تصبح بالشكل التالي:

$$g(\vartheta_{x,y,z})\, d\vartheta_{x,y,z} = C\, d\Gamma(\vartheta_{x,y,z}) = CV\, m^3\, d\vartheta_x\, d\vartheta_y\, d\vartheta_z \qquad (3)$$

وإذا اعتبرنا الطاقة الإجمالية طاقة حركية

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m\, \vartheta^2 = \frac{1}{2} m\,(\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2) \qquad (4)$$

وإذا أخذنا تابع التحاص لجسيم واحد

$$Z = CV\,(2\pi\, m KT)^{3/2} \qquad (5)$$

كما نأخذ مضروب لاغرانج بعين الاعتبار

$$\beta = -1/KT \qquad (6)$$

نعوض (3) و (4) و (5) و (6) في (1) نحصل على عدد الجسيمات الموزعة تبعاً لمركبات سرعها المطلقة بالشكل التالي:

$$dN(\vartheta_{x,y,z}) = \frac{N}{CV\,(2\pi\, m KT)^{3/2}}\, e^{-\frac{m}{2KT}(\vartheta_x^2+\vartheta_y^2+\vartheta_z^2)}\, CV\, m^3\, d\vartheta_x\, d\vartheta_y\, d\vartheta_z$$

$$dN(\vartheta_{x,y,z}) = N\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_x^2}\, d\vartheta_x\; e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_y^2}\, d\vartheta_y\; e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_z^2}\, d\vartheta_z$$

5

لمعرفة عدد الجسيمات المتحركة باتجاه أحد المحاور (وليكن ox مثلاً) ندع مركبة سرعته دون تكامل.
ونكامل مركبات السرعة على المحورين الآخرين oy و oz في المجال $]-\infty, +\infty[$ كما يلي:

$$dN(\vartheta_x) = N\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_x^2}\, d\vartheta_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_y^2}\, d\vartheta_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_z^2}\, d\vartheta_z$$

نحل التكاملات باستخدام تكاملات بواسون وذلك بفرض $\alpha = m/2KT$ على النحو التالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_y^0\, e^{-\alpha\vartheta_y^2}\, d\vartheta_y = 2\int_0^{+\infty} \vartheta_y^0\, e^{-\alpha\vartheta_y^2}\, d\vartheta_y = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_z^0\, e^{-\alpha\vartheta_z^2}\, d\vartheta_z = 2\int_0^{+\infty} \vartheta_z^0\, e^{-\alpha\vartheta_z^2}\, d\vartheta_z = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

بالتعويض عن $\alpha = m/2KT$ وعن التكاملات بقيمها نجد:

$$\boxed{dN(\vartheta_x) = N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{\pi}{\alpha}\, e^{-\alpha\vartheta_x^2}\, d\vartheta_x = N\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha\vartheta_x^2}\, d\vartheta_x}$$

للحصول على تابع كثافة مركبة السرعة المطلقة ، نقسم الطرفين على N

$$dF(\vartheta_x) = \frac{dN(\vartheta_x)}{N} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha\vartheta_x^2}\, d\vartheta_x$$

5

وبملاحظة أن المقدار $G(\vartheta_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha\vartheta_x^2}$ يمثل تابع كثافة غوص الطبيعي،

وهو تابع كثافة احتمال. لأنه يحقق الشرط الواحدي.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(\upsilon_x)\, dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\upsilon_x^2}\, d\upsilon_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, 2\int_0^{+\infty} \upsilon_x^0\, e^{-\alpha\upsilon_x^2}\, d\upsilon_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\; 2\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1$$

2

إيجاد قيم المقادير: $\overline{\vartheta_x}$ ، $\overline{\vartheta_x^2}$ ، $\overline{\Delta\upsilon_x}^2$

بما أن الأس فردي فنجد من تكاملات بواسون

$$\overline{\vartheta_x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_x\, G(\vartheta_x)\, d\vartheta_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_x^{\,1}\, e^{-\alpha \vartheta_x^2} d\vartheta_x = 0$$ 2

تشير هذه النتيجة إلى أن عدد الجسيمات المتحركة وفق ox^+ يساوي العدد المتحرك وفق ox^-

$$\overline{\vartheta_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_x^2\, G(\vartheta_x)\, d\vartheta_x = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \vartheta_x^{\,2}\, e^{-\alpha \vartheta_x^2} d\vartheta_x = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \vartheta_x^{\,2}\, e^{-\alpha \vartheta_x^2} d\vartheta_x}_{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{KT}{m}$$ 2

$$\overline{\Delta \upsilon_x^2} = \overline{\upsilon_x^2} - \overline{\upsilon}_x^{\,2} = 1/2\alpha$$ 2

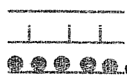
2: 17 درجة حرارة وطاقة جميع الجمل منخفضة (بجوار الصفر المطلق)، لأن جسيماتها تحتل السويات الدنيا للطاقة. 1

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{3}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{0})$ ،

الوزن الإحصائي

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^{3} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(3,0,0)} = 3!\left(\frac{3^3}{3!}\, \frac{3^0}{0!}\, \frac{1^0}{0!}\right) = 27$$ 4

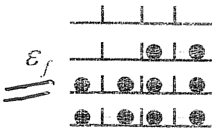
الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{5}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{0})$



الوزن الإحصائي

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3} \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(5,0,0)} = \frac{(6+1-1)!}{6!\,0!}\, \frac{(0+4-1)!}{0!\,3!}\, \frac{(0+1-1)!}{0!\,0!} = 1\times1\times1 = 1$$ 4

الجملة فيرميونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{4}, \overset{\varepsilon_2}{4}, \overset{\varepsilon_3}{2}, \overset{\varepsilon_4}{0})$



الوزن الإحصائي 4 1

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{3} \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(4,4,2,0)} = \frac{4!}{4!\,(4-4)!}\, \frac{4!}{4!\,(4-4)!}\, \frac{4!}{2!\,(4-2)!}\, \frac{4!}{0!\,(4-0)!} = 1\times1\times6\times1 = 6$$

- تخضع البوزونات لحالة تكاثف آينشتين عند درجة الصفر المطلق. 1
- تعريف سوية فيرمي: هي أعلى سويات الطاقة المشغولة كلياً أو جزئياً بالفيرميونات (عند درجة الصفر المطلق)، 2

حيث تكون السويات الدنيا $\varepsilon < \varepsilon_f$ مشغولة بالكامل (ممتلئة)، أما العليا $\varepsilon > \varepsilon_f$ فتكون فارغة تماماً.

تشغل سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(0)}$ السوية الثالثة (المشغولة جزئياً بالفيرميونات) كما هو موضح في الشكل السابق.

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الثاني للعام الدراسي 2020 - 2021

س1- أجب عن البنود التالية: (45 درجة).

1- عرف عنصر فراغ الحجم الطوري $d\Gamma$، ثم استنتج حجوم العناصر التالية $d\Gamma(P)$ و $d\Gamma(\upsilon)$ و $d\Gamma(\varepsilon)$ 10

2- مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة $\varepsilon_1 = KT \ (J)$ و $\varepsilon_2 = 2KT \ (J)$ و $\varepsilon_3 = 3KT \ (J)$، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_3 = 2$ و $g_2 = 1$. والمطلوب: 20

1- ارسم هيكل السويات والتحللات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي.

2- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N_3}})_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$، وأنها حالة توزع طبيعي، ثم احسب طاقة هذه الحالة بدلالة KT. (علماً أن: $e^{-1} = 0,368$ و $e^{-2} = 0,135$ و $e^{-3} = 0,05$).

3- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1 + 1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2 - 2}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N_3 + 1}})$

3- استفد من صيغتي تابع التحاص $Z = \sum_i g_i\, e^{\beta \varepsilon_i}$ وتابع الكثافة الاحتمالي $P_i = \frac{g_i}{Z} e^{\beta \varepsilon_i}$ في إيجاد ما يلي: 15

أ- القيمة الوسطى $\overline{\varepsilon}$، والانحراف المعياري $\overline{\varepsilon^2}$، والتشتت $\overline{\Delta \varepsilon^2}$، بدلالة تابع التحاص Z والمشتقة $\partial / \partial \beta$.

ب- صيغة طاقة الجملة بدلالة المشتقة $\partial / \partial T$.

س2- أجب عن البنود التالية: (45 درجة).

1- لدينا تابع كثافة السرعة المطلقة في إحصاء مكسويل – بولتزمان $f(\vartheta^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2 e^{-\alpha \vartheta^2}$ (حيث $\alpha = m/2kT$). 20

والمطلوب: برهن أن $f(\vartheta^2)$ تابع كثافة احتمال، ثم أوجد قيم السرع التالية ϑ_H و $\overline{\vartheta}$ و $\overline{\vartheta^2}$ ومثلها على منحني تابع الكثافة، ثم استفد من النتائج السابقة في الحصول على قيم الطاقات الموافقة التالية $(\varepsilon_H)_{Clas}$ و $(\overline{\varepsilon})_{Clas}$.

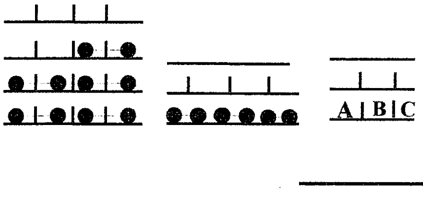
توجيه: استفد في الحل من تكاملات بواسون التالية (بحالة n زوجي) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{\frac{n}{2}!\, 2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}}$

2- أوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال $N_o(\vartheta_H \to 1,6\ \vartheta_H)$. 5

علماً أن قيم تابع الخطأ الموافقة: $E_r(1) = 0,8427$ و $E_r(1,6) = 0,9763$

3- حدد درجة حرارة وطاقة كل من الجمل الموضحة بالشكل (مرتفعة أو منخفضة)، مع التعليل المناسب ؟ 20

- أعد رسم الجمل، ثم حدد (لكل منها) نوع الجسيمات الموزعة على سوياتها، (كلاسيكية، بوزونات. فيرميونات) والحالة الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.
- ما هو اسم الحالة التي تخضع لها البوزونات.
- عرف (مستلهماً من الشكل المناسب) سوية فيرمي، وحدد موقعها عليه.



مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الأربعاء 19 / 8 / 2021

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الثاني للعام الدراسي 2020 – 2021 (تسعون درجة)

ج 1: 95 درجة

10

1- يعطى عنصر الفراغ الطوري $\Gamma(q,P)$ بدلالة إحداثيي الموضع q والاندفاع P المعممين. فيكون عنصر حجم الفراغ الطوري $d\Gamma$ بدلالة عنصري الحجم dq_V و dP_V (الخاصين بالموضع والاندفاع على الترتيب)، بالشكل:

$$d\Gamma = dq_V . dP_V \qquad (1)$$

1

نفرض للسهولة أن عنصر الحجم الخاص بالموضع مساوياً للحجم $dq_V = V$ لأنه يمثل جداءات لعناصر الموضع.

<u>عنصر فراغ الاندفاع الطوري:</u>

نأخذ عنصر الحجم الخاص بالاندفاع مساوياً لعنصر حجم الكرة التي نصف قطرها الاندفاع P ذاته كما يلي:

$$dP_V = d(\frac{4}{3}\pi P^3) = 4\pi P^2 dP$$

بالتعويض في (1) عن كلٍ بقيمته نحصل على عنصر فراغ الاندفاع الطوري:

$$\boxed{d\Gamma(P) = 4\pi V P^2 dP} \qquad (2)$$

3

<u>عنصر فراغ السرعة الطوري:</u>

نجده من علاقة كمية الحركة بالسرعة حسب العلاقة:

$$P = m\vartheta \quad \Rightarrow \quad dP = m\, d\vartheta$$

وبالتعويض في (2) عن كلٍ بقيمته نحصل على عنصر فراغ السرعة الطوري :

$$\boxed{d\Gamma(\vartheta) = 4\pi V m^3 \vartheta^2 d\vartheta} \qquad (3)$$

3

<u>عنصر فراغ الطاقة الطوري:</u>

نجده من عبارة الطاقة الحركية (باعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم المدروس هي طاقة حركية فقط).

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m\vartheta^2 = \frac{P^2}{2m} \qquad (*)$$

وكما هو واضح يمكن إيجاده بالتعويض عن قيمة الاندفاع من (*) في (2) كما يلي:

$$P^2 = 2m\varepsilon \;\Rightarrow\; P = \sqrt{2m\varepsilon} \;\Rightarrow\; dP = \frac{m\,d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}$$

وبالتعويض في (2) نحصل على عنصر فراغ الطاقة الطوري :

$$d\Gamma(\varepsilon) = 4\pi V\, 2m\varepsilon \frac{m\,d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} = 2\pi V \sqrt{2m}\,\sqrt{\varepsilon}\, 2m\, d\varepsilon$$

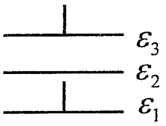
3

$$\boxed{d\Gamma(\varepsilon) = 2\pi V (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon} \qquad (4)$$

<u>2- المسألة:</u>

20

1- عدد حالات التوزع الماكروي:



$$N_o = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!} = \frac{(1000+3-1)!}{1000\,!\,(3-1)!} = \frac{1002\,!}{1000\,!\times 2\,!} = \frac{1002\times 1001\times 1000!}{1000\,!\times 2\,!} = 501501$$ 2

2- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N_3}})_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i/KT} \qquad ; Z = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = 2e^{-1} + e^{-2} + 2e^{-3} = 0{,}971$$ 2

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1 e^{-\varepsilon_1/KT} = \frac{1000}{0{,}971} 2e^{-1} \approx 758$$ 2

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 e^{-\varepsilon_2/KT} = \frac{1000}{0{,}971} e^{-2} \approx 139$$ 2

$$N_3 = \frac{N}{Z} g_3 \, e^{-\varepsilon_3/KT} = \frac{1000}{0{,}971} 2e^{-3} \approx 103 \quad (2)$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 758 + 139 + 103 = 1000 \quad (2)$$

وهي حالة توزع طبيعي لأن $N_1 > N_2 > N_3$

طاقة الحالة الأكثر احتمال (1)

$$U_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}} = \sum_i N_i \, \varepsilon_i = N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + N_3 \varepsilon_3 = 758\,KT + 139 \times 2KT + 103 \times 3KT = 1345\,KT \quad (2)$$

3- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}} = N! \prod_i \frac{g_i^{\,N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1}}{N_1!} \frac{1^{N_2}}{N_2!} \frac{2^{N_3}}{N_3!}\right)$$

$$W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)} = N! \prod_i \frac{g_i^{\,N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1+1}}{(N_1+1)!} \frac{1^{N_2-2}}{(N_2-2)!} \frac{2^{N_3+1}}{(N_3+1)!}\right)$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)}} = \frac{2^{N_1}}{N_1!} \frac{1^{N_2}}{N_2!} \frac{2^{N_3}}{N_3!} \frac{(N_1+1)!}{2^{N_1+1}} \frac{(N_2-2)!}{1^{N_2-2}} \frac{(N_3+1)!}{2^{N_3+1}} = \frac{2^{N_1}}{N_1!} \frac{1}{N_2(N_2-1)(N_2-2)!} \frac{2^{N_3}}{N_3!} \frac{(N_1+1)N_1!}{2 \times 2^{N_1}} \frac{(N_2-2)!}{1} \frac{(N_3+1)N_3!}{2 \times 2^{N_3}}$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)}} = \frac{(N_1+1)(N_3+1)}{4N_2(N_2-1)} = \frac{(759)(104)}{4 \times 139(138)} \approx 1{,}029 \quad \Rightarrow W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}} > W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)} \quad (5)$$

3- أ- نحسب القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}$ من العلاقة (15)

$$\bar{\varepsilon} = \sum_i \varepsilon_i P_i = \frac{1}{Z} \sum_i \varepsilon_i \, g_i \, e^{\beta \varepsilon_i}$$

بما أن $\dfrac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \varepsilon_i \, g_i \, e^{\beta \varepsilon_i}$ نجد بالتعويض $\bar{\varepsilon} = \dfrac{1}{Z} \dfrac{\partial Z}{\partial \beta} = \dfrac{\partial Z / Z}{\partial \beta} = \dfrac{\partial Ln Z}{\partial \beta}$ (4)

$$\overline{\varepsilon^2} = \sum_i \varepsilon_i^{\,2} P_i = \frac{1}{Z} \sum_i \varepsilon_i^{\,2} g_i \, e^{\beta \varepsilon_i}$$

بما أن $\dfrac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \varepsilon_i \, g_i \, e^{\beta \varepsilon_i}$ يكون $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \sum_i \varepsilon_i^{\,2} g_i \, e^{\beta \varepsilon_i}$ نجد بالتعويض $\overline{\varepsilon^2} = \dfrac{1}{Z} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$ (4)

$$\overline{\Delta \varepsilon^2} = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{Z}\right) \frac{\partial Z}{\partial \beta} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}\right) + \frac{1}{Z^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right) \frac{\partial Z}{\partial \beta} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial Z / Z}{\partial \beta}\right) + \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2 - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial Ln Z}{\partial \beta}\right) = \frac{\partial^2 Ln Z}{\partial \beta^2} \quad (4)$$

ب- إيجاد صيغة طاقة الجملة بدلالة المشتقة $\partial / \partial T$.

وجدنا أن $\bar{\varepsilon} = \dfrac{\partial Ln Z}{\partial \beta}$ وبالاستفادة من العلاقة بين المشتقات $\dfrac{\partial}{\partial \beta} = KT^2 \dfrac{\partial}{\partial T}$

ومن علاقة الطاقة الداخلية $U = N \bar{\varepsilon}$ نجد

$$U = N \bar{\varepsilon} = N \left(\frac{\partial Ln Z}{\partial \beta}\right)_V = NKT^2 \frac{\partial Ln Z}{\partial T} \quad (3)$$

ج 2: 45 درجة

1: نبرهن أن $f(\vartheta^2)$ تابع كثافة احتمال إذا حقق الشرط الواحدي. لذا نجري التكامل على السرعة في المجال $]0\to\infty[$. 20

$$\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^\infty \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

$$\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1$$ 3

<u>السرعة الأكثر احتمالاً</u> ϑ_H (Most probable speed):

نجدها باشتقاق تابع الكثافة $f(\vartheta^2) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}$ وإعدام المشتق كما يلي:

$$\frac{\partial f(\vartheta^2)}{\partial\vartheta} = 0 \Rightarrow 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\left(2\vartheta\, e^{-\alpha\vartheta^2} - 2\alpha\vartheta\vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\right) = 0 \Rightarrow 2\vartheta\, e^{-\alpha\vartheta^2}(1-\alpha\vartheta^2) = 0$$

الحلول الناتجة عندما $\vartheta\, e^{-\alpha\vartheta^2} = 0$ هي $\vartheta = \infty$ و $\vartheta = 0$ وهي غير مقبولة.

وعندما $1-\alpha\vartheta^2 = 0$ نجد:

$$\vartheta_H = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \qquad ; \alpha = \frac{m}{2KT}$$ 3

<u>القيمة الوسطى للسرعة المطلقة</u> $\bar{\vartheta}$: (Average molecular speed)

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى (واستخدام تكاملات بواسون)

$$\bar{\vartheta} = \frac{\int_0^\infty \vartheta f(\vartheta^2)\,d\vartheta}{\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta} = \int_0^\infty \vartheta f(\vartheta^2)\,d\vartheta \qquad ; \int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta = 1$$

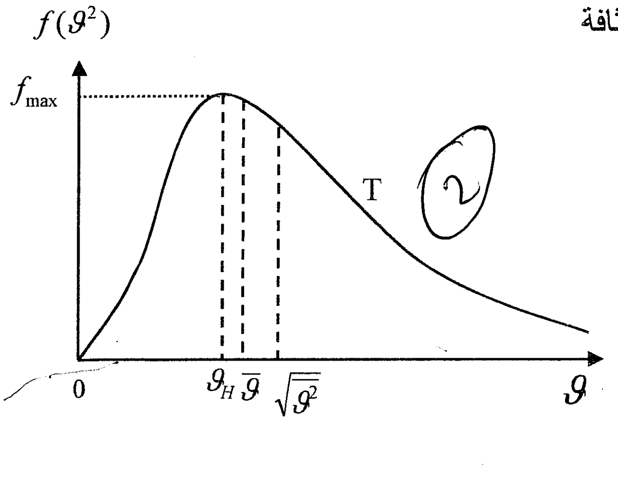
$$\bar{\vartheta} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty \vartheta^3\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta}_{1/2\alpha^2} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{2\alpha^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\vartheta_H \approx 1{,}13\,\vartheta_H$$ 3

<u>القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة</u> $\overline{\vartheta^2}$: (Mean – Square speed)

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta = 1$ نجد: 3

$$\overline{\vartheta^2} = \int_0^\infty \vartheta^2 f(\vartheta^2)\,d\vartheta = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty \vartheta^4\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} = \frac{3}{2}\frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2}\vartheta_H^2 = 3\frac{KT}{m} \Rightarrow \sqrt{\overline{\vartheta^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\vartheta_H \approx 1{,}22\,\vartheta_H$$

تمثيل السرع المستنتجة ϑ_H و $\bar{\vartheta}$ و $\overline{\vartheta^2}$ على منحني تابع الكثافة



<u>الطاقة الأكثر احتمالاً</u> $(\varepsilon_H)_{Clas}$

نفرض الطاقة الإجمالية لجسيم الغاز الكلاسيكي طاقة حركية فقط.

$$\varepsilon_H = m\vartheta_H^2/2$$

$$(\vartheta_H)_{Clas} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad \text{(السرعة الأكثر احتمالاً)}$$

$$(\varepsilon_H)_{Clas} = \frac{m}{2}\frac{2KT}{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\varepsilon_H)_{Clas} = KT}$$ 3

الطاقة الوسطى $(\bar{\varepsilon})_{Clas}$:

باعتبار السرعة المميزة (القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة $\overline{\vartheta^2} = 3\frac{KT}{m}$)، نجد:

$$(\bar{\varepsilon})_{Clas} = \overline{m\vartheta^2/2} = \frac{m}{2}\,\overline{\vartheta^2} = \frac{m}{2}3\frac{KT}{m} \Rightarrow \quad \boxed{(\bar{\varepsilon})_{Clas} = \frac{3}{2}KT}$$ 3

$N_o(0 \to v_o) = N\left[E_r(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, x\, e^{-x^2}\right]$ (*)

-2 نكتب المجال المطلوب بالشكل: 5

$$N_o(\vartheta_H \to 1{,}6\ \vartheta_H) = N_o(0 \to 1{,}6\ \vartheta_H) - N_o(0 \to \vartheta_H)$$ 2

نستخدم (*) في التعبير عن قيمة كلٍ من $N_o(0 \to 1{,}6\ \vartheta_H)$ و $N_o(0 \to \vartheta_H)$ كما يلي:

$$N_o(\vartheta_H \to 1{,}6\,\vartheta_H) = N\left[E_r(1{,}6) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}1{,}6\,e^{-(1{,}6)^2}\right] - N\left[E_r(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}1\,e^{-(1)^2}\right]$$

$$N_o(\vartheta_H \to 1{,}6\,\vartheta_H) = N\left[E_r(1{,}6) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1{,}6}{e^{(1{,}6)^2}} - E_r(1) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{e}\right]$$

وبإجراء الحسابات والتعويض عن $E_r(1{,}6)$ و $E_r(1)$ بقيمتيهما من جدول الخطأ نجد:

$$N_o(\vartheta_H \to 1{,}6\,\vartheta_H) = N[0{,}9763 - 0{,}1396 - 0{,}8427 + 0{,}4151] = 0{,}4091\ N = 40{,}91\ \%\ N$$ 3

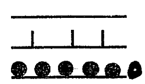
:3 درجة حرارة وطاقة جميع الجمل منخفضة (بجوار الصفر المطلق)، لأن جسيماتها تحتل السويات الدنيا للطاقة. 1 20

- الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{3}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{0})$ ،

الوزن الإحصائي

$$W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(3,0,0)} = 3!\left(\frac{3^3}{3!}\frac{3^0}{0!}\frac{1^0}{0!}\right) = 27$$ 5

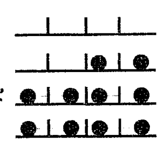
- الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{5}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{0})$



الوزن الإحصائي

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(5,0,0)} = \frac{(5+1-1)!}{5!\,0!}\ \frac{(0+4-1)!}{0!\,3!}\ \frac{(0+1-1)!}{0!\,0!} = 1\times1\times1 = 1$$ 5

- الجملة فيرميونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{4}, \overset{\varepsilon_2}{4}, \overset{\varepsilon_3}{2}, \overset{\varepsilon_4}{0})$



سوية فيرمي ε_f الوزن الإحصائي

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(4,4,2,0)} = \frac{4!}{4!\,(4-4)!}\ \frac{4!}{4!\,(4-4)!}\ \frac{4!}{2!\,(4-2)!}\frac{4!}{0!\,(4-0)!} = 1\times1\times6\times1 = 6$$ 5

- تخضع البوزونات لحالة تكاثف آينشتين عند درجة الصفر المطلق. 1
- تعريف سوية فيرمي: هي أعلى سويات الطاقة المشغولة كلياً أو جزئياً بالفيرميونات (عند درجة الصفر المطلق)، حيث تكون السويات الدنيا $\varepsilon < \varepsilon_f$ مشغولة بالكامل (ممتلئة)، أما العليا $\varepsilon > \varepsilon_f$ فتكون فارغة تماماً. 2

تشغل سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(0)}$ السوية الثالثة (المشغولة جزئياً بالفيرميونات) كما هو موضح في الشكل السابق. 1

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2020 - 2021

س1- أجب عن البنود التالية: (55 درجة)

1- استنتج عبارة **رقم الانشغال** $N_{i(M-B)\,\max}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج). 15

2- مسألة: جملة مكونة من جسيمين متمايزين موزعين على ثلاث سويات للطاقة $\varepsilon_1 = KT$ ، $\varepsilon_2 = 2KT$ ، $\varepsilon_3 = 3KT$
السويات متحللة بالشكل: $g_1 = g_2 = 2$ و $g_3 = 1$ والمطلوب: 25

- أوجد حالات التوزع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد نسب أرقام الانشغال، ما نوع التوزع الحاصل (طبيعي أم لا).
- أوجد تحاصي الجملة والطاقم (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.
- تحقق من صحة نتائجك بحساب طاقم الجملة
- أوجد (مع تمثيل كافة الحالات الميكروية) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{1}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$ في الحالات التالية:
1- الجسيمان متمايزان A و B. 2- الجسيمان بوزونان. 3- الجسيمان فيرميونان.

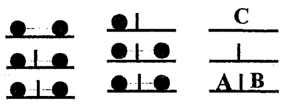
3- تعطى عبارة الكثافة السطحية للتيار الإلكتروني بالعلاقة $J_x = \dfrac{2q}{\beta h^3} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta[\varepsilon - \varepsilon_f(T)]}\, dP_y\, dP_Z$ 15

فإذا علمت أن فرق الطاقة $\varepsilon - \varepsilon_f(T) = \phi + P^2/2m$ استنتج صيغة ريتشاردسون – دخمان لكثافة التيار.

س2- أجب عن البندين التاليين: (35 درجة)

1- استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل – بولتزمان (بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$).
ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال. 20

2- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات. فيرميونات) الموزعة على السويات فيها 15



ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

توجيه: استفد في الحل من تكاملات بواسون التالية (بحالة n زوجي) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{\frac{n}{2}!\, 2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}}$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الأحد 7/ 2 / 2021

مدرس المقرر د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2020 – 2021 (تسعون درجة)

ج 1: 55

1- استنتاج **رقم الانشغال** لتوزع $N_{i(M-B)\,max}$ 15

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$، ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{M-B})$، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln N! + \sum_i \left[N_i\, Ln\, g_i - Ln N_i!\right]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $Ln\,x! \approx x\,Ln\,x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N\,Ln N - N + \sum_i (N_i\, Ln\, g_i - N_i\, Ln N_i + N_i)$$ 5

بما أن W_{M-B} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i}\left[N\,Ln N - N + \sum_i (N_i\, Ln\, g_i - N_i\, Ln N_i + N_i)\right] dN_i \qquad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln\, g_i - Ln N_i - 1 + 1)\, dN_i = \sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i$$ 5

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات و الطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU = \sum_i \varepsilon_i\, dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i\, dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i \left(Ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta\,\varepsilon_i\right) dN_i = 0 \;\Rightarrow\; Ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta\,\varepsilon_i) \;\Rightarrow\; \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$ 5

$$\boxed{N_{i(M-B)} = g_i\, e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}} \;\Leftrightarrow\; \boxed{N_{i(M-B)} = e^{\alpha}\, g_i\, e^{\beta\varepsilon_i}}$$

2- المسألة: 25

- حالات التوزع الماكروي: $N_o = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!} = \frac{(2+3-1)!}{2!(3-1)!} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U = \sum_i N_i\,\varepsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزع الماكروي الستة.

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي: $\left\{\underbrace{(2,0,0)}_{U=2KT}, \underbrace{(0,2,0)}_{U=4KT}, \underbrace{(0,0,2)}_{U=6KT}, \underbrace{(1,1,0)}_{U=3KT}, \underbrace{(1,0,1)}_{U=4KT}, \underbrace{(0,1,1)}_{U=5KT}\right\}$. 5

- نحسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{e^{\alpha}\, g_i\, e^{\beta\varepsilon_i}}{e^{\alpha}\, g_j\, e^{\beta\varepsilon_j}} = \frac{g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT}}{g_j\, e^{-\varepsilon_j/KT}}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{2e^{-KT/KT}}{2e^{-2KT/KT}} = \frac{2e^{-1}}{2e^{-2}} = e > 1 \;\Rightarrow\; N_1 > N_2$$

$$\frac{N_1}{N_3}=\frac{2e^{-KT/KT}}{1e^{-3KT/KT}}=\frac{2e^{-1}}{1e^{-3}}=2e^2>1 \Rightarrow N_1>N_3$$

$$\frac{N_2}{N_3}=\frac{2e^{-2KT/KT}}{1e^{-3KT/KT}}=\frac{2e^{-2}}{1e^{-3}}=2e>1 \Rightarrow N_2>N_3$$

3

والتوزع طبيعي

- تحاص الجملة:

$$Z=\sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT}=2e^{-1}+2e^{-2}+e^{-3}$$

تحاص الطاقم:

$$Z_\Omega=Z^N=(2e^{-1}+2e^{-2}+e^{-3})^2=4e^{-2}+4e^{-4}+e^{-6}+8e^{-3}+4e^{-4}+4e^{-5}$$ 2

نقارنه بالعبارة:

$$Z_\Omega=\sum_i W_i e^{-U_i/KT}=W_{(2,0,0)}e^{-2}+W_{(0,2,0)}e^{-4}+W_{(0,0,2)}e^{-6}+W_{(1,1,0)}e^{-3}+W_{(1,0,1)}e^{-4}+W_{(0,1,1)}e^{-5}$$

$$Z_\Omega=4e^{-2}+4e^{-4}+e^{-6}+8e^{-3}+4e^{-4}+4e^{-5}$$ 2

فتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزع الماكروي بالشكل:

$$W_{(2,0,0)}=4\ ,\quad W_{(0,2,0)}=4,\quad W_{(0,0,2)}=1,\quad W_{(1,1,0)}=8,\quad W_{(1,0,1)}=4,\quad W_{(0,1,1)}=4$$ 2

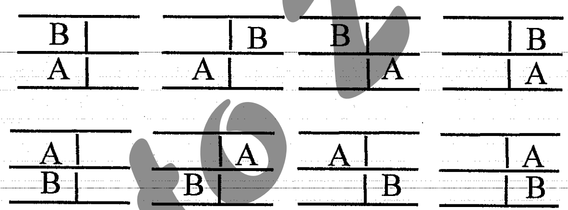
الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة (1,1,0)

- للتحقق من صحة النتائج نحسب طاقم الجملة من العلاقة $\Omega=(\sum_i g_i)^N=5^2=25$

$$\Omega=\sum_i W_i=4+4+1+8+4+4=25$$ 2

وهذا يتطابق مع الحسابات

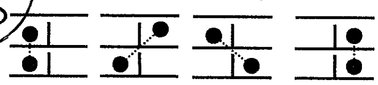
- 1- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية) $W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(1,1,0)}=2!\left(\frac{2^1}{1!}\frac{2^1}{1!}\frac{1^0}{0!}\right)=8$



3

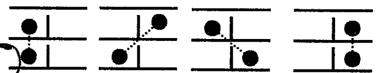
2- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}=\frac{(1+2-1)!}{1!\,(2-1)!}\frac{(1+2-1)!}{1!\,(2-1)!}\frac{(0+1-1)!}{0!\,(1-1)!}=4$$ 3



3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة (1,1,0) تحقق الشرط $g_i\geq N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

$$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}=\frac{2!}{1!\,(2-1)!}\frac{2!}{1!\,(2-1)!}\frac{1!}{0!\,(1-0)!}=4$$ 3



-3 15

بما أن كمية الحركة المتبقية هي المتعلقة بالمركبتين y و z تصبح علاقة فرق الطاقة بالشكل

$$\varepsilon-\varepsilon_f(T)=\phi+\frac{P_y^2+P_z^2}{2m}$$

بالتعويض في عبارة التكامل الأخيرة نجد

$$J_x=\frac{2q}{\beta h^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}\,dP_y\,dP_Z \quad\Rightarrow\quad J_x=\frac{2q}{\beta h^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\beta[\phi+\frac{P_y^2+P_z^2}{2m}]}\,dP_y\,dP_Z$$

$$J_x=\frac{2q}{\beta h^3}e^{\beta\phi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{P_y^2}{2mKT}}\,dP_y\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{P_z^2}{2mKT}}\,dP_Z$$ 5

وبالاستفادة من تكاملات بواسون

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = 2\int_{0}^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = 2\left(\frac{0!}{0!\,2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad ; n=0 \ (\text{زوجي})$$

$$J_x = \frac{2\,q}{\beta h^3} e^{-\phi/KT} \sqrt{2\pi m KT}\sqrt{2\pi m KT}$$

5

وباعتبار $\beta = |1/KT|$ نجد صيغة ريتشاردسون – دخمان المطلوبة

$$J_x = \frac{4\pi m\, q}{\beta^2 h^3} e^{-\phi/KT} = \frac{4\pi m\, q}{h^3}(KT)^2\, e^{-\phi/KT}$$

5

أو بالشكل

$$J_x = \frac{4\pi m K^2 q}{h^3} T^2\, e^{-\phi/KT} = \lambda\, T^2\, e^{-\phi/KT} \quad ; \lambda = \frac{4\pi m_e K^2 q_e}{h^3} \approx 1{,}2\times 10^6\ A/m^2 k^2$$

ج 2: $\boxed{35}$

1: لإيجاد تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان: 20

ننطلق من العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعها المطلقة وفق توزع M-B في مجال السرعات $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$.

$$dN(\vartheta) = \frac{N}{Z} e^{\beta m \vartheta^2/2}\, g(\vartheta)\, d\vartheta$$

2

ونعوض عن المقدار $g(\vartheta)\,d\vartheta$ بقيمته من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري

$$g(\vartheta)\,d\vartheta = C\,d\Gamma(\vartheta) = CV\,4\pi\ m^3\,\vartheta^2\,d\vartheta$$

3

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z = CV\,(2\pi m KT)^{3/2}$ ، وعن الطاقة $\varepsilon = m\vartheta^2/2$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(\vartheta) = \frac{N}{CV\,(2\pi m KT)^{3/2}} e^{-m\vartheta^2/2KT}\, CV\,4\pi m^3\,\vartheta^2\,d\vartheta$$

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(\vartheta) = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi\ KT}\right)^{3/2} \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\, d\vartheta$$

نعتبر أن $\boxed{\alpha = m/2KT}$

$$dN(\vartheta) = 4\pi N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\, d\vartheta$$

5

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع السرع بدلالة تابع كثافة السرع كما يلي:

$$dF(\vartheta) = \frac{dN(\vartheta)}{N} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\, d\vartheta = f(\vartheta^2)\,d\vartheta$$

حيث يعبر $f(\vartheta^2)$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

$$f(\vartheta^2) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}$$

5

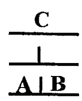
للبرهان على أن $f(\vartheta^2)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على السرعة في المجال $]0 \to \infty[$.

$$\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^\infty \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

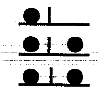
$$F(\vartheta) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1$$ 5

:2 15



الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{1})$ 1

الوزن الإحصائي $W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = 3!\left(\frac{2^2}{2!}\,\frac{2^0}{0!}\,\frac{1^1}{1!}\right) = 12$ 3



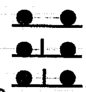
الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{1})$ 1

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(1+2-1)!}{1!\,1!} = 3\times3\times2 = 18$$ 3

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\frac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\frac{2!}{1!\,(2-1)!} = 1\times1\times2 = 2$$ 3



الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{2})$ 1

الوزن الإحصائي

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(2,2,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+1-1)!}{2!\,0!} = 3\times3\times1 = 9$$ 3

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2019 - 2020

س1- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (60 درجة)

1- استنتج عبارة **رقم الانشغال** $N_{i(M-B)}^{\max}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج). 20

2- مسألة: جملة مكونة من 3 جسيمات متمايزة موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = kT$ و $\varepsilon_2 = 2kT$، متحللتين بالشكل: $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$ والمطلوب: 20

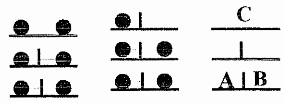
- أوجد حالات التوزع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد نسب أرقام الانشغال، ما نوع التوزع الحاصل (طبيعي أم لا).
- أوجد تحاصي الجملة والطاقم (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.
- تحقق من صحة نتائجك بحساب طاقم الجملة
- أوجد (مع تمثيل كافة الحالات الميكروية) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{2}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{1}})$ في الحالات التالية:
  1- الجسيمات متمايزة A و B و C.   2- الجسيمات بوزونات.   3- الجسيمات فيرميونات.

3- استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل – بولتزمان (بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$). 20
ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استفد في الحل من تكاملات بواسون التالية (بحالة n زوجي)
$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{\frac{n}{2}!\, 2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}}$$

س2- أجب عن النقطتين التاليتين: (30 درجة)

- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها 11



ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

- استنتج علاقة كثافة الطاقة الطيفية $\rho(\varepsilon)$ لماكس بلانك في تفسير إشعاع الجسم الأسود (الغاز الفوتوني)، ثم ضع العبارة الحاصلة بدلالة التردد والطول الموجي، ثم مثل بيانياً $\rho(\lambda)$ عند ثلاث درجات حرارة مختلفة، ماذا تستنتج ؟. 19

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الثلاثاء 20 / 10 / 2020

مدرس المقرر   د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء

الدورة التكميلية للعام الدراسي 2019 – 2020 الدرجة العظمى: تسعون درجة

أجوبة بنود السؤال الأول: (60 درجة)

ج1- استنتاج **رقم الانشغال** لتوزع $N_{i(M-B)\,\max}$ 20

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N!\prod_i \dfrac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$، ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{M-B})$، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln\,N! + \sum_i \left[N_i\, Ln\, g_i - Ln\, N_i!\right]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $Ln\,x! \approx x\,Ln\,x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\,Ln\,g_i - N_i\,Ln\,N_i + N_i)$$ 7

بما أن W_{M-B} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial\, Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i}\left[N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\,Ln\,g_i - N_i\,Ln\,N_i + N_i)\right] dN_i \qquad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln\,g_i - Ln\,N_i - 1 + 1)\, dN_i = \sum_i Ln\frac{g_i}{N_i} dN_i$$ 6

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU = \sum_i \varepsilon_i\, dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN = \sum_i dN_i$$

$$\sum_i Ln\frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i\, dN_i = 0$$

$$\sum_i \left(Ln\frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta\,\varepsilon_i\right) dN_i = 0 \Rightarrow Ln\frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta\,\varepsilon_i) \;\Rightarrow\; \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$ 7

$$\boxed{N_{i(M-B)} = g_i\, e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{N_{i(M-B)} = e^{\alpha}\, g_i\, e^{\beta\varepsilon_i}}$$

ج2- المسألة: 20

- حالات التوزع الماكروي: $N_o = \dfrac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!} = \dfrac{(3+2-1)!}{3!(2-1)!} = \dfrac{4!}{3!\,1!} = 4$

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U = \sum_i N_i\,\varepsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزع الماكروي الأربعة.

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي: $\left\{\underbrace{(3,0)}_{U=3kT}, \underbrace{(0,3)}_{U=6kT}, \underbrace{(2,1)}_{U=4kT}, \underbrace{(1,2)}_{U=5kT}\right\}$. 4

- نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{e^{\alpha} g_i e^{\beta\varepsilon_i}}{e^{\alpha} g_j e^{\beta\varepsilon_j}} = \frac{g_i e^{-\varepsilon_i/KT}}{g_j e^{-\varepsilon_j/KT}} \quad \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{1e^{-\frac{KT}{KT}}}{2e^{-\frac{2KT}{KT}}} = \frac{1}{2e^{-1}} = \frac{e}{2} > 1 \;\Rightarrow\; N_1 > N_2$$ 2

والتوزع طبيعي

- تحاص الجملة: $Z = \sum_i g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT} = e^{-1} + 2e^{-2}$

تحاص الطاقم: $Z_\Omega = Z^N = (e^{-1}+2e^{-2})^3 = e^{-3} + 6e^{-4} + 12e^{-5} + 8e^{-6}$

نقارنه بالعبارة: $Z_{\Omega}=\sum_i W_i\, e^{-U_i/kT}=W_{(3,0)}\,e^{-3}+W_{(2,1)}\,e^{-4}+W_{(1,2)}\,e^{-5}+W_{(0,3)}\,e^{-6}$

فتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزع الماكروي بالشكل:

(9) $W_{(3,0)}=1$ و $W_{(2,1)}=6$ و $W_{(1,2)}=12$ و $W_{(0,3)}=8$

الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة $(1,2)$

- للتحقق من صحة النتائج نحسب طاقم الجملة من العلاقة $\Omega=(\sum_i g_i)^N=3^3=27$

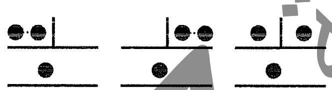
(1) وهذا يتطابق مع الحسابات $\Omega=\sum_i W_i=1+6+12+8=27$

- 1- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية) $W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i^{\,N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(1,2)}=3!\left(\frac{1^1}{1!}\,\frac{2^2}{2!}\right)=12$

B C |	| B C	B | C	C | B
A	A	A	A
A C |	| A C	A | C	C | A
B	B	B	B
A B |	| A B	A | B	B | A
C	C	C	C

(3)

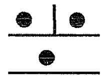
2- الجسيمات بوزونات $W_{B-E}=\prod_{i=1}^{2}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\quad\Rightarrow W_{(1,2)}=\frac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,(2-1)!}=3$



(3)

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(1,2)$ تحقق الشرط $g_i\geq N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}\quad\Rightarrow W_{(1,2)}=\frac{1!}{1!\,(1-1)!}\,\frac{2!}{2!\,(2-2)!}=1$



(3)

ج3- (20) لإيجاد تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان:

يقصد بالسرعة المطلقة العبارة التالية $\vartheta=\sqrt{\vartheta_x^2+\vartheta_y^2+\vartheta_z^2}$.

ننطلق من العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعها المطلقة وفق توزع M-B في مجال السرعات $[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$.

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{Z}e^{\beta m\vartheta^2/2}\,g(\vartheta)\,d\vartheta$$ (3)

ونعوض عن المقدار $g(\vartheta)\,d\vartheta$ بقيمتة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري

$$g(\vartheta)\,d\vartheta=C\,d\Gamma(\vartheta)=CV\,4\pi\;m^3\,\vartheta^2\,d\vartheta$$ (3)

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z=CV\,(2\pi\,m\,KT)^{3/2}$ ، وعن الطاقة $\varepsilon=m\vartheta^2/2$ ، واعتبار أن $\beta=-1/KT$. نجد:

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{CV\,(2\pi\,m\,KT)^{3/2}}e^{-m\vartheta^2/2KT}\,CV\,4\pi\,m^3\,\vartheta^2\,d\vartheta$$

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(\vartheta)=4\pi\,N\left(\frac{m}{2\pi\;KT}\right)^{3/2}\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta$$

نعتبر أن $\boxed{\alpha=m/2KT}$

$$dN(\vartheta) = 4\pi N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2} d\vartheta$$

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع السرع بدلالة تابع كثافة السرع كما يلي:

$$dF(\vartheta) = \frac{dN(\vartheta)}{N} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2} d\vartheta = f(\vartheta^2)\, d\vartheta$$

حيث يعبر $f(\vartheta^2)$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

$$f(\vartheta^2) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2}$$

8

للبرهان على أن $f(\vartheta^2)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على السرعة في المجال $]0 \to \infty[$.

$$\int_0^\infty f(\vartheta^2)\, d\vartheta = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^\infty \vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2} d\vartheta$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^\infty \vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2} d\vartheta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

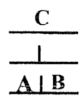
$$F(\vartheta) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1$$

6

أجوبة نقاط السؤال الثاني: (30 درجة)

11

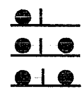
- تحديد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات. فيرميونات) وحساب وزنها الإحصائي



الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{1})$ 1

الوزن الإحصائي 2

$$W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = 3!\left(\frac{2^2}{2!}\frac{2^0}{0!}\frac{1^1}{1!}\right) = 12$$



الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{1})$ 1

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

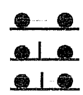
2

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(1+2-1)!}{1!\,1!} = 3\times3\times2 = 18$$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

2

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\frac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\frac{2!}{1!\,(2-1)!} = 1\times1\times2 = 2$$



الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{2})$ 1

الوزن الإحصائي

2

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(2,2,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+1-1)!}{2!\,0!} = 3\times3\times1 = 9$$

- الفوتونات هي جسيمات الطاقة الكهرطيسية (الإشعاع الكهرطيسي)، وهي تنتمي لطائفة البوزونات، وعددها داخل تجويف الجسم الأسود غير ثابت وذلك بسبب ظاهرتي الخلق Creation والإفناء Annihilation. أي: 19

$$N = \sum_i N_i \neq cte \quad \Rightarrow \quad dN \neq 0$$

فنجد من شرط الحالة الأكثر احتمالاً: $d\,Ln(W_{B-E}) + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0$ أن $\alpha = 0$. وبالتالي يكون: $e^{-\alpha} = 1$

ويصبح عدد الفوتونات التي تملك طاقة في المجال $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ وفقاً لتوزع بوزه - آينشتين:

$$dN_{(B-E)}=\frac{dg(\varepsilon)}{e^{-\alpha}e^{\varepsilon/kT}-1}=\frac{dg(\varepsilon)}{e^{\varepsilon/kT}-1} \qquad (a)$$

نكتب درجة التحلل $dg(\varepsilon)$ للسويات الواقعة في المجال $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$ بدلالة عنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma$ من العبارة

$$dg(\varepsilon)=c\,d\Gamma(\varepsilon) \qquad ; c=1/h^3 \quad \wp \quad d\Gamma(\varepsilon)=dq_V\,dp_V=V\,d\left(\frac{4}{3}\pi p^3\right)=V\,4\pi p^2 dp$$

$$dg(\varepsilon)=\frac{V4\pi p^2dp}{h^3} \qquad (*)$$

وبما أن الفوتونات أشعة كهرطيسية فهي تملك اتجاهين مستقلين للاستقطاب، ويحصل تضاعف لقيمة درجة التحلل.
وحيث أن طاقة الفوتون ε مرتبطة بزخمه p بواسطة سرعة الضوء c وفق العلاقة:

$$\varepsilon=c\,p \;\Rightarrow p=\frac{\varepsilon}{c} \;\Rightarrow dp=\frac{d\varepsilon}{c}$$

فنجد بالتعويض في (*) :

$$dg(\varepsilon)=2\,\frac{V4\pi\varepsilon^2d\varepsilon}{h^3c^3} \qquad (**)$$

نعوض (**) في (a) فنجد:

$$dN_{(B-E)}=\frac{V8\pi\varepsilon^2}{h^3c^3}\frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1} \qquad (b)$$

وبما أن طاقة الجملة في الحالة المستمرة

$$U=\int\varepsilon\,dN \;\Rightarrow\; dU=\varepsilon\,dN_{(B-E)} \qquad (c)$$

نعوض (b) في (c) فنجد:

$$dU=\frac{V8\pi\varepsilon^3}{h^3c^3}\frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1}$$

نحصل على كثافة الطاقة في وحدة الحجوم $(V=1)$ بالشكل:

$$du=\frac{dU}{V}=\frac{8\pi\varepsilon^3}{h^3c^3}\frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1}=\rho(\varepsilon)\,d\varepsilon \qquad (d)$$

يمثل $\rho(\varepsilon)$ كثافة طيف طاقة الإشعاع الصادر عن الجسم الأسود وفقاً لتفسير ماكس بلانك.
(علاقة ماكس بلانك في الإشعاع)

$$\boxed{\rho(\varepsilon)=\frac{8\pi\varepsilon^3}{h^3c^3}\frac{1}{e^{\varepsilon/kT}-1}} \qquad (E)$$

- نكتب عبارة الكثافة $\rho(\varepsilon)$ بدلالة التردد ν، باستخدام علاقة ماكس بلانك:

$$\varepsilon=h\nu \;\Rightarrow\; d\varepsilon=h\,d\nu$$

$$\boxed{\rho(\nu)=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}} \qquad (F)$$

- نكتب عبارة الكثافة $\rho(\nu)$ بدلالة طول الموجة λ، باستخدام العلاقة:

$$\nu=c/\lambda \;\Rightarrow\; |d\nu|=\left(c/\lambda^2\right)d\lambda$$

$$\boxed{\rho(\lambda)=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}} \qquad (G)$$

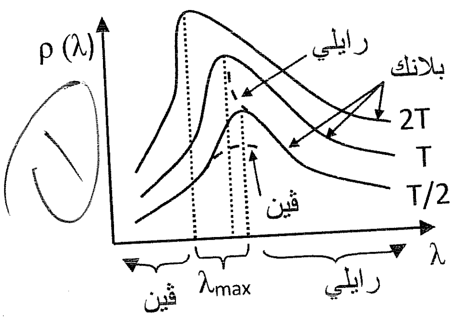
- نمثل بيانياً عبارة بلانك (G) لكثافة الطاقة الطيفية لإشعاع الجسم الأسود بدلالة طول الموجة λ كما هو موضح بالشكل.

ونستنتج مايلي:

- لا تتعلق كثافة الإشعاع بكتلة الجسم m.
- يتحقق قانون ڤين في الإزاحة

$$\boxed{\lambda_{max}T=cte=2{,}897\times10^{-3}\,mk^o}$$

- تنزاح القيمة العظمى للأطوال الموجية بارتفاع درجات الحرارة نحو الأطوال الموجية القصيرة (الطاقات العالية).



جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الثاني للعام الدراسي 2019 - 2020

س١- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (60 درجة)

١- استنتج عبارة **رقم الانشغال** $N_{(F-D)\,\max}$ لتوزع فيرمي - ديراك، في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج). 15

٢- مسألة: جملة مكونة من N جسيم $(N >> 1)$، موزعة على ثلاث سويات للطاقة، $\varepsilon_1 = 0\ \ (J)$ و $\varepsilon_2 = KT\ \ (J)$ و $\varepsilon_3 = 2KT\ \ (J)$، السويات متحللة بالشكل $g_1 = N$ و $g_2 = g_3 = 1$. والمطلوب: 25

١- أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي (العدد فقط بدلالة N). 2

٢- أوجد طاقة الحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2}, \overbrace{0}^{\varepsilon_3})$، ثم أوجد وزنها الإحصائي (بدلالة N). في الحالات التالية: 11

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

(بفرض $N = 2$، احسب القيم الرقمية للأوزان الإحصائية للحالات السابقة (A,B,C)، ومثلها.)

٣- بفرض أن الجسيمات متمايزة، أوجد أرقام انشغال حالة التوزع الماكروي الأكثر احتمال (N_1, N_2, N_3) بدلالة العدد N وتابع التحاص Z، وتحقق من ذلك (تحقق أن $N_1 + N_2 + N_3 = N$). ما نوع التوزع الحاصل ؟. 6

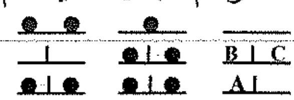
٤- إذا كانت الجسيمات بوزونات: ماذا يمكنك القول عن حالة ودرجة حرارة الجملة الواقعة بحالة التوزع الماكروي $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2}, \overbrace{0}^{\varepsilon_3})$، مثّل بالرسم هذه الحالة (لا تتقيد بدرجة التحلل المعطاة). 3

٥- إذا كانت الجسيمات فيرميونات: والجملة متعددة سويات الطاقة ومتعددة التحلل وواقعة عند درجة الصفر المطلق، المطلوب: مثّل بالرسم شكلاً توضح عليه توضع الفيرميونات على السويات، ثم اعط تعريفاً واحداً لسوية فيرمي. 3

٣- استنتج تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$ في إحصاء مكسويل – بولتزمان، ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال. 20

توجيه: استفد في الحل من تكاملات غاما التالية $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n\Gamma(n)$ و $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

س٢- أجب عن النقاط الثلاث التالية: (30 درجة)

- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات. فيرميونات) الموزعة على السويات فيها  ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي. 11
- ~~اكتب العبارة العامة لأرقام انشغال مكسويل وبوزة وفيرمي، ومثّل بيانياً المشغولية عند الطاقات العالية والمنخفضة.~~ 10
- استنتج عبارة تحاص الغاز الفونوني Z في الأجسام الصلبة وفقاً لتفسير آينشتين. 9

توجيه: سويات طاقة الفونونات $\varepsilon_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ وهي غير متحللة، ودرجة آينشتين $\theta_E = \hbar\omega / K$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس الأحد 16 / 8 / 2020

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية ـ السنة الثالثة فيزياء

الفصل الثاني للعام الدراسي 2019 – 2020 الدرجة العظمى: تسعون درجة

أجوبة بنود السؤال الأول: (60 درجة)

ج1- استنتاج **رقم الانشغال** لتوزع $N_{\underset{\max}{(F-D)}}$ 15

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (F-D). المعطاة بالعلاقة: $W_{F-D}=\prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}$

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التحلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i. أي $\boxed{g_i>>N_i}$.

نوجد بدايةً $Ln(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d\,Ln(W_{F-D})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{F-D})\approx Ln\prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}=\sum_i\left[Ln\,g_i!-Ln\,N_i!-Ln(g_i-N_i)!\right]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنغ $Ln\,x!\approx x\,Ln\,x$ نجد:

$$Ln(W_{F-D})\approx\sum_i\left[g_i Ln\,g_i-N_i\,Ln\,N_i-g_i Ln(g_i-N_i)+N_i\,Ln(g_i-N_i)\right]$$ 5

بما أن W_{F-D} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d\,Ln(W_{F-D})=\frac{\partial\,Ln(W_{F-D})}{\partial N_i}dN_i\approx\frac{\partial}{\partial N_i}\sum_i\left[g_i Ln\,g_i-N_i\,Ln\,N_i-g_i Ln(g_i-N_i)+N_i\,Ln(g_i-N_i)\right]dN_i$$

$$\approx\sum_i\left[-Ln\,N_i-1+\frac{g_i}{g_i-N_i}+Ln(g_i-N_i)-\frac{N_i}{g_i-N_i}\right]dN_i=\sum_i\left(Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}-1+\frac{g_i-N_i}{g_i-N_i}\right)dN_i$$

$$d\,Ln(W_{F-D})\approx\sum_i Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}dN_i$$ 5

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$U=\sum_i\varepsilon_i N_i\ \Rightarrow\ dU=\sum_i\varepsilon_i\,dN_i \qquad و \qquad N=\sum_i N_i\ \Rightarrow\ dN=\sum_i dN_i$$

$$d\,Ln(W_{F-D})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0$$

$$\sum_i\left(Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}+\alpha+\beta\varepsilon_i\right)dN_i=0\ \Rightarrow Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\varepsilon_i)\ \Rightarrow\ \frac{g_i-N_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow\frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}+1\Rightarrow\boxed{N_{i\underset{\max}{(F-D)}}=\frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}+1}}$$ 5

ج2- المسألة: 25

١- عدد حالات التوزع الماكروي:

$$N_o=\frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!}=\frac{(N+3-1)!}{N!\,(3-1)!}=\frac{(N+2)!}{2N!}=\frac{(N+2)(N+1)N!}{2N!}=\frac{(N+2)(N+1)}{2}$$ 2

٢- طاقة الحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1},\overset{\varepsilon_2}{\hat{1}},\overset{\varepsilon_3}{\hat{0}})$ نجدها من العلاقة

$$U_{(N-1,1,0)}=\sum_i N_i\,\varepsilon_i=(N-1)\times0+1\times KT+0\times2KT=KT$$ 2

الأوزان الإحصائية:

A - الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(N-1,1,0)}=N!\left(\frac{N^{N-1}}{(N-1)!}\,\frac{1^1}{1!}\,\frac{1^0}{0!}\right)=N\,N^{N-1}=N^N$$ 2

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\ \Rightarrow\ W_{(N-1,1,0)}=\frac{(N-1+N-1)!}{(N-1)!\,(N-1)!}\ \frac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)!}\ \frac{(0+1-1)!}{0!\,(1-1)!}=\frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}$$ 2

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(\overbrace{\overset{\varepsilon_1}{N-1}}\,,\overset{\varepsilon_2}{\hat{1}}\,,\overset{\varepsilon_3}{\hat{0}})$ تحقق الشرط $g_i \ge N_i$ فهي مقبولة

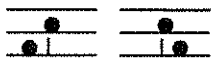
$$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}\ \Rightarrow\ W_{(N-1,1,0)}=\frac{N!}{(N-1)!\,(N-N+1)!}\ \frac{1!}{1!\,(1-1)!}\ \frac{1!}{0!\,(1-0)!}=N$$ 2

الحسابات الرقمية والتمثيل: الحالة المطلوبة هي $(\overset{\varepsilon_1}{\hat{1}}\,,\overset{\varepsilon_2}{\hat{1}}\,,\overset{\varepsilon_3}{\hat{0}})$ و $g_1=2$ و $g_2=g_3=1$

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية): $W_{M-B}=N^N=2^2=4$ 1

B- الجسيمات بوزونات: $W_{B-E}=\dfrac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}=\dfrac{2!}{1}=2$ 1

C- الجسيمات فيرميونات: $W_{F-D}=N=2$ 1



٣- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية، نوجد تحاص الجملة z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z=\sum_i g_i e^{\beta\varepsilon_i}=\sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT}=Ne^{-0}+1e^{-1}+1e^{-2}=N+e^{-1}+e^{-2}$$ 1

نوجد رقم انشغال السويات في الحالة الأكثر احتمال من مكسويل

$$N_i=g_i e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}=e^{\alpha}g_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}=\frac{N}{Z}g_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}$$

فيكون: $N_1=\dfrac{N}{Z}Ne^{-0}=\dfrac{N^2}{Z}$ 1 و $N_2=\dfrac{N}{Z}1e^{-1}=\dfrac{N}{Z}e^{-1}$ 1 و $N_3=\dfrac{N}{Z}1e^{-2}=\dfrac{N}{Z}e^{-2}$ 1 .

ويمكن التحقق من ذلك بالجمع

$$N_1+N_2+N_3=\frac{N^2}{Z}+\frac{N}{Z}e^{-1}+\frac{N}{Z}e^{-2}=\frac{N}{Z}(N+e^{-1}+e^{-2})=\frac{N}{Z}Z=N$$ 1

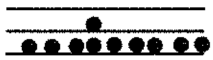
لإيجاد نوع التوزع الحاصل (في الحالة الأكثر احتمال) نوجد نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_1}{N_2}=Ne>1\ \Rightarrow\ N_1>N_2 \quad و \quad \frac{N_2}{N_3}=\frac{e^{-1}}{e^{-2}}=e>1\ \Rightarrow\ N_2>N_3 \quad و \quad \frac{N_1}{N_3}=Ne^2>1\ \Rightarrow\ N_1>N_3$$

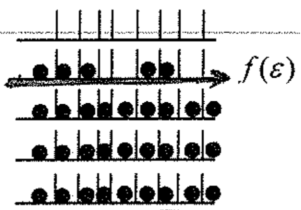
نستنتج أن: $N_1>N_2>N_3$ فالتوزع طبيعي. 1

٤- عندما تكون الجسيمات بوزونات: فتكون الجملة الواقعة وفق التوزع الماكروي $(\overbrace{\overset{\varepsilon_1}{N-1}}\,,\overset{\varepsilon_2}{\hat{1}}\,,\overset{\varepsilon_3}{\hat{0}})$ بحالة تكاثف، 1

ودرجة حرارتها هي درجة آينشتاين 1

 1

٥- عندما تكون الجسيمات فيرميونات: تتوضع الفيرميونات عند درجة الصفر المطلق على كافة السويات الدنيا بمعدل فيرميون واحد لكل درجة تحلل.

 1

- تكون كافة السويات الأدنى من سوية فيرمي $f(\varepsilon)$ مملوءة (مشغولة) ~~بمعدل~~ فيرميون واحد لكل درجة تحلل والسويات الأعلى فارغة تماماً. 2
- سوية فيرمي هي أعلى سويات الطاقة المشغولة كلياً أو جزئياً بالفيرميونات

ج3- لإيجاد تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان: 20

نكتب العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لطاقاتها، في المجال الطاقي $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$. انطلاقاً من عبارة رقم انشغال مكسويل $N_{i(M-B)}=e^{\alpha}\,g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}$ وباعتبار $e^{\alpha}=\dfrac{N}{Z}$ فنجد

$$dN(\varepsilon)=\frac{N}{Z}e^{\beta\varepsilon}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon$$ 2

نعوض عن المقدار $g(\varepsilon)\,d\varepsilon$ بقيمته من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon=C\,d\Gamma(\varepsilon)=CV\,2\pi\left(2m\right)^{3/2}\left(\varepsilon\right)^{1/2}d\varepsilon$$ 2

وعن تابع التحاص Z بقيمته

$Z=CV\,\left(2\pi\,m\,KT\right)^{3/2}$ ، واعتبار أن $\beta=-1/KT$. نجد: 2

$$dN(\varepsilon)=\frac{N}{CV\,\left(2\pi\,m\,KT\right)^{3/2}}e^{-\varepsilon/KT}\,CV\,2\pi\left(2m\right)^{3/2}\left(\varepsilon\right)^{1/2}d\varepsilon$$

بالاختزال والاصلاح.

$$dN(\varepsilon)=\frac{2N}{\sqrt{\pi}\left(KT\right)^{3/2}}e^{-\varepsilon/KT}\left(\varepsilon\right)^{1/2}d\varepsilon$$

بقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع الطاقة بدلالة تابع كثافة الطاقة كما يلي:

$$dF(\varepsilon)=\frac{dN(\varepsilon)}{N}=\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\left(KT\right)^{3/2}}e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon=f(\varepsilon)\,d\varepsilon \qquad (1)$$

حيث يعبر $f(\varepsilon)$ عن تابع كثافة الطاقة

$$\boxed{f(\varepsilon)=\frac{2\,\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\left(KT\right)^{3/2}}e^{-\varepsilon/KT}}$$ 6

للبرهان على أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على الطاقة في المجال $]0\to\infty[$.

$$F(\varepsilon)=\int_0^{\infty}f(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}\left(KT\right)^{3/2}}\int_0^{\infty}\varepsilon^{1/2}\,e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon$$ 2

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x=\varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon=KT\,x\;\Rightarrow\;d\varepsilon=KT\,dx \qquad \text{و} \qquad \varepsilon^{1/2}=\left(KT\right)^{1/2}x^{1/2}$$ 2

وبالتعويض في عبارة التكامل واستخدام تكاملات غاما نجد المطلوب

$$\int_0^{\infty}f(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}\left(KT\right)^{3/2}}\left(KT\right)^{1/2}KT\underbrace{\int_0^{\infty}x^{1/2}\,e^{-x}\,dx}_{\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}\left(KT\right)^{3/2}}\left(KT\right)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$$ 4

أجوبة نقاط السؤال الثاني: (30 درجة)

- حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات. فيرميونات) الموزعة على السويات في الجمل التالية 11

B | C
A |

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{1},\overset{\varepsilon_2}{2},\overset{\varepsilon_3}{0})$ 1

الوزن الإحصائي $W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{3}\dfrac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(1,2,0)}=3!\left(\dfrac{2^1}{1!}\;\dfrac{2^2}{2!}\;\dfrac{1^0}{0!}\right)=24$ 2

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2},\overset{\varepsilon_2}{2},\overset{\varepsilon_3}{1})$ 1

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)}=\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)!}=3\times3\times1=9$$ 2

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)}=\frac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\frac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\frac{1!}{1!\,(1-1)!}=1\times1\times1=1$$ 2

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2},\overset{\varepsilon_2}{0},\overset{\varepsilon_3}{2})$ 1

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(2,0,2)}=\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(0+2-1)!}{0!\,1!}\,\frac{(2+1-1)!}{2!\,0!}=3\times1\times1=3$$ 2

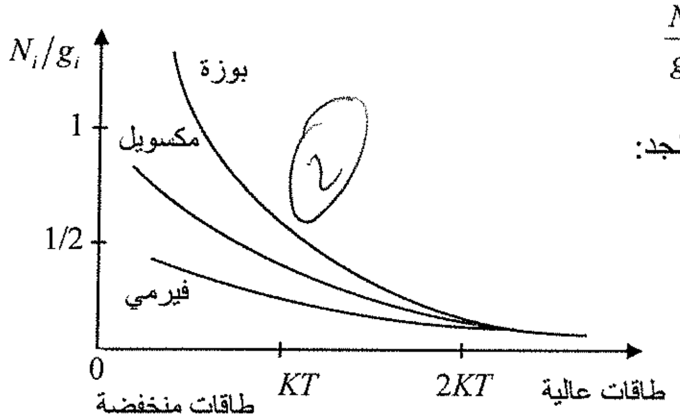
- تأخذ العبارة العامة لأرقام انشغال مكسويل وبوزة وفيرمي الشكل 10

$$\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}\pm m}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}\pm1}$$

حيث يأخذ الثابت m القيمة صفر في توزع مكسويل والقيمة واحد في توزعي بوزة وفيرمي، والإشارة السالبة لبوزة والموجبة لفيرمي.

عند الطاقات العالية $KT<<(\varepsilon_i-\mu)$ يؤول توزعي بوزة وفيرمي إلى توزع مكسويل (يُهمل الواحد في المقام)

$$\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}\pm1}\approx\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}}<<1 \quad\Rightarrow\quad \frac{N_i}{g_i}\to0$$ 2



شكل ( ) 2

عند الطاقات المنخفضة $(\varepsilon_i-\mu)<<KT$ يكون $e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}\geq1$ فنجد:

- من أجل مكسويل $\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}}\leq1$ 2
- من أجل بوزة $\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}-1}>>1$ 2
- من أجل فيرمي $\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}+1}\leq\frac{1}{2}$ 2

- تعطى طاقة الهزاز الكوانتي بالصيغة $\varepsilon_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ 9

أي أن للهزاز طاقة $\varepsilon_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$ في السوية الأرضية $n=0$ عند درجة الصفر المطلق $T=0\,k^o$

يعطى تابع تحاص سويات الطاقة غير المتحللة للفونونات بصيغته المعروفة

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{g_n}_{1}e^{\beta\varepsilon_n}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{\beta(n+\frac{1}{2})\hbar\omega}=e^{\beta\frac{\hbar\omega}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{\beta n\hbar\omega}=e^{-\frac{\hbar\omega}{2KT}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{n\hbar\omega}{KT}}=e^{-\frac{\theta_E}{2T}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\frac{\theta_E}{T}}$$

حيث افترضنا درجة حرارة آينشتين $\theta_E=\frac{\hbar\omega}{K}$ مقدار ثابت، وبكتابة المجموع نجد

$$Z=e^{-\frac{\theta_E}{2T}}(1+e^{-\frac{\theta_E}{T}}+e^{-2\frac{\theta_E}{T}}+e^{-3\frac{\theta_E}{T}}+\ldots\ldots)$$ 5

السلسلة هندسية حدها الأول واحد وأساسها $e^{-\frac{\theta_E}{T}}<1$ فيكون مجموعها $S=1\frac{1-\overbrace{(e^{-\frac{\theta_E}{T}})^n}^{0}}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}}\approx\frac{1}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}}$ وبالتعويض

$$Z=e^{-\frac{\theta_E}{2T}}\Big/1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}$$ 4

عة طرطوس
ية العلوم
سم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ...
مدة الامتحان: ...

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2019 - 2020

س1- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (55 درجة).

1- استنتج عبارة **رقم الانشغال** $N_{i(M-B)_{max}}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة ...)

2- مسألة: جملة مكونة من 3 جسيمات متمايزة موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = kT$ و $\varepsilon_2 = 2kT$
متحللتين بالشكل: $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد نسب أرقام الانشغال، ما نوع التوزع الحاصل (طبيعي أم لا).
- أوجد تحاصي الجملة والطاقم (بدلالة c)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالات ...
- أوجد (مع التمثيل) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_1}{1})$ في الحالات التالية:

1- الجسيمات متمايزة A و B و C. 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

3- استنتج عبارة السعة الحرارية C_V للغاز الفونوني في الأجسام الصلبة وفقاً لتفسير أينشتاين، ثم ناقش ...
الحاصلة عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة.

س2- أجب عن البندين التاليين: (35 درجة).

1- أوجد بدلالة المعطيات $Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$ و $P_i = \frac{g_i}{Z} e^{\beta \varepsilon_i}$:

القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}$، والانحراف المعياري $\overline{\varepsilon^2}$، والتشتت $\overline{\Delta \varepsilon^2}$، (بدلالة Z أو LnZ والمشتقة $\partial/\partial\beta$)

- استفد من علاقة المشتقة $\partial/\partial\beta$ بالمشتقة $\partial/\partial T$ ومن عبارة تابع التحاص $Z = CV\,(2\pi m KT)^{3/2}$

في البرهان على أن صيغة طاقة الجملة (بثبات الحجم) هي $E = N\bar{\varepsilon} = N\left(\frac{\partial LnZ}{\partial\beta}\right)_V = \frac{3}{2}NKT$

2- جملة مكونة من N جسيم كلاسيكي موزعة على عدد محدود من سويات الطاقة غير المتحللة ($g_i = 1$)،
وطاقاتها تتبع العلاقة: $\varepsilon_i = i\,\varepsilon_o \quad ; i = 0,1,2,3,.....$. والمطلوب:

1- احسب تحاص الجملة Z بدلالة β.
2- احسب متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$.
3- احسب قيمة $\bar{\varepsilon}$ اذا علمت أن: $\varepsilon_o << KT$، ماذا تستنتج ؟

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الأحد 16 / 2 / 2020

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

طرطوس
العلوم
م الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2019 - 2020

س1- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (55 درجة).

1- استنتج عبارة **رقم الانشغال** $N_{i(M-B)_{max}}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج)

2- مسألة: جملة مكونة من 3 جسيمات متمايزة موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = kT$ و $\varepsilon_2 = 2kT$، متحللتين بالشكل: $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد نسب أرقام الانشغال، ما نوع التوزع الحاصل (طبيعي أم لا).
- أوجد تحاصي الجملة والطاقم (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.
- أوجد (مع التمثيل) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $\left(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{1}\right)$ في الحالات التالية:

1- الجسيمات متمايزة A و B و C. 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

3- استنتج عبارة السعة الحرارية C_v للغاز الفونوني في الأجسام الصلبة وفقاً لتفسير اينشتين، ثم ناقش النتيجة الحاصلة عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة.

س2- أجب عن البندين التاليين: (35 درجة).

1- أوجد بدلالة المعطيات $Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$ و $P_i = \dfrac{g_i}{Z} e^{\beta \varepsilon_i}$:

القيمة الوسطى $\overline{\varepsilon}$، والانحراف المعياري $\overline{\varepsilon^2}$، والتشتت $\overline{\Delta \varepsilon^2}$، (بدلالة Z أو $\ln Z$ والمشتقة $\partial/\partial\beta$)

- استفد من علاقة المشتقة $\partial/\partial\beta$ بالمشتقة $\partial/\partial T$ ومن عبارة تابع التحاص $Z = CV\left(2\pi m KT\right)^{3/2}$ في البرهان على أن صيغة طاقة الجملة (بثبات الحجم) هي $U = N\overline{\varepsilon} = N\left(\dfrac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right)_V = \dfrac{3}{2}NKT$

2- جملة مكونة من N جسيم كلاسيكي موزعة على عدد محدود من سويات الطاقة غير المتحللة $(g_i = 1)$، وطاقاتها تتبع العلاقة: $\varepsilon_i = i\,\varepsilon_0 \quad ; i = 0,1,2,3,.....$. والمطلوب:

1- احسب تحاص الجملة Z بدلالة β.
2- احسب متوسط طاقة الجسيم $\overline{\varepsilon}$.
3- احسب قيمة $\overline{\varepsilon}$ إذا علمت أن: $\varepsilon_0 << KT$، ماذا تستنتج ؟

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الأحد 16 / 2 / 2020

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء

الفصل الأول للعام الدراسي 2019 – 2020 (تسعون درجة)

ج 1: 55 درجة

-1 استنتاج **رقم الانشغال** لتوزع $N_{i(M-B)_{max}}$

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$ 1

نوجد بداية $Ln(W_{M-B})$، ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{M-B})$، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالا التالي:

$$d\,Ln(W_{M-B}) + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0 \qquad (1)$$ 1

$$Ln(W_{M-B}) = Ln N! + \sum_i \left[N_i Ln g_i - Ln N_i!\right]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ 1 $Ln x! \approx x Ln x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N Ln N - N + \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i)$$ 1 / 4

بما أن W_{M-B} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d\,Ln(W_{M-B}) = \frac{\partial Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i}\left[N Ln N - N + \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i)\right] dN_i \qquad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln g_i - Ln N_i - 1 + 1)\, dN_i = \sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i$$ / 4

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad (1) \qquad و \qquad (1)\ N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالا:

$$\sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i \left(Ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i\right) dN_i = 0 \Rightarrow Ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\boxed{N_{i(M-B)} = g_i e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}} \Leftrightarrow \boxed{N_{i(M-B)} = e^{\alpha} g_i e^{\beta\varepsilon_i}}$$ (5)

-2 المسألة: 20

- حالات التوزع الماكروي: $N_a = \frac{(N+N_c-1)!}{N!(N_c-1)!} = \frac{(3+2-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزع الماكروي الأربعة.

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي: $\left\{ \underbrace{(3,0)}_{U=3kT}, \underbrace{(0,3)}_{U=6kT}, \underbrace{(2,1)}_{U=4kT}, \underbrace{(1,2)}_{U=5kT} \right\}$ (4)

- نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{e^{\alpha} g_i e^{\beta\varepsilon_i}}{e^{\alpha} g_j e^{\beta\varepsilon_j}} = \frac{g_i e^{-\varepsilon_i/kT}}{g_j e^{-\varepsilon_j/kT}} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{1e^{-\frac{kT}{kT}}}{2e^{-\frac{2kT}{kT}}} = \frac{1}{2e^{-1}} = \frac{e}{2} > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$$ (2)

والتوزع طبيعي

- تحاص الجملة: $Z = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/kT} = e^{-1} + 2e^{-2}$

تحاص الطاقم: $Z_{\Omega}=Z^{N}=(e^{-1}+2e^{-2})^{3}=e^{-3}+6e^{-4}+12e^{-5}+8e^{-6}$

نقارنه بالعبارة: $Z_{\Omega}=\sum_{i} W_{i}e^{-U_i/kT}=W_{(3,0)}e^{-3}+W_{(2,1)}e^{-4}+W_{(1,2)}e^{-5}+W_{(0,3)}e^{-6}$

فتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزع الماكروي بالشكل:

(5)

$W_{(3,0)}=1$ و $W_{(2,1)}=6$ و $W_{(1,2)}=12$ و $W_{(0,3)}=8$

الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة $(1,2)$

- 1- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية) $W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(1,2)}=3!\left(\frac{1^1}{1!}\frac{2^2}{2!}\right)=12$

$\frac{B\,C\,\vert\;\;}{A}$	$\frac{\;\;\vert\,B\,C}{A}$	$\frac{B\,\vert\,C}{A}$	$\frac{C\,\vert\,B}{A}$
$\frac{A\,C\,\vert\;\;}{B}$	$\frac{\;\;\vert\,A\,C}{B}$	$\frac{A\,\vert\,C}{B}$	$\frac{C\,\vert\,A}{B}$
$\frac{A\,B\,\vert\;\;}{C}$	$\frac{\;\;\vert\,A\,B}{C}$	$\frac{A\,\vert\,B}{C}$	$\frac{B\,\vert\,A}{C}$

(3)

2- الجسيمات بوزونات $W_{B-E}=\prod_{i=1}^{2}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\Rightarrow W_{(1,2)}=\frac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)!}\frac{(2+2-1)!}{2!\,(2-1)!}=3$

$\frac{\bullet\bullet\,\vert\;\;}{\bullet}$	$\frac{\;\;\vert\,\bullet\bullet}{\bullet}$	$\frac{\bullet\,\vert\,\bullet}{\bullet}$

(3)

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(1,2)$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}\Rightarrow W_{(1,2)}=\frac{1!}{1!\,(1-1)!}\frac{2!}{2!\,(2-2)!}=1$ $\frac{\bullet\,\vert\,\bullet}{\bullet}$ (3)

3: تفسير آينشتين: 20

افترض آينشتين (اعتمادا على مفاهيم النظرية الكوانتية) أن ذرات الشبكة البلورية عبارة عن هزازات مرونة توافقية بسيطة، ومستقلة، وتهتز في الأبعاد الثلاثة حول مواضع اتزانها فتصدر عنها أمواج مرنة بتردد ثابت تعطى طاقة الهزاز الكوانتي بالصيغة

$$\varepsilon_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$$

اي أن للهزاز طاقة $\varepsilon_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$ في السوية الأرضية $n=0$ عند درجة الصفر المطلق $T=0\,k^{\circ}$

يعطى تابع تحاص سويات الطاقة غير المتحللة للفونونات بصيغته المعروفة

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{g_n}_{1}e^{\beta\varepsilon_n}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{\beta(n+\frac{1}{2})\hbar\omega}=e^{\beta\frac{\hbar\omega}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{\beta n\hbar\omega}=e^{-\frac{\hbar\omega}{2KT}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{n\hbar\omega}{KT}}=e^{-\frac{\theta_E}{2T}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\frac{\theta_E}{T}}$$

حيث افترضنا درجة حرارة آينشتين $\theta_E=\frac{\hbar\omega}{K}$ مقدار ثابت، وبكتابة المجموع نجد

$$Z=e^{-\frac{\theta_E}{2T}}(1+e^{-\frac{\theta_E}{T}}+e^{-2\frac{\theta_E}{T}}+e^{-3\frac{\theta_E}{T}}+\ldots\ldots)$$ (6)

السلسلة هندسية حدها الأول واحد وأساسها $e^{-\frac{\theta_E}{T}}$ فيكون مجموعها $\frac{1}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}}=\frac{1-(e^{-\frac{\theta_E}{T}})^{n}}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}}$ وبالتعويض

$$Z = \frac{e^{-\frac{\theta_E}{2T}}}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}} \quad /2$$

نحسب الطاقة الوسطى للفونون (من أجل درجة حرية واحدة) من العلاقة $\bar{\varepsilon} = KT^2\left(\frac{\partial LnZ}{\partial T}\right)_V$ لذا نوجد LnZ

(1)

$$LnZ = -\frac{\theta_E}{2T} - Ln|1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}|$$

$$\frac{\partial LnZ}{\partial T} = -\left(\frac{0-2\theta_E}{4T^2}\right) - \frac{[0-(-\frac{0-\theta_E}{T^2})e^{-\frac{\theta_E}{T}}]}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}} = \frac{\theta_E}{2T^2} + \frac{\theta_E e^{-\frac{\theta_E}{T}}}{T^2(1-e^{-\frac{\theta_E}{T}})}$$

بالتعويض في عبارة الطاقة الوسطى للفونون

$$\bar{\varepsilon} = \frac{K\theta_E}{2} + \frac{K\theta_E e^{-\frac{\theta_E}{T}}}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}} \Rightarrow \bar{\varepsilon} = K\theta_E\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\theta_E}{T}}-1}\right) \quad /3 \quad (1)$$

نحسب الطاقة الداخلية لمول واحد من الفونونات N_A وبثلاث درجات حرية لكل فونون (مع اعتبار ...)

$$U = 3N_A\bar{\varepsilon} = 3N_A K\theta_E\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\frac{\theta_E}{T}}-1}\right) \Rightarrow U = 3R\theta_E\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\frac{\theta_E}{T}}-1}\right) \quad (2)$$

نحسب السعة الحرارية من العلاقة

$$C_V = 3R\theta_E\left[0 + \frac{0-(\frac{-\theta_E}{T^2}e^{\frac{\theta_E}{T}})}{(e^{\frac{\theta_E}{T}}-1)^2}\right] \Rightarrow \boxed{C_V = 3R\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2\frac{e^{\frac{\theta_E}{T}}}{(e^{\frac{\theta_E}{T}}-1)^2}} \quad 4 \quad (3)$$

المناقشة:

أولا: عند درجات الحرارة العالية (أكبر بكثير من درجة أينشتين) $T \gg \theta_E$ ننشر التابع الأسي في ...

$$C_V = 3R\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2\frac{(1+\frac{\theta_E}{T}+\ldots)}{(1+\frac{\theta_E}{T}+\ldots-1)^2} = 3R\left(1+\frac{\theta_E}{T}+\ldots\right) \Rightarrow \boxed{C_V \approx 3R} \quad 2$$

ثانيا: عند درجات الحرارة المنخفضة $T \ll \theta_E$ يهمل الواحد في المقام ونحصل على القيمة

$$C_V = 3R\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 e^{-\frac{\theta_E}{T}} \Rightarrow \lim_{T\to 0} C_V = 3R\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} \Rightarrow \boxed{\lim_{T\to 0} C_V = 0} \quad 2$$

ج2: $\boxed{\text{35 درجة}}$

1: بما أن $P_i = \frac{g_i e^{-\beta\varepsilon_i}}{Z}$ تابع كثافة احتمال فان القيمة الوسطى لأي مقدار (الطاقة مثلا) تعطى بالعلاقة

20

$$\bar{\varepsilon} = \sum \varepsilon_i P_i = \frac{1}{Z}\sum \varepsilon_i g_i e^{-\beta\varepsilon_i}$$

بما أن $\frac{\partial Z}{\partial\beta} = -\sum \varepsilon_i g_i e^{-\beta\varepsilon_i}$ نجد بالتعويض

(5) $$\bar{\varepsilon} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta} = -\frac{\partial Z/Z}{\partial\beta} = -\frac{\partial LnZ}{\partial\beta}$$

وبالمثل يكون الانحراف المعياري $\overline{\varepsilon^2} = \sum \varepsilon_i^2 P_i = \frac{1}{Z}\sum \varepsilon_i^2 g_i e^{-\beta\varepsilon_i}$

$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta\varepsilon_i}$ يكون $\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \sum_i \varepsilon_i^2 g_i e^{\beta\varepsilon_i}$ نجد بالتعويض $\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$ 5

$$\Delta\varepsilon^2 = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2$$

[illegible]

5

- نوجد لغارتم تابع التجاص $Z = CV\left(2\pi m KT\right)^{3/2}$ ، ثم مشتقه اللغارتم

$$\ln Z = \ln C + \ln V + \frac{3}{2}\ln(2\pi mK) + \frac{3}{2}\ln T \Rightarrow \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2T}$$

وبالاستفادة من العلاقة بين المشتقات $\frac{\partial}{\partial \beta} = KT^2\frac{\partial}{\partial T}$ واعتبار أن $\bar{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right)_V$

وبالتعويض عن كل بقيمته في عبارة الطاقة نجد المطلوب كما يلي

$$E = N\bar{\varepsilon} = N\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right)_V = NKT^2\underbrace{\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V}_{3/2T} = \frac{3}{2}NKT$$ 5

:2 15

-1 $Z = \sum g_i e^{\beta\varepsilon_i} = \sum e^{\beta n\varepsilon} = 1 + e^{\beta\varepsilon} + e^{2\beta\varepsilon} + \dots$

يمثل Z سلسلة هندسية أساسها $e^{\beta\varepsilon}$ وحدودها متناقصة، لأن [illegible] KT [illegible] β [illegible]

فيكون مجموعها $(e^{\beta\varepsilon})^n \to 0$ ، $Z = \frac{1-(e^{\beta\varepsilon})^n}{1-e^{\beta\varepsilon}} = \frac{1}{1-e^{\beta\varepsilon}}$ 5

2- متوسط طاقة الجسيم نجده بتطبيق العلاقة $\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ [illegible] نوجد لغارتم

$$\ln Z = \ln\frac{1}{1-e^{\beta\varepsilon}} = -\ln(1-e^{\beta\varepsilon})$$

وبالتعويض

[illegible] 5

3- عندما KT [illegible] نشر التابع الأسي بالشكل [illegible]

نهمل الحدود ذات المراتب العليا لأنها صغيرة [illegible]

[illegible] 5

نستنتج بهذه الحالة أن [illegible] الكلاسيكي [illegible]

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة الصيفية للعام الدراسي 2018 - 2019

س١- أجب عن البنود التالية (60 درجة)

١- استنتج علاقة ماكس بلانك في كثافة الطاقة الطيفية لإشعاع الجسم الأسود في وحدة الحجم. ثم أجب عن ما يلي:

- ناقش علاقة بلانك الحاصلة (بدلالة التردد ν) في مجالي الطاقات المنخفضة $h\nu << kT$ والعالية $h\nu >> kT$. واستنتج علاقتي (رايلي - جينز) و (ڤين) الموافقتين.
- اكتب عبارة بلانك الحاصلة بدلالة طول الموجة λ ومثلها بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة. ماذا تستنتج ؟.

٢- جملة مكونة من عدد لانهائي من الجسيمات غير المتمايزة. موزعة على عدد لانهائي من السويات بالشكل: $\varepsilon_n = n\varepsilon_o \quad ; n = 0,1,2,3,......$ ودرجات تحللها معطاة بالعلاقة: $g_n = n+1$. والمطلوب:

١- أوجد تحاص الجملة Z.
٢- أوجد متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ في الحالات: $\varepsilon_o << KT$ و $\varepsilon_o = KT$ و $\varepsilon_o >> KT$.
٣- أوجد نسب أرقام انشغال السويات العليا للطاقة، وحدد نوع التوزع بهذه الحالة.

٣- عرف تابع فيرمي $f(\varepsilon)$، ومثّله بيانياً عند سوية فيرمي للطاقة $\varepsilon_f(T=0k^o)$.
ثم مثّله في جوارها من أجل $T \neq 0$ (عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon = \varepsilon_f(0) \pm KT$).

- اذكر ثلاث تعاريف مختلفة لسوية فيرمي $\varepsilon_f^{(o)}$.

س٢- أجب عن البندين التاليتين (30 درجة)

١- اكتب العبارة العامة لأرقام انشغال مكسويل وبوزة وفيرمي، ومثّل بيانياً المشغولية عند الطاقات العالية والمنخفضة.

٢- يُعطى تابع كثافة الطاقة بالشكل $f(\varepsilon) = \frac{1}{Z} e^{\beta\varepsilon} g(\varepsilon)$ حيث $\beta = -1/KT$، والمطلوب:

١- برهن أن علاقة درجة التحلل بعنصر فراغ الطاقة الطوري من الشكل: $g(\varepsilon)d\varepsilon = CV\,2\pi\left(2m\right)^{3/2}\left(\varepsilon\right)^{1/2} d\varepsilon$.
٢- استفد من النتيجة السابقة ومن تعريف Z في الحالة المستمرة في البرهان أن لتابع التحاص Z بدلالة متحولات الجملة الصيغة $Z = CV\ \left(2\pi\, m\, KT\right)^{3/2}$.
٣- عوض عن المقادير السابقة في تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$، وبرهن أنه تابع كثافة احتمال.
٤- أوجد (باستخدام طريقة الوسطي الإحصائية) قيم المقادير التالية: $\bar{\varepsilon}$ و $\overline{\varepsilon^2}$ و $\overline{\Delta\varepsilon^2}$ (بدلالة الطاقة الحرارية KT).

ملاحظة: استفد في الحل من تكاملات غاما التالية $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n\Gamma(n)$ و $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس، الأحد 18 /8/ 2019

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء

الدورة الصيفية للعام الدراسي 2018 – 2019

الدرجة العظمى : تسعون درجة (توزيع الدرجات: 60 درجة للسؤال الأول و 30 للثاني)

أجوبة بنود السؤال الأول: (60 درجة)

ج١:

10

الفوتونات هي بوزونات، تخضع لتوزع بوزه - آينشتين $N_{i_{(B-E)}} = \dfrac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}-1}$

وبما أن عدد الفوتونات داخل تجويف الجسم الأسود غير ثابت فيكون $dN \neq 0$. فنجد من شرط الحالة الأكثر احتمالاً: $d\,Ln(W_{B-E}) + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0$ أن $\alpha = 0$. وبالتالي يكون $A = 1 \;\Leftarrow\; A = e^{\alpha}$

فيصبح عدد الفوتونات التي تملك طاقة في المجال $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ وفقاً لتوزع بوزه- آينشتين:

$$dN_{(B-E)} = \frac{dg(\varepsilon)}{e^{-\alpha}e^{\varepsilon/kT}-1} = \frac{dg(\varepsilon)}{e^{\varepsilon/kT}-1} \qquad \text{(a)}$$

نكتب درجة تحلل سويات المجال الطاقي $dg(\varepsilon)$ بدلالة الطاقة من العبارة

$$dg(\varepsilon) = c_o\, d\Gamma \quad ; \; c_o = 1/h^3 \qquad \text{(b)}$$

وباستخدام مفهوم عنصر الفراغ الطوري $d\Gamma$ حيث:

$$d\Gamma = dq\, dp = V\, d(\frac{4}{3}\pi\, p^3) = V\, 4\pi\, p^2 dp$$

$$d\Gamma = V\, 4\pi\, p^2 dp$$

بالتعويض في (b) عن كلٍ بقيمته نكتب درجة التحلل بالشكل:

$$dg(\varepsilon) = \frac{V\, 4\pi\, p^2 dp}{h^3} \qquad (*)$$

وبما أن الفوتونات أشعة كهرطيسية فهي تملك اتجاهين مستقلين للاستقطاب، وبالتالي تتضاعف قيمة درجة التحلل.
وحيث أن طاقة الفوتون ε مرتبطة بزخمه p بواسطة سرعة الضوء c وفق العلاقة:

$$\varepsilon = c\, p \;\Rightarrow\; p = \frac{\varepsilon}{c} \;\Rightarrow\; dp = \frac{d\varepsilon}{c}$$

فنجد بالتعويض في (*) :

$$dg(\varepsilon) = 2\,\frac{V\, 4\pi\, \varepsilon^2 d\varepsilon}{h^3 c^3} \qquad (**)$$

نعوض (**) في (a) فنجد:

$$dN_{(B-E)} = \frac{V\, 8\pi\, \varepsilon^2}{h^3 c^3}\frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1} \qquad \text{(c)}$$

وبما أن طاقة الجملة $U = \sum_i \varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU = \sum_i \varepsilon_i\, dN_i$. وحيث أن التوزع في حالة الفوتونات يكون مستمر، فنكتب:

$$dU = \varepsilon\, dN_{(B-E)} \qquad \Rightarrow \qquad dU = \frac{V\, 8\pi\, \varepsilon^3}{h^3 c^3}\frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1}$$

نحصل على كثافة الطاقة في وحدة الحجوم $(V = 1)$ بالشكل:

$$u = \frac{dU}{V} = \frac{8\pi\, \varepsilon^3}{h^3 c^3}\frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1} = \rho(\varepsilon)\, d\varepsilon \qquad \text{(d)}$$

وبما أن طاقة الفوتون ε مرتبطة بتردد الموجة ν بواسطة ثابتة بلانك h وفق علاقة ماكس بلانك:

$$\varepsilon = h\nu \;\Rightarrow\; d\varepsilon = h\, d\nu$$

فنكتب علاقة بلانك في كثافة الطاقة الطيفية لإشعاع الجسم الأسود بدلالة التردد بالشكل:

$$\boxed{u = \frac{8\pi\, h\nu^3}{c^3}\frac{d\nu}{e^{h\nu/kT}-1} = \rho(\nu)\, d\nu}$$

5

- المناقشة:

١- نحصل على علاقة (رايلي - جينز) في مجال الطاقات المنخفضة $h\nu << kT$ ، حيث يؤول التابع النيبري إلى الشكل: $e^{h\nu/kT} \approx 1 + \dfrac{h\nu}{kT}$ وتصبح عبارة كثافة الطاقة الطيفية لإشعاع الجسم الأسود بالشكل:

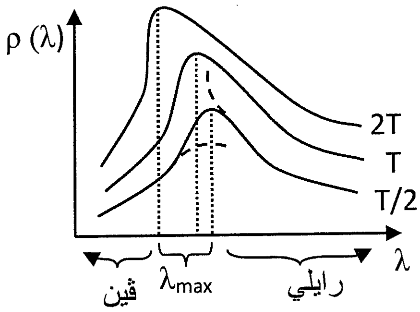
$$u = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 d\nu = \rho(\nu)\, d\nu$$

٢- نحصل على علاقة (ڤين) في مجال الطاقات العالية $h\nu >> kT$ ، حيث يكون $e^{h\nu/kT} >> 1$ ويمكن إهمال الواحد في مقام العلاقة. وتصبح عبارة كثافة الطاقة الطيفية لإشعاع الجسم الأسود بالشكل:

$$u = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT} d\nu = \rho(\nu)\, d\nu$$

2

- باستخدام العلاقة



$$\nu = c/\lambda \quad \Rightarrow \quad |d\nu| = \left(c/\lambda^2\right) d\lambda$$

تصبح عبارة بلانك الحاصلة بدلالة طول الموجة λ بالشكل:

$$u = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} = \rho(\lambda)\, d\lambda$$

3

ونستنتج مايلي:

- لاتتعلق كثافة الإشعاع بكتلة الجسم m.
- يتحقق قانون ڤين في الإزاحة $\lambda_{\max} T = cte$
- تنزاح القيمة العظمى للأطوال الموجية بارتفاع درجات الحرارة نحو الأطوال الموجية القصيرة (الطاقات العالية).

ج٢:

2

١- نحسب Z من صيغة التجميع في المجال $[0 \to \infty[$ كما يلي:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{\beta\varepsilon_n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e^{n\beta\varepsilon_o}$$

نفرض $x = e^{\beta\varepsilon_o} < 1$

لأن $e^{\beta\varepsilon_o} = e^{-\varepsilon_o/KT} = (1/e^{\varepsilon_o/KT}) < 1$ حيث يكون $e^{\varepsilon_o/KT} > 1$ في الحالتين $\varepsilon_o > KT$ و $\varepsilon_o < KT$:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots$$

وبفرض $m = n+1$ يمكننا كتابة Z بدلالة مشتق سلسلة أخرى S_m كما يلي:

$$Z = \sum_{m=1}^{\infty} m\, x^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d\, x^m}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots$$

وبإيجاد عبارة الحد العام للسلسلة الجديدة S_m التي أساسها x :

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots = (1-x)^{-1}$$

$$Z = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)} = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = (1 - e^{\beta\varepsilon_o})^{-2}$$

10

٢- نوجد متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ من العلاقة: $\bar{\varepsilon} = \dfrac{\partial Ln Z}{\partial\beta}$

$$Ln Z = Ln(1 - e^{\beta\varepsilon_o})^{-2} = -2\, Ln(1 - e^{\beta\varepsilon_o})$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial Ln Z}{\partial\beta} = -2\frac{-\varepsilon_o e^{\beta\varepsilon_o}}{1 - e^{\beta\varepsilon_o}} = \frac{2\varepsilon_o}{e^{-\beta\varepsilon_o} - 1} = \frac{2\varepsilon_o}{e^{\varepsilon_o/KT} - 1}$$

4

من أجل $\varepsilon_o << KT$ ننشر التابع الأسي ونكتفي بالحدين الأول والثاني $e^{\varepsilon_o/KT} \approx 1 + \dfrac{\varepsilon_o}{KT}$ وبالتعويض نجد:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_o}{1 + \dfrac{\varepsilon_o}{KT} - 1} \approx 2KT$$

2

من أجل $\varepsilon_o = KT$ نجد: $\bar{\varepsilon} = \dfrac{2\varepsilon_o}{e - 1} \approx 1{,}16\, KT \Rightarrow \bar{\varepsilon} > KT$

2

من أجل $\varepsilon_o >> KT$ يصبح المقدار $e^{\varepsilon_o/KT} >> 1$ ويهمل الواحد الموجود في المقام فنجد: $\bar{\varepsilon} = \dfrac{2\varepsilon_o}{e^{\varepsilon_o/KT}} \approx 0$

٣- بما أن الجسيمات غير متمايزة (كمية) فهي إما بوزونات أو فيرميونات وتخضع للتوزع $(N_i)^{qua}_{\max} = \dfrac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} \pm 1}$

وعند السويات العليا للطاقة يكون تعرض سويات الطاقة كبير، وتصبح الطاقة الإشعاعية عندئذٍ أكبر بكثير من الطاقة الحرارية $\varepsilon = \hbar\omega >> KT$. فتتحول عبارة التوزع الكمية إلى عبارة توزع مكسويل الكلاسيكية، حيث يمكننا في هذه الحالة إهمال الواحد (± 1) الموجود في مقام عبارة التوزع لأن $e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} >> 1$ بالشكل التالي:

$$N_{\substack{qua\\ \max}} = \frac{g}{e^{-\alpha}e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} \pm 1} \approx \frac{g}{e^{-\alpha}e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}} = g e^{\alpha} e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}} = g e^{\alpha} e^{\beta\varepsilon} = g e^{\alpha+\beta\varepsilon} = N_{\substack{clas\\ \max}}$$

$$\frac{N_n}{N_{n+1}} = \frac{e^{\alpha} g_n e^{\beta\varepsilon_n}}{e^{\alpha} g_{n+1} e^{\beta\varepsilon_{n+1}}} = \frac{g_n e^{\beta\varepsilon_n}}{g_{n+1} e^{\beta\varepsilon_{n+1}}} = \frac{(n+1)e^{n\beta\varepsilon_o}}{(n+2)e^{(n+1)\beta\varepsilon_o}} = \frac{n+1}{n+2}e^{-\beta\varepsilon_o} = \frac{n+1}{n+2}e^{\varepsilon_o/KT}$$

وعند السويات العليا للطاقة $n >> 1$ نلاحظ أن: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1+1/n)}{n(1+2/n)} = 1$ فنجد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{N_{n+1}} = e^{\hbar\omega/KT} > 1 \quad \Rightarrow \quad N_n > N_{n+1}$$

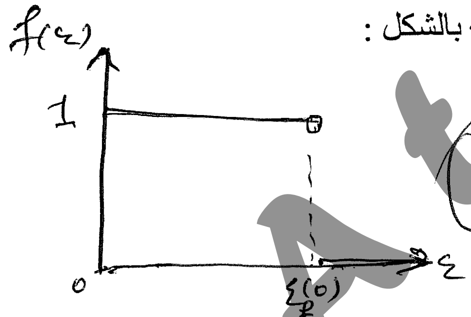
والتوزع يكون توزع طبيعي.

ج٣:

يُعرف تابع فيرمي من عبارة توزع (فيرمي – ديراك) لعدد dN من الجسيمات الواقعة في مجال الطاقة $(\varepsilon \to \varepsilon + d\varepsilon)$ الذي درجة تحلله $(g \to g + dg)$ بالشكل:

$$dN = \frac{dg(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(o)}{KT}}+1} = \frac{g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(o)}{KT}}+1} = f(\varepsilon)g(\varepsilon)\,d\varepsilon \quad ; f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(o)}{KT}}+1}$$

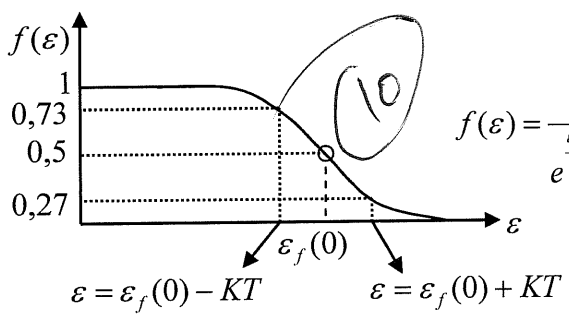
حيث $\varepsilon_f(0)$ سوية فيرمي عند درجة الصفر المطلق $T = 0k^o$ ، ونمثله بالشكل :



$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(o)}{KT}}+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{-\infty}+1} = 1 & ; \varepsilon < \varepsilon_f \\ \dfrac{1}{e^{+\infty}+1} = 0 & ; \varepsilon > \varepsilon_f \\ \dfrac{1}{e^{0/0}+1} = XX & ; \varepsilon = \varepsilon_f \end{cases}$$

نستنتج أن تابع فيرمي هو تابع احتمال لأنه يأخذ قيمه في المجال [1 - 0].

وفي جوار سوية فيرمي ، من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon = \varepsilon_f(0) \pm KT$.



$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(o)}{KT}}+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{-1}+1} \approx 0{,}73 & ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) - KT \\ \dfrac{1}{e^{0}+1} = 0{,}5 & ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) \\ \dfrac{1}{e^{+1}+1} \approx 0{,}27 & ; \varepsilon_f(0) + KT \end{cases}$$

- **تعاريف سوية فيرمي** $\varepsilon_f^{(o)}$:

١- هي الطاقة الموافقة لتوزع الفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0k^o$

٢- هي أعلى سويات الطاقة المشغولة بالكامل بالفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0k^o$ وبمعدل فيرميون واحد لكل حالة مسموحة من أجل $\varepsilon_i < \varepsilon_f^{(o)}$ ، وفارغة من أجل $\varepsilon_i > \varepsilon_f^{(o)}$.

٣- هي الطاقة الموافقة لقيمة تابع فيرمي الاحتمالي $f(\varepsilon) = 0{,}5$.

أجوبة بنود السؤال الثاني: (30 درجة)

ج ١- 15

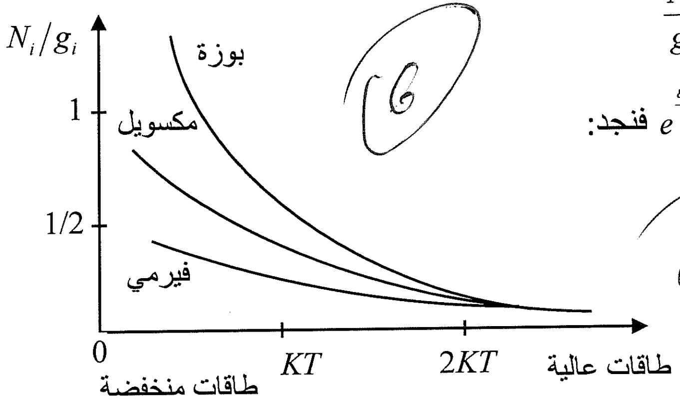
تأخذ العبارة العامة لأرقام انشغال مكسويل وبوزة وفيرمي الشكل

$$\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}\pm m}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}\pm 1}$$

حيث يأخذ الثابت m القيمة صفر في توزع مكسويل والقيمة واحد في توزعي بوزة وفيرمي، والإشارة السالبة لبوزة والموجبة لفيرمي.

- عند الطاقات العالية $(\varepsilon_i-\mu)>>KT$ يؤول توزعي بوزة وفيرمي إلى توزع مكسويل (يُهمل الواحد في المقام)

$$\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}\pm 1}\approx\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}}<<1 \quad\Rightarrow\quad \frac{N_i}{g_i}\to 0$$



شكل ( )

6

- عند الطاقات المنخفضة $(\varepsilon_i-\mu)<<KT$ يكون $e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}\geq 1$ فنجد:

- من أجل مكسويل $\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}}\leq 1$

9

- من أجل بوزة $\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}-1}>>1$

- من أجل فيرمي $\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}+1}\leq\frac{1}{2}$

ج ٢- 15

١- تعطى علاقة درجة التحلل بعنصر فراغ الطاقة الطوري بالشكل:

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon=C\,d\Gamma=C\,dq_V\,dp_V=CV\,d(\frac{4}{3}\pi P^3)=CV\,4\pi P^2 dP$$

ومن علاقة الاندفاع بالطاقة: $\varepsilon=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{P^2}{2m}$ نجد أن $P^2=2m\varepsilon \;\Rightarrow\; P=\sqrt{2m\varepsilon} \;\Rightarrow\; dP=\frac{m\,d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}$

وبالتعويض نجد المطلوب:

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon=CV\,4\pi\,2m\varepsilon\frac{m\,d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}=CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}\,(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$

٢- من عبارة تابع التحاص في الحالة المستمرة $Z=\int_0^{\infty}e^{\beta\varepsilon}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon$

وبالاستفادة من العلاقة التي تربط درجة التحلل $g(\varepsilon)$ بعنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma(\varepsilon)$

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon=C\,d\Gamma(\varepsilon)=CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$

وبالتعويض وإخراج المقدار الثابت $CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}$ خارج عبارة التكامل، واعتبار $\beta=-1/KT$:

$$Z=CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}\int_0^{\infty}\varepsilon^{1/2}\,e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x=\varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon=KT\,x \;\Rightarrow\; d\varepsilon=KT\,dx \qquad و \qquad \varepsilon^{1/2}=(KT)^{1/2}x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل:

$$Z=CV\;2\pi\;(2m)^{3/2}(KT)^{1/2}\;KT\underbrace{\int_0^{\infty}x^{1/2}\,e^{-x}\,dx}_{\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$Z=CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}(KT)^{3/2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{Z=CV\,(2\pi\,m\,KT)^{3/2}}$$

٣- للبرهان على أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي.

وذلك بالتعويض عن كلٍ بقيمته في تابع الكثافة، وإجراء التكامل على الطاقة في المجال $]0 \to \infty[$.

$$\int_0^\infty f(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}}{CV\,(2\pi m KT)^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x = \varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT\,x \;\Rightarrow\; d\varepsilon = KT\,dx \qquad \text{و} \qquad \varepsilon^{1/2} = (KT)^{1/2} x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل واستخدام تكاملات غاما نجد المطلوب

$$\int_0^\infty f(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}} (KT)^{1/2}\,KT \underbrace{\int_0^\infty x^{1/2} e^{-x}\,dx}_{\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}} (KT)^{3/2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

2

٤- حساب قيم المقادير $\bar{\varepsilon}$ و $\bar{\varepsilon}^2$ و $\overline{\Delta\varepsilon^2}$ باستخدام طريقة الوسطي الإحصائية (بدلالة الطاقة الحرارية KT).

- نحسب الطاقة الوسطى $\bar{\varepsilon}$

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^\infty \varepsilon\, f(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon$$

نوجد قيمة التكامل من تابع غاما

نفرض $x = \varepsilon/KT \Rightarrow \varepsilon = KT\,x \;\Rightarrow\; \varepsilon^{3/2} = (KT)^{3/2} x^{3/2}$ فتكون $d\varepsilon = KT\,dx$ وبالتعويض:

$$\int_0^\infty \varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon/KT} = (KT)^{3/2}\,KT \int_0^\infty x^{3/2} e^{-x}\,dx = (KT)^{5/2}\,\Gamma(\frac{5}{2}) = (KT)^{5/2}\,\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

بالتعويض نجد المطلوب

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}} (KT)^{5/2}\,\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3}{2} KT$$

3

وعليه يكون مربع القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}^2 = \frac{9}{4}(KT)^2$

- نحسب وسطي القيمة التربيعية للطاقة $\overline{\varepsilon^2}$

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_0^\infty \varepsilon^2 f(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon^{5/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نوجد قيمة التكامل بفرض $x = \varepsilon/KT \;\Rightarrow\; \varepsilon = KT\,x \;\Rightarrow\; d\varepsilon = KT\,dx$ و $\varepsilon^{5/2} = (KT)^{5/2}\,x^{5/2}$

وبالتعويض

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} (KT)^{5/2} KT \int_0^\infty x^{5/2} e^{-x}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(KT)^2\,\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(KT)^2 \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{15}{4}(KT)^2$$

3

- نحسب تشتت الطاقة الحركية من العلاقة $\overline{\Delta\varepsilon^2} = \overline{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2} = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2$

وذلك بالتعويض عن كل مقدار بقيمته فنجد

$$\overline{\Delta\varepsilon^2} = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2 = \frac{15}{4}(KT)^2 - \frac{9}{4}(KT)^2 = \frac{3}{2}(KT)^2$$

3

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الثاني للعام الدراسي 2018 - 2019

س1- أجب عن البند الأول، ثم أجب عن أحد البندين 2 أو 3 فقط: (20 درجة)

1- اكتب العبارة العامة لأرقام انشغال مكسويل وبوزة وفيرمي، ومثّل بيانياً المشغولية عند الطاقات العالية والمنخفضة.

2- استنتج عبارة **رقم الانشغال** $N_{i(M-B)\,\max}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

3- جملة مكونة من N جسيم، حجمها V وتحاصها $Z=\lambda V T^3$، حيث λ ثابت. أوجد القيمة الوسطى لطاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$، وطاقة هلمهولتز الحرة $F_{\min}$، والضغط P، والأنتروبية $S_{\max}$، والطاقة الداخلية U، والسعة الحرارية C_V.

س2- أجب عن البندين التاليين: (50 درجة)

1- أوجد العدد النسبي للبوزونات المثارة N_E وغير المثارة N_o إلى العدد الكلي N عند درجات الحرارة العالية $T>T_B$ والمنخفضة $T\le T_B$، ثم مثل النتائج الحاصلة N_E/N و N_o/N بيانياً بدلالة T/T_B.

- برهن أن طاقة الجملة في الحالة $T\le T_B$ تأخذ الصيغة التالية $U_{\min}\approx 2V\left(\dfrac{2\pi mKT}{h^2}\right)^{3/2}KT$

علماً أن: $\int_0^\infty \dfrac{x^{q-1}}{e^x-1}dx=\Gamma(q)\zeta(q)\;;\; q>1$ و $\zeta(\frac{3}{2})=2{,}612$ و $\zeta(\frac{5}{2})=1{,}341$

و $\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=n\Gamma(n)=n!$ و $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

2- جملة مكونة من N جسيم $(N>>1)$، موزعة على ثلاث سويات للطاقة، $\varepsilon_1=0\;(J)$ و $\varepsilon_2=KT\;(J)$ و $\varepsilon_3=2KT\;(J)$، السويات متحللة بالشكل $g_1=N$ و $g_2=g_3=1$. والمطلوب:

١- أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي (العدد فقط بدلالة N).

٢- أوجد طاقة الحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N-1}},\overset{\varepsilon_2}{\hat{1}},\overset{\varepsilon_3}{\hat{0}})$، ثم أوجد وزنها الإحصائي (بدلالة N). في الحالات التالية:
A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

- [بفرض $N=2$، احسب القيم الرقمية للأوزان الإحصائية للحالات السابقة (A,B,C)، ومثلها.]

٣- بفرض أن الجسيمات متمايزة، أوجد أرقام انشغال حالة التوزع الماكروي الأكثر احتمال (N_1,N_2,N_3) بدلالة العدد N وتابع التحاص Z، وتحقق من ذلك (تحقق أن $N_1+N_2+N_3=N$). ما نوع التوزع الحاصل ؟

- احسب النسبة المئوية لعدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة محصورة في المجال $N_o(0\to\vartheta_o=\vartheta_H)$ ثم أعد الحساب لذات العينة عندما تتحرك وفق اتجاه ما كالمحور ox مثلاً. علماً أن: $E_r(1)=0{,}8427$

س3- أجب عن أحد البندين التاليين فقط: (20 درجة)

1- تنتقل الإلكترونات (عند الدرجة T) في أشباه الموصلات من قطاع التكافؤ VB إلى قطاع التوصيل CB والمطلوب: استنتج (بالاعتماد على تابع فيرمي الاحتمالي) عبارة الكثافة الإلكترونية n_e في قطاع التوصيل، علماً أن طاقة الإلكترون في هذا القطاع هي $(\varepsilon-\varepsilon_C)$. ما هو التناسب القائم بين n_e و T.

2- استنتج علاقة كثافة التيار الإلكتروني السطحية $J_x=\lambda T^2 e^{-\phi/KT}$ المنبعث حرارياً من سطح موصل أو شبه موصل والمعروفة بصيغة ريتشاردسون - دخمان. (مع الرسم اللازم). (اعتبر $\int_\varepsilon^{+\infty}\dfrac{d\varepsilon}{e^{-\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}+1}\approx\dfrac{1}{\beta}e^{\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}$)

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس الأحد 30 / 6 / 2019

مدرس المقرر د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء

الفصل الثاني للعام الدراسي 2018 – 2019 الدرجة العظمى: تسعون درجة

أجوبة بنود السؤال الأول: (20 درجة)

ج1- (اجباري) 5

تأخذ العبارة العامة لأرقام انشغال مكسويل وبوزة وفيرمي الشكل

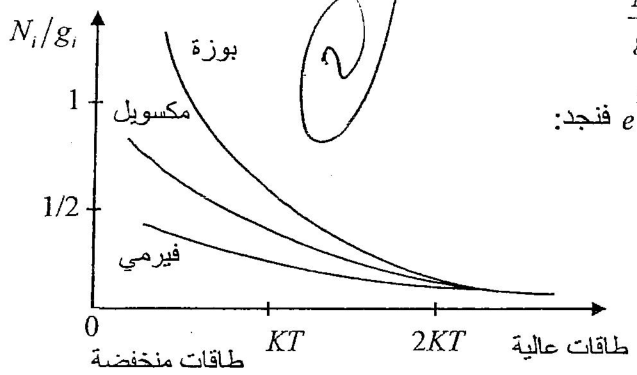
$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} \pm m} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{KT}} \pm 1}$$

حيث يأخذ الثابت m القيمة صفر في توزع مكسويل والقيمة واحد في توزعي بوزة وفيرمي، والإشارة السالبة لبوزة والموجبة لفيرمي.

- عند الطاقات العالية $(\varepsilon_i - \mu) >> KT$ يؤول توزعي بوزة وفيرمي إلى توزع مكسويل (يُهمل الواحد في المقام)

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{KT}} \pm 1} \approx \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{KT}}} << 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{N_i}{g_i} \to 0$$

2



شكل ( )

- عند الطاقات المنخفضة $(\varepsilon_i - \mu) << KT$ يكون $e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{KT}} \geq 1$ فنجد:

- من أجل مكسويل $\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{KT}}} \leq 1$
- من أجل بوزة $\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{KT}} - 1} >> 1$
- من أجل فيرمي $\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{KT}} + 1} \leq \frac{1}{2}$

3

ج2- (اختياري) 15

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$، ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{M-B})$، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln\,N! + \sum_i \left[N_i\, Ln\, g_i - Ln\, N_i!\right]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $Ln\,x! \approx x\,Ln\,x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\, Ln\, g_i - N_i\, Ln\, N_i + N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial\, Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i}\left[N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\, Ln\, g_i - N_i\, Ln\, N_i + N_i)\right] dN_i \qquad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln\, g_i - Ln\, N_i - 1 + 1)\, dN_i = \sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i$$

10

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i\, dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i\, dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i \left(Ln\frac{g_i}{N_i}+\alpha+\beta\,\varepsilon_i\right)dN_i=0 \;\Rightarrow\; Ln\frac{g_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\,\varepsilon_i)\;\Rightarrow\;\frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\boxed{N_{i(M-B)}=g_i\,e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{N_{i(M-B)}=e^{\alpha}\,g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}}$$

٤

ج3- (اختياري) 15

بما أن $Z=\lambda V T^3$ نجد $LnZ=Ln\lambda+LnV+3LnT$ ١

نوجد المشتقات لاستخدامها في الطلبات اللاحقة:

$$\left(\frac{\partial LnZ}{\partial T}\right)_V=\frac{3}{T} \quad و \quad \left(\frac{\partial LnZ}{\partial V}\right)_T=\frac{1}{V}$$

١ ١

القيمة الوسطى لطاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ نجدها من العلاقة: $\bar{\varepsilon}=\frac{\partial LnZ}{\partial\beta}=KT^2\left(\frac{\partial LnZ}{\partial T}\right)_V=KT^2\frac{3}{T}=3KT$ ٢

الطاقة الحرة F، $F_{\min}=-NKT\,LnZ=-NKT(Ln\lambda+LnV+3LnT)$ ٢

الضغط P: $P=-(\partial F/\partial V)_T=NKT\left(\frac{\partial LnZ}{\partial V}\right)_T=NKT\frac{1}{V}$ ٢

أي أن الجملة تحقق معادلة الحالة للغاز المثالي $PV=NKT$

الأنتروبية S: $S=-(\partial F/\partial T)_V=NK\left[LnZ+T\left(\frac{\partial LnZ}{\partial T}\right)_V\right]=NK\left[Ln\lambda+LnV+3LnT+3\right]$ ٢

الطاقة الداخلية U: $U=F+TS=NKT^2\left(\frac{\partial LnZ}{\partial T}\right)_V=3NKT$ ٢

السعة الحرارية للغاز C_V من العبارة:

$$C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V}=-T\left(\frac{\partial^2F}{\partial T^2}\right)_V=T\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{\partial}{\partial T}NKT\,(Ln\lambda+LnV+3LnT)\right]$$

$$C_V=T\frac{\partial}{\partial T}\left[NK\,(Ln\lambda+LnV+3LnT)+3NK\right]=3NK$$ ٢

أجوبة بنود السؤال الثاني: (50 درجة)

ج1- (اجباري) 20

العدد النسبي للبوزونات المثارة وغير المثارة عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة:

عند درجات الحرارة العالية $T>T_B$: تكون معظم البوزونات البالغ عددها N_E في الحالة المثارة، وعدد قليل جداً منها N_o في السوية الأرضية. أي $N_E>>N_o$ و $N=N_E+N_o$. أي يمكننا اعتبار $N\approx N_E$

لإيجاد عدد البوزونات المثارة N_E (الموزعة على سويات الطاقة فوق الأرضية) نستخدم عبارة رقم الانشغال (في الحالة الأكثر احتمال)، (يعد إهمال N_o لأنه رقم صغير جداً عند $T>T_B$ في حين لا يجوز إهماله عند $T\le T_B$)

$$N_E=\sum_i N_{i(B-E)\,\max}=\sum_i\frac{g_i}{e^{-\alpha-\beta\varepsilon_i}-1}$$

وبالانتقال من عبارة المجموع $\sum$ إلى التكامل $\int$، واعتبار $e^{-\alpha}=1$، والاستفادة من علاقة درجة التحلل $g(\varepsilon)$ بعنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma(\varepsilon)$ التالية: $g(\varepsilon)d\varepsilon=C\,d\Gamma(\varepsilon)=CV2\pi\,(2m)^{3/2}(\varepsilon)^{1/2}d\varepsilon$ نكتب:

$$N_E=\int_0^\infty\frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\alpha-\beta\varepsilon_i}-1}=\int_0^\infty\frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\alpha}e^{-\beta\varepsilon_i}-1}=V\,2\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon}{e^{\varepsilon/KT}-1}\quad;\; C=\frac{1}{h^3}$$

لحل التكامل نفرض $x=\varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon=KT\,x\;\Rightarrow\;d\varepsilon=KT\,dx \qquad و \qquad \varepsilon^{1/2}=(KT)^{1/2}x^{1/2}$$

بالتعويض في عبارة التكامل والضرب والقسمة على $\sqrt{\pi}$:

$$N_E = V\,2\pi \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} (KT)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}\,dx}{e^x - 1} = V \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi m KT}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}\,dx}{e^x - 1}\,.$$

وبملاحظة أن قيمة التكامل $\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x-1}dx = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}-1}}{e^x-1}dx = \Gamma(\frac{3}{2})\zeta(\frac{3}{2}) = 1{,}306\sqrt{\pi}$ نجد بالتعويض:

7

$$\boxed{N_E = 2{,}612 V \left(\frac{2\pi m KT}{h^2}\right)^{3/2}} \qquad (1)$$

فيكون عدد البوزونات غير المثارة N_o الموجودة أصلاً في السوية الأرضية:

$$\boxed{N_o = N - N_E} \qquad (2)$$

أما عند درجات الحرارة المنخفضة $T \le T_B$: فيحدث تكاثف للبوزونات المثارة، وتهبط جميعها لتستقر النسبة العظمى منها في السوية الأرضية، إلا النذر اليسير الذي نعتبره مهملاً $N_E \approx 0$ فيهبط ليستقر في السويات الأعلى القريبة من الأرضية، أي تعتبر عدد البوزونات المثارة شبه معدوم $N_E \approx 0$.

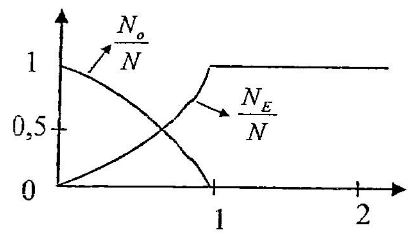
أما العدد الإجمالي فهو حقيقةً الموجود في السوية الأرضية $N = N_o + N_E \approx N_o$.

نحصل على عبارة العدد الإجمالي للبوزونات المتكثفة بالتعويض عن T بـ T_B، وعن N_E بـ N، في (1) فنجد:

$$\boxed{N = 2{,}612 V \left(\frac{2\pi m KT_B}{h^2}\right)^{3/2}} \qquad (3)$$

لمعرفة نسبة عدد البوزونات المثارة إلى العدد الكلي بدلالة درجة الحرارة نقسم (1) على (3) فنجد:

$$\boxed{\frac{N_E}{N} = \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}} \qquad (4)$$



شكل ( )

أما نسبة عدد البوزونات غير المثارة N_o (الموجودة أصلاً في السوية الأرضية) إلى العدد الكلي N بدلالة درجة الحرارة فنجده بتعويض (4) في (2) كما يلي:

6

$$\frac{N_o}{N} = 1 - \frac{N_E}{N} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{N_o}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}} \qquad (5)$$

يمكن تمثيل العلاقتين (4) و (5) بيانياً كما في الشكل ( ).

- البرهان على أن طاقة الجملة في الحالة $T \le T_B$ تأخذ الصيغة $U_{min} \approx 2V \left(\frac{2\pi m KT}{h^2}\right)^{3/2} KT$

من أجل $\boxed{T \le T_B}$: يحصل تكاثف للبوزونات نعتبر فيه $\mu \approx 0$. فتكون الطاقة الداخلية للجملة:

$$U_{min} = N\varepsilon = \int_0^\infty \frac{\varepsilon\, g(\varepsilon)\, d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/KT} - 1} \qquad ; g(\varepsilon)\,d\varepsilon = C\, d\Gamma(\varepsilon) = V\,2\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2}\, d\varepsilon$$

$$U_{min} = V\,2\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}\, d\varepsilon}{e^{\varepsilon/KT} - 1}$$

لحل التكامل نفرض $x = \varepsilon / KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT\,x \;\Rightarrow\; d\varepsilon = KT\,dx \qquad \text{و} \qquad \varepsilon^{3/2} = (KT)^{3/2} x^{3/2}$$

بالتعويض في عبارة التكامل والضرب والقسمة على $\sqrt{\pi}$:

$$U_{min} = V\,2\pi \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} (KT)^{3/2} KT \int_0^\infty \frac{x^{3/2}\,dx}{e^x - 1} = V \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi m KT}{h^2}\right)^{3/2} KT \int_0^\infty \frac{x^{3/2}\,dx}{e^x - 1}$$

نستنتج أن: $N_1 > N_2 > N_3$ فالتوزع طبيعي.

- لإيجاد النسبة المئوية لعدد الجسيمات التي تُمتلك سرعة مطلقة محصورة في المجال $N_o(0 \to \vartheta_o = \vartheta_H)$

نوجد قيمة الوسيط x بالاستفادة من تعريف السرعة الأكثر احتمالاً $\vartheta_o = \vartheta_H = 1/\sqrt{\alpha}$

فنجد من تعريف الوسيط $x = \sqrt{\alpha}\ \vartheta_o \Rightarrow x = \sqrt{\alpha}\ \vartheta_H = 1$

بالتعويض في العلاقة $N_o(0 \to \vartheta_o) = N\left[E_r(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}\right]$ والتعويض عن $E_r(1)$ بقيمتيهما نجد:

$$N_o(0 \to \vartheta_H) = N\left[E_r(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}\, e}\right] = N\left[0,8427 - \frac{2}{\sqrt{3,14 \times 2,718}}\right] = N\left[0,8427 - 0,4153\right] = 0,4274\ N$$

أي أن عدد الجسيمات N_o التي تقع سرعها المطلقة في المجالات المعطاة بدلالة السرعة المميزة ϑ_H هو نسبة مئوية من التعداد الكلي للجسيمات N:

$$N_o(0 \to \vartheta_H) = \frac{42,74}{100} N = 42,74\ \%\ N$$ 2

- لإيجاد النسبة المئوية لذات العينة عندما تتحرك وفق اتجاه ما كالمحور ox مثلاً. نطبق العلاقة

$$N_o(0 \to \vartheta_o = \vartheta_H) = \frac{N}{2} E_r(x) = \frac{N}{2} E_r(1) = \frac{N}{2} 0,8427 = 0,4214\ N = 42,14\ \%\ N$$ 1

أجوبة بنود السؤال الثالث: (20 درجة)

ج1- (اختياري) 20

يُعطى احتمال انشغال سوية الطاقة ε في قطاع التوصيل بإلكترون (في الدرجة T) وفق تابع فيرمي الاحتمالي التالي

$$f_e(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(T)}{KT}} + 1}$$

بما أن طاقة الإلكترون في قطاع التوصيل $(\varepsilon - \varepsilon_C)$. فتكون درجة تحلل السوية ε (بعد الضرب بـ 2 لأنها إلكترونات)

$$g_e(\varepsilon)\, d\varepsilon = C\, d\Gamma(\varepsilon) = 4\pi V \left(\frac{2m_e}{h^2}\right)^{3/2} (\varepsilon - \varepsilon_C)^{1/2} d\varepsilon$$

نحسب الكثافة الإلكترونية $n_e = N_e/V$ في قطاع التوصيل في المجال $]\varepsilon_C \to \infty[$ بتطبيق توزع فيرمي – ديراك التالي ومن ثم التعويض عن كل بقيمته

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{1}{V}\int_{\varepsilon_C}^{\infty} f_e(\varepsilon)\, g_e(\varepsilon)\, d\varepsilon = 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2}\right)^{3/2} \int_{\varepsilon_C}^{\infty} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_C)^{1/2}}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(T)}{KT}} + 1} d\varepsilon$$ 7

ويما أن فارق الطاقة $\varepsilon - \varepsilon_f(T) >> KT$ يمكن إهمال الواحد في المقام

$$n_e \approx 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2}\right)^{3/2} \int_{\varepsilon_C}^{\infty} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_C)^{1/2}}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(T)}{KT}}} d\varepsilon$$

$$n_e \approx 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2}\right)^{3/2} e^{\frac{\varepsilon_f(T)}{KT}} \int_{\varepsilon_C}^{\infty} (\varepsilon - \varepsilon_C)^{1/2} e^{-\frac{\varepsilon}{KT}} d\varepsilon$$

وبطرح وإضافة المقدار ε_C في أس التابع النيبري (الموجود داخل التكامل).

$$n_e \approx 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2}\right)^{3/2} e^{\frac{\varepsilon_f(T)}{KT}} \int_{\varepsilon_C}^{\infty} (\varepsilon - \varepsilon_C)^{1/2} e^{-\frac{\varepsilon - \varepsilon_C + \varepsilon_C}{KT}} d\varepsilon$$

وبإخراج المقدار $e^{-\varepsilon_C/KT}$ خارج التكامل

وبملاحظة أن قيمة التكامل $\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x-1}dx=\int_0^\infty \frac{x^{\frac{5}{2}-1}}{e^x-1}dx=\Gamma(\frac{5}{2})\zeta(\frac{5}{2})=\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}1{,}341$ نجد بالتعويض:

$$U_{\min}\approx 2V\left(\frac{2\pi mKT}{h^2}\right)^{3/2}KT$$

7

ج2- (اجباري) 30

١- عدد حالات التوزع الماكروي:

$$N_o=\frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!}=\frac{(N+3-1)!}{N!(3-1)!}=\frac{(N+2)!}{2N!}=\frac{(N+2)(N+1)N!}{2N!}=\frac{(N+2)(N+1)}{2}$$ 3

٢- طاقة الحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1},\overset{\varepsilon_2}{\hat{1}},\overset{\varepsilon_3}{\hat{0}})$ نجدها من العلاقة

$$U_{(N-1,1,0)}=\sum_i N_i\varepsilon_i=(N-1)\times 0+1\times KT+0\times 2KT=KT$$ 3

الأوزان الإحصائية:

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(N-1,1,0)}=N!\left(\frac{N^{N-1}}{(N-1)!}\frac{1^1}{1!}\frac{1^0}{0!}\right)=N\,N^{N-1}=N^N$$ 3

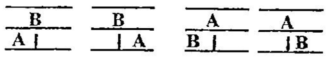
B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\Rightarrow W_{(N-1,1,0)}=\frac{(N-1+N-1)!}{(N-1)!\,(N-1)!}\,\frac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)!}\,\frac{(0+1-1)!}{0!\,(1-1)!}=\frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}$$ 3

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1},\overset{\varepsilon_2}{\hat{1}},\overset{\varepsilon_3}{\hat{0}})$ تحقق الشرط $g_i\ge N_i$ فهي مقبولة

$$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}\Rightarrow W_{(N-1,1,0)}=\frac{N!}{(N-1)!\,(N-N+1)!}\,\frac{1!}{1!\,(1-1)!}\,\frac{1!}{0!\,(1-0)!}=N$$ 3

- **الحسابات الرقمية والتمثيل:** الحالة المطلوبة هي $(\overset{\varepsilon_1}{\hat{1}},\overset{\varepsilon_2}{\hat{1}},\overset{\varepsilon_3}{\hat{0}})$ و $g_1=2$ و $g_2=g_3=1$



A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية): $W_{M-B}=N^N=2^2=4$ 2

B- الجسيمات بوزونات: $W_{B-E}=\frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}=\frac{2!}{1}=2$ 2

C- الجسيمات فيرميونات: $W_{F-D}=N=2$ 2

٣- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية، نوجد تحاص الجملة z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z=\sum_i g_i e^{\beta\varepsilon_i}=\sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT}=Ne^{-0}+1e^{-1}+1e^{-2}=N+e^{-1}+e^{-2}$$

نوجد رقم انشغال السويات في الحالة الأكثر احتمال من مكسويل

$$N_i=g_ie^{\alpha+\beta\varepsilon_i}=e^\alpha g_ie^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}=\frac{N}{Z}g_ie^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}$$

فيكون: $N_1=\frac{N}{Z}Ne^{-0}=\frac{N^2}{Z}$ و $N_2=\frac{N}{Z}1e^{-1}=\frac{N}{Z}e^{-1}$ و $N_3=\frac{N}{Z}1e^{-2}=\frac{N}{Z}e^{-2}$. 3

ويمكن التحقق من ذلك بالجمع

$$N_1+N_2+N_3=\frac{N^2}{Z}+\frac{N}{Z}e^{-1}+\frac{N}{Z}e^{-2}=\frac{N}{Z}(N+e^{-1}+e^{-2})=\frac{N}{Z}Z=N$$

لإيجاد نوع التوزع الحاصل (في الحالة الأكثر احتمال) نوجد نسب أرقام الانشغال 3

$$\frac{N_1}{N_2}=Ne>1\Rightarrow N_1>N_2 \quad \text{و} \quad \frac{N_2}{N_3}=\frac{e^{-1}}{e^{-2}}=e>1\Rightarrow N_2>N_3 \quad \text{و} \quad \frac{N_1}{N_3}=Ne^2>1\Rightarrow N_1>N_3$$

$$n_e \approx 4\pi\left(\frac{2m_e}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon_C-\varepsilon_f(T)}{KT}} \int_{\varepsilon_C}^{\infty} (\varepsilon-\varepsilon_C)^{1/2} e^{-\frac{\varepsilon-\varepsilon_C}{KT}} d\varepsilon$$ / 7

نحل التكامل بتحويله لتكامل غاما وذلك بفرض

$$x=\frac{\varepsilon-\varepsilon_C}{KT} \Rightarrow (\varepsilon-\varepsilon_C)^{1/2}=(KT)^{1/2}x^{1/2} \quad \wp \quad d\varepsilon = KT\,dx$$

وبمراعاة حدود التكامل نجد

$$n_e \approx 4\pi\left(\frac{2m_e}{h^2}\right)^{3/2} (KT)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon_C-\varepsilon_f(T)}{KT}} \underbrace{\int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx}_{\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$n_e \approx \underbrace{2\left(\frac{2\pi m_e KT}{h^2}\right)^{3/2}}_{n_{CB}} e^{-\frac{\varepsilon_c-\varepsilon_f(T)}{KT}} \approx n_{CB}\, e^{-\frac{\varepsilon_c-\varepsilon_f(T)}{KT}}$$

6

يدعى المقدار $n_{CB}=2\left(\frac{2\pi m_e KT}{h^2}\right)^{3/2}$ التركيز الكمي للإلكترونات في قطاع التوصيل CB في الدرجة T

- تشير النتيجة إلى أن الكثافة الإلكترونية في قطاع التوصيل متناسبة طرداً مع $T^{3/2}$ (تابعة لدرجة الحرارة).

ج-2 (اختياري) 20

تحسب الكثافة السطحية للتيار الإلكتروني J_x من العلاقة المعروفة في الكهرباء

$$J_x=\frac{N_e}{V}q\upsilon_x=n_e\,\upsilon_x\,q \qquad (*)$$

حيث N_e عدد الإلكترونات في الحجم V (شحنة كل منها q) وتتحرك وفق المحور ox عمودياً على السطح S بسرعة υ_x

نحسب الكثافة الإلكترونية $n_e=N_e/V$ الواردة في (*) بتطبيق توزع فيرمي – ديراك

$$n_e=\frac{N}{V}=\frac{1}{V}\int f(P)\,g(P)\,dP \qquad (**)$$

حيث $f(P)=f(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(T)}{kT}}+1}=\frac{1}{e^{-\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}+1}$ تابع فيرمي واعتبار $\beta=-1/KT$

كما نوجد درجة التحلل $g(P)dP$ بدلالة عنصر فراغ الاندفاع الطوري $d\Gamma(P)$. ونضربه بـ 2 نظراً لتمتع الفيرميون بسبين مزدوج $S=\pm\hbar/2$ ، (يعبر الرقم 2 عن تحلل سبين الإلكترون $g_S=2S+1=2$)

واعتبار أن $C=1/h^3$ (لأن الجسيمات كمية) بالشكل:

$$g(P)\,dP=C\,d\Gamma(P)=2C\,dq_V\,dp_V=\frac{2V}{h^3}dp_V=\frac{2V}{h^3}dP_x\,dP_y\,dP_Z$$

بالتعويض في (**) عن كلٍ بقيمته واعتبار التكامل على الحجم (الأبعاد الثلاثة) نجد

$$n_e=\frac{2}{h^3}\iiint_{P_z P_y P_x}\frac{1}{e^{-\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}+1}dP_x\,dP_y\,dP_Z$$ / 7

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم المقتلع هي طاقة حركية فقط

$$\varepsilon=m\vartheta^2/2=p^2/2m \Rightarrow p^2=2m\varepsilon \quad \wp \quad p=\sqrt{2m\varepsilon}$$

وهذا يعني أن كمية الحركة وفق المحور ox (باتجاه سطح الانبعاث) ستكون في المجال $p_x\in[\sqrt{2m\varepsilon}\to\infty[$

أما المركبات الأخرى لكمية الحركة فستكون في المجال $p_{y,z}\in[-\infty\to+\infty[$

وبالعودة لـ (*) نجد كثافة التيار الإلكتروني وفق المحور ox

$$J_x = n_e \dot{\upsilon}_x q = \frac{2q}{h^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\sqrt{2m\varepsilon}}^{+\infty} \frac{\upsilon_x}{e^{-\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}+1} dP_x\, dP_y\, dP_Z$$

لانجاز التكامل على المحور ox (الذي يجري عليه تغير في كمية حركة الإلكترون) نلاحظ من تعريف الطاقة بدلالة مركبات كمية الحركة أن تفاضل الطاقة يكون فقط بالنسبة للمركبة P_x لأن بقية المركبات تعتبر ثوابت

$$\varepsilon = \frac{P^2}{2m} = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial P_x} dP_x = \frac{P_x}{m} dP_x = \frac{m\upsilon_x}{m} dP_x = \upsilon_x\, dP_x$$

وباعتبار أن المقدار $\sqrt{2m\varepsilon} = \varepsilon'$ هو طاقة والتعويض نجد

$$J_x = \frac{2q}{h^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\varepsilon'}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{e^{-\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}+1}\, dP_y\, dP_Z$$

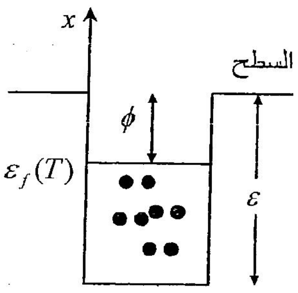
نعوض عن قيمة التكامل المتعلقة بالطاقة المعطاة

$$\int_{\varepsilon'}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{e^{-\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}+1} \approx \frac{1}{\beta} e^{\beta[\varepsilon'-\varepsilon_f(T)]}$$

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}\, dP_y\, dP_Z$$ / 7

لحساب كثافة التيار الإلكتروني J_x المنبعث بفعل التأثيرات الحرارية من سطح معدن (موصل) S نفرض بئر كموني عميق كما بالشكل ()، وعلى الإلكترون القادر على الوصول إلى السطح امتلاك طاقة حرارية ε كافية لتحريره من ذرته (تساوي على الأقل طاقة ارتباط الإلكترون بالذرة) وتُكسبه طاقة حركية لاجتياز البئر والوصول إلى السطح.

تدعى طاقة التحرير هذه وفقاً لأينشتين (في المفعول الكهرضوئي) تابع العمل ϕ *Work function*، عندما تمتلك الإلكترونات طاقة قريبة من سوية فيرمي $\varepsilon_f(T)$ (في الدرجة T)، ونكتب هذه العلاقة بالشكل



شكل ( )

$$\varepsilon = \varepsilon_f(T) + \phi + P^2/2m \iff \varepsilon - \varepsilon_f(T) = \phi + P^2/2m$$

وبما أن كمية الحركة المتبقية هي المتعلقة بالمركبتين y و z أي أن علاقة فرق الطاقة

$$\varepsilon - \varepsilon_f(T) = \phi + \frac{P_y^2 + P_z^2}{2m}$$

بالتعويض في عبارة التكامل الأخيرة نجد

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta[\phi + \frac{P_y^2+P_z^2}{2m}]}\, dP_y\, dP_Z$$

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3} e^{\beta\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{P_y^2}{2mKT}} dP_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{P_z^2}{2mKT}} dP_Z$$

وبالاستفادة من تكاملات بواسون

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = 2\int_0^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = 2\left(\frac{0!}{0!\,2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad ; n = 0 \text{ (زوجي)}$$

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3} e^{-\phi/KT}\sqrt{2\pi mKT}\,\sqrt{2\pi mKT}$$

وباعتبار $\beta = |1/KT|$ نجد صيغة ريتشاردسون – دخمان المطلوبة

$$J_x = \frac{4\pi m q}{\beta^2 h^3} e^{-\phi/KT} = \frac{4\pi m q}{h^3}(KT)^2\, e^{-\phi/KT}$$

أو بالشكل

$$J_x = \frac{4\pi m K^2 q}{h^3} T^2\, e^{-\phi/KT} = \lambda\, T^2\, e^{-\phi/KT} \quad ; \lambda = \frac{4\pi m_e K^2 q_e}{h^3}$$ / b

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الثاني للعام الدراسي 2017 - 2018

س1- أجب عن البندين التاليين: (45 درجة)

1- أوجد بدلالة المعطيات $Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$ و $P_i = \frac{g_i}{Z} e^{\beta \varepsilon_i}$:

القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}$، والانحراف المعياري $\overline{\varepsilon^2}$، والتشتت $\overline{\Delta \varepsilon^2}$، (بدلالة Z أو LnZ والمشتقة $\partial/\partial\beta$).

- استفد من علاقة المشتقة $\partial/\partial\beta$ بالمشتقة $\partial/\partial T$ ومن عبارة تابع التحاص $Z = CV\left(2\pi\, m KT\right)^{3/2}$

في البرهان على أن صيغة طاقة الجملة (بثبات الحجم) هي $U = N\bar{\varepsilon} = N\left(\frac{\partial Ln Z}{\partial \beta}\right)_V = \frac{3}{2}NKT$.

2- استنتج عبارة السعة الحرارية C_V للغاز الفونوني في الأجسام الصلبة وفقاً لتفسير آينشتين، ثم ناقش النتيجة الحاصلة عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة.

س2- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (45 درجة)

1- جملة مكونة من N جسيم $(N >> 1)$، موزعة على ثلاث سويات للطاقة، $\varepsilon_1 = 0 \ (J)$ و $\varepsilon_2 = KT \ (J)$ و $\varepsilon_3 = 2KT \ (J)$، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_2 = g_3 = N$. والمطلوب:

1- أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي (العدد فقط بدلالة N).

2- أوجد طاقة الحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{0}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{1}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N-1}})$، ثم أوجد وزنها الإحصائي في الحالات التالية:

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

3- بفرض أن الجسيمات متمايزة، أوجد أرقام انشغال حالة التوزع الماكروي الأكثر احتمال (N_1, N_2, N_3) بدلالة العدد N وتابع التحاص Z، وتحقق من ذلك (تحقق أن $N_1 + N_2 + N_3 = N$). ما نوع التوزع الحاصل ؟.

2- أوجد التحاص الكلاسيكي لجزيء ثنائي الذرة واقع في المستوي (x,y) ويدور حول المحورoz

3- إذا علمت أن الطاقة الداخلية لغاز البوزون عند درجات حرارة تفوق درجة التكاثف $T > T_B$ هي ذاتها الطاقة الداخلية لغاز مكسويل الكلاسيكي $U_{\max} = \frac{3}{2}NKT = U_{Clas}$.

وعند الدرجات الأقل $T \le T_B$ تأخذ الصيغة $U_{\min} \approx 0,77\, NKT\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}$. والمطلوب: أوجد السعات الحرارية $C_{V\max}$ و $C_{V\min}$ لمجالي الحرارة، وارسم الخط البياني لتحولات C_V بدلالة T مع الشرح.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس الأحد 15 / 7 / 2018

مدرس المقرر د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء

الفصل الثاني للعام الدراسي 2017 – 2018 الدرجة العظمى: تسعون درجة

أجوبة بنود السؤال الأول: (45 درجة)

ج1- بما أن $P_i = \frac{g_i}{Z} e^{\beta \varepsilon_i}$ تابع كثافة احتمال فإن القيمة الوسطى لأي مقدار (الطاقة مثلاً) تعطى بالعلاقة

20

$$\bar{\varepsilon} = \sum_i \varepsilon_i P_i = \frac{1}{Z} \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

بما أن $\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$ نجد بالتعويض $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\partial Z/Z}{\partial \beta} = \frac{\partial Ln Z}{\partial \beta}$

5

وبالمثل يكون الانحراف المعياري $\overline{\varepsilon^2} = \sum_i \varepsilon_i^2 P_i = \frac{1}{Z} \sum_i \varepsilon_i^2 g_i e^{\beta \varepsilon_i}$

بما أن $\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$ يكون $\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \sum_i \varepsilon_i^2 g_i e^{\beta \varepsilon_i}$ نجد بالتعويض $\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$

5

$$\overline{\Delta\varepsilon^2} = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial Z}{\partial \beta} - \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right) + \frac{1}{Z^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)\frac{\partial Z}{\partial \beta} - \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial Z/Z}{\partial \beta}\right) + \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2 - \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial Ln Z}{\partial \beta}\right) = \frac{\partial^2 Ln Z}{\partial \beta^2}$$

5

- نوجد لغارتم تابع التحاص $Z = CV\left(2\pi m KT\right)^{3/2}$، ثم مشتقة اللغارتم.

$$Ln Z = Ln C + Ln V + \frac{3}{2} Ln\left(2\pi mK\right) + \frac{3}{2} Ln T \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial Ln Z}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2T}$$

وبالاستفادة من العلاقة بين المشتقات $\frac{\partial}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T}$ نجد

وبالتعويض عن كلٍ بقيمته في عبارة الطاقة نجد المطلوب كما يلي

$$U = N\bar{\varepsilon} = N\left(\frac{\partial Ln Z}{\partial \beta}\right)_V = NKT^2 \underbrace{\left(\frac{\partial Ln Z}{\partial T}\right)_V}_{3/2T} = \frac{3}{2} NKT$$

5

ج2- تفسير آينشتين:

25

افترض آينشتين (اعتماداً على مفاهيم النظرية الكوانتية) أن ذرات الشبكة البلورية عبارة عن هزازات مرونة توافقية بسيطة، ومستقلة، وتهتز في الأبعاد الثلاثة حول مواضع اتزانها فتصدر عنها أمواج مرنة بتردد ثابت.

تعطى طاقة الهزاز الكوانتي بالصيغة

$$\varepsilon_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

5

أي أن للهزاز طاقة $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ في السوية الأرضية $n = 0$ عند درجة الصفر المطلق $T = 0\ k^o$

يعطى تابع تحاص سويات الطاقة غير المتحللة للفونونات بصيغته المعروفة

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{g_n}_{1}e^{\beta\varepsilon_n}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{\beta(n+\frac{1}{2})\hbar\omega}=e^{\beta\frac{\hbar\omega}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{\beta n\hbar\omega}=e^{-\frac{\hbar\omega}{2KT}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{n\hbar\omega}{KT}}=e^{-\frac{\theta_E}{2T}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\frac{\theta_E}{T}}$$

حيث افترضنا درجة حرارة آينشتين $\theta_E=\dfrac{\hbar\omega}{K}$ مقدار ثابت، وبكتابة المجموع نجد

$$Z=e^{-\frac{\theta_E}{2T}}(1+e^{-\frac{\theta_E}{T}}+e^{-2\frac{\theta_E}{T}}+e^{-3\frac{\theta_E}{T}}+......)$$

السلسلة هندسية حدها الأول واحد وأساسها $e^{-\frac{\theta_E}{T}}<1$ فيكون مجموعها $S=1\dfrac{1-\overbrace{(e^{-\frac{\theta_E}{T}})^n}^{0}}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}}\approx\dfrac{1}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}}$ وبالتعويض

$$Z=\frac{e^{-\frac{\theta_E}{2T}}}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}}$$

5

نحسب الطاقة الوسطى للفونون (من أجل درجة حرية واحدة) من العلاقة $\bar{\varepsilon}=KT^2\left(\dfrac{\partial LnZ}{\partial T}\right)_V$ لذا نوجد LnZ

$$LnZ=-\frac{\theta_E}{2T}-Ln[1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}]$$

$$\frac{\partial LnZ}{\partial T}=-(\frac{0-2\theta_E}{4T^2})-\frac{[0-(-\frac{0-\theta_E}{T^2})e^{-\frac{\theta_E}{T}}]}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}}=\frac{\theta_E}{2T^2}+\frac{\theta_E\,e^{-\frac{\theta_E}{T}}}{T^2(1-e^{-\frac{\theta_E}{T}})}$$

بالتعويض في عبارة الطاقة الوسطى للفونون

$$\bar{\varepsilon}=\frac{K\theta_E}{2}+\frac{K\theta_E\,e^{-\frac{\theta_E}{T}}}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}}\Rightarrow\qquad\bar{\varepsilon}=K\theta_E(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\frac{\theta_E}{T}}-1})\qquad(1)$$

5

نحسب الطاقة الداخلية لمول واحد من الفونونات N_A وبثلاث درجات حرية لكل فونون (مع اعتبار $R=N_AK$) نجد

$$U=3N_A\bar{\varepsilon}=3N_AK\theta_E(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\frac{\theta_E}{T}}-1})\Rightarrow\qquad U=3R\theta_E(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\frac{\theta_E}{T}}-1})\qquad(2)$$

نحسب السعة الحرارية من العلاقة

$$C_V=(\frac{\partial U}{\partial T})_V=3R\theta_E\,[0+\frac{0-(\frac{0-\theta_E}{T^2}e^{\frac{\theta_E}{T}})}{(e^{\frac{\theta_E}{T}}-1)^2}]\Rightarrow\qquad\boxed{C_V=3R(\frac{\theta_E}{T})^2\frac{e^{\frac{\theta_E}{T}}}{(e^{\frac{\theta_E}{T}}-1)^2}}\qquad(3)$$

5

<u>المناقشة:</u>

أولاً: عند درجات الحرارة العالية (أكبر بكثير من درجة آينشتين) $T>>\theta_E$ ننشر التابع الأسي في البسط والمقام

$$C_V\approx3R(\frac{\theta_E}{T})^2\frac{(1+\frac{\theta_E}{T}+...)}{(1+\frac{\theta_E}{T}+....-1)^2}=3R(1+\underbrace{\frac{\theta_E}{T}}_{\to0}+...)\Rightarrow\qquad\boxed{C_V\approx3R}$$

5

ثانياً: عند درجات الحرارة المنخفضة $\theta_E>>T$ يُهمل الواحد في المقام ونحصل على القيمة

$$C_V\approx3R(\frac{\theta_E}{T})^2\,e^{-\frac{\theta_E}{T}}\Rightarrow\lim_{T\to0\,k^o}C_V=3R\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}}_{=0}\Rightarrow\qquad\boxed{\lim_{T\to0\,k^o}C_V=0}$$

أجوبة بنود السؤال الثاني: (45 درجة)

ج-1: 20

1- عدد حالات التوزع الماكروي:

$$N_o = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!} = \frac{(N+3-1)!}{N!\,(3-1)!} = \frac{(N+2)!}{2N!} = \frac{(N+2)(N+1)N!}{2N!} = \frac{(N+2)(N+1)}{2}$$ 3

2- طاقة الحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{0}}\,,\,\overset{\varepsilon_2}{\overbrace{1}}\,,\,\overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N-1}})$ نجدها من العلاقة

$$U_{(0,1,N-1)} = \sum_i N_i\,\varepsilon_i = 0\times 0 + 1\times KT + (N-1)\times 2KT = (2N-1)\,KT$$ 1

الأوزان الإحصائية:

A - الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(0,1,N-1)} = N!\left(\frac{N^0}{0!}\,\frac{N^1}{1!}\,\frac{N^{N-1}}{(N-1)!}\right) = N^2\,N^{N-1} = N^{N+1}$$ 3

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(0,1,N-1)} = \frac{(0+N-1)!}{0!\,(N-1)!}\,\frac{(1+N-1)!}{1!\,(N-1)!}\,\frac{(N-1+N-1)!}{(N-1)!\,(N-1)!} = N\frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}$$ 3

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{0}}\,,\,\overset{\varepsilon_2}{\overbrace{1}}\,,\,\overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N-1}})$ تحقق الشرط $g_i \ge N_i$ فهي مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!} \Rightarrow W_{(0,1,N-1)} = \frac{N!}{0!\,(N-0)!}\,\frac{N!}{1!\,(N-1)!}\,\frac{N!}{(N-1)!\,(N-N+1)!} = 1\times N\times N = N^2$$ 3

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية، نوجد تحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i\,e^{\beta\varepsilon_i} = \sum_i g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT} = N e^{-0} + N e^{-1} + N e^{-2} = N(1+e^{-1}+e^{-2})$$ 2

نوجد رقم انشغال السويات في الحالة الأكثر احتمال من مكسويل

$$N_i = g_i\,e^{\alpha+\beta\varepsilon_i} = e^{\alpha} g_i\,e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}} = \frac{N}{Z} g_i\,e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}$$

فيكون: $N_1 = \frac{N}{N(1+e^{-1}+e^{-2})}N e^{-0} = \frac{N^2}{Z}$ و $N_2 = \frac{N}{N(1+e^{-1}+e^{-2})}N e^{-1} = \frac{N^2}{Z}e^{-1}$

و $N_3 = \frac{N}{N(1+e^{-1}+e^{-2})}N e^{-2} = \frac{N^2}{Z}e^{-2}$. 3

ويمكن التحقق من ذلك بالجمع

$$N_1+N_2+N_3 = \frac{N^2}{Z} + \frac{N^2}{Z}e^{-1} + \frac{N^2}{Z}e^{-2} = \frac{N^2}{Z}(1+e^{-1}+e^{-2}) = \frac{N}{Z}N(1+e^{-1}+e^{-2}) = \frac{N}{Z}Z = N$$ 1

لإيجاد نوع التوزع الحاصل (في الحالة الأكثر احتمال) نوجد نسب أرقام الانشغال

$\frac{N_1}{N_2} = e > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$ و $\frac{N_2}{N_3} = \frac{e^{-1}}{e^{-2}} = e > 1 \Rightarrow N_2 > N_3$ و $\frac{N_1}{N_3} = e^2 > 1 \Rightarrow N_1 > N_3$ 1

نستنتج أن: $N_1 > N_2 > N_3$ وبالتالي فالتوزع طبيعي.

ج2- تعطى طاقة الحركة الدورانية للجزيء ثنائي الذرة بالعلاقة:

10

$$\varepsilon_r = \frac{L_Z^2}{2I}$$

حيث $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \mu r_d^2$ عزم عطالة الجزيء حول محور الدوران oz

نكتب العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري

حيث نأخذه بدلالة الزاوية ϕ المقدرة بالراديان وعزم كمية الحركة L المقدر بـ JS

$$d\,g(\varepsilon) = C\,d\Gamma(\varepsilon) = \underbrace{C}_{1/h}\ \underbrace{dq_\phi}_{2\pi = \int_0^{2\pi} d\phi}\ dL_Z = \frac{2\pi}{h}\, dL_Z$$

5

نكتب تابع التحاص، ونعوض عن درجة التحلل بقيمتها، ونستخدم تكامل بواسون.

$$Z_{Cl} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta\varepsilon_r}\, d\,g(\varepsilon) = \frac{2\pi}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{L_Z^2}{2IKT}}\, dL_Z = \frac{1}{\hbar}\cdot 2\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{L_Z^2}{2IKT}}\, dL_Z}_{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi IKT}} = \sqrt{\frac{2\pi IK}{\hbar^2}T} = \sqrt{\frac{T}{\theta_r}}$$

5

حيث $\theta_r = \hbar^2/2\pi IK$ درجة الحرارة المميزة للحركة الدورانية.

15

ج3-

حساب الحرارة النوعية (السعة الحرارية):

- من أجل $\boxed{T > T_B}$: تتوافق السعة الحرارية للبوزونات مع السعة الحرارية للغاز الكلاسيكي

$$\boxed{C_{V\max} = \left(\frac{\partial U_{\max}}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}NK = C_{V\,Clas}}$$

5

نلاحظ هنا أنه عند الطاقات العالية تكون $C_{V\max}$ غير تابعة لدرجة الحرارة T.

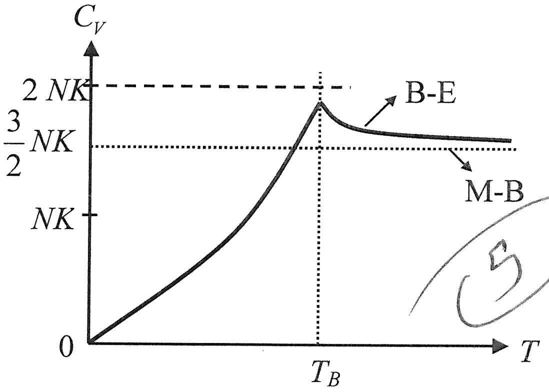
- من أجل $\boxed{T \le T_B}$:

$$C_{V\min} = \left(\frac{\partial U_{\min}}{\partial T}\right)_V \approx \frac{5}{2}\,0{,}77\,NKT_B^{-3/2}\,T^{3/2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{C_{V\min} = 1{,}92\,NK\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}}$$

5

نلاحظ هنا أنه عند الطاقات المنخفضة تكون $C_{V\min}$ تابعة لتغيرات درجة الحرارة T.

يوضح الشكل تمثيل $C_{V\min}$ (السعة الحرارية لغاز البوزون عند الطاقات المختلفة)



- عند الطاقات المنخفضة: أي في المجال الواقع بجوار T_B

نلاحظ أن $C_V = 0$ عندما $T = 0k^o$، وتزداد بازدياد T بشكل يتناسب طرداً مع $T^{3/2}$ إلى أن تصل لقيمتها القصوى $C_V = 1{,}92\,NK$ عندما $T = T_B$.

5

- وعند الطاقات العالية: أي عندما $T > T_B$ تنخفض قيمة C_V بازدياد T لتأخذ قيمة ثابتة $C_V = \frac{3}{2}NK$، كما هو الحال في الغاز الكلاسيكي الخاضع لتوزع M-B .

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب: سارة خليل
الدرجة العظمى: ثمانون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2017 - 2018

<u>س١ - أجب عن ثلاثة فقط من البنود الأربعة التالية</u>: (60 درجة).

<u>١-</u> استنتج عبارة **<u>رقم الانشغال</u>** $N_{\underset{\max}{i(M-B)}}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

<u>٢-</u> **<u>مسألة</u>:** جملة مكونة من N جسيم $(N >> 1)$ موزعة على سويتين للطاقة $(J)\ \ \varepsilon_1 = KT$ و $(J)\ \ \varepsilon_2 = 2KT$، السويتان متحللتين بالشكل $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$. والمطلوب:

١- أوجد عدد حالات التوزع الماكروية (العدد فقط بدلالة N).

٢- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2})$ في الحالات التالية

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

٣- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة z والطاقم Z_Ω. ثم استنتج من ذلك (حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة، والحالة الأكثر احتمال، ومثلها.

<u>٣-</u> برهن أن لغارتم الوزن الإحصائي لكلٍ من توزعات مكسويل وبوزه وفيرمي يأخذ شكلاً واحداً في حالة الغاز المثالي شبه الكلاسيكي. ثم استنتج ما يلي:

- صيغة عبارة الوزن الإحصائي للغاز شبه الكلاسيكي في الحالة الأكثر احتمالاً.
- شكل الصيغة السابقة بدلالة تابع تحاص جملة الغاز شبه الكلاسيكي.

<u>٤-</u> إذا علمت أن الطاقة الداخلية لغاز البوزون عند درجات حرارة تفوق درجة التكاثف $T > T_B$ هي ذاتها الطاقة الداخلية لغاز مكسويل الكلاسيكي $U_{\max} = \frac{3}{2}NKT = U_{Clas}$.

وعند الدرجات الأقل $T \le T_B$ تأخذ الصيغة $U_{\min} \approx 0{,}77\, NKT\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}$. والمطلوب: أوجد السعات الحرارية $C_{V\max}$ و $C_{V\min}$ لمجالي الحرارة، وارسم الخط البياني لتحولات C_V بدلالة T مع الشرح.

- برهن أن الأنتروبية تعطى وفق الصيغة $S = \int_0^T C_V \frac{dT}{T}$، ثم أوجد قيمتها عند الطاقات العالية والمنخفضة.

<u>س٢ - أجب عن السؤال التالي</u>: (20 درجة).

تُعبر الصيغة $dN(\vartheta) = \frac{N}{Z} e^{\beta\varepsilon} g(\vartheta)\, d\vartheta$ عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$، وفقاً لتوزع (M-B). والمطلوب:

- أوجد تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$. علماً أن قيمة تابع التحاص $Z = CV\,(2\pi\, m\, KT)^{3/2}$.
- مثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة مع مناقشة النتائج والتفسير.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الخميس 1 / 2 / 2018

مدرس المقرر د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء

الفصل الأول للعام الدراسي 2017 – 2018 (ثمانون درجة)

ج١: 60 درجة

١- نبطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B}=N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$ (إجباري) 20

نوجد بداية $Ln(W_{M-B})$، ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{M-B})$، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B})+\alpha\, dN+\beta\, dU=0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{M-B})=Ln\,N!+\sum_i\left[N_i\,Ln\,g_i-Ln\,N_i!\right]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $Ln\,x!\approx x\,Ln\,x-x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B})\approx N\,Ln\,N-N+\sum_i(N_i\,Ln\,g_i-N_i\,Ln\,N_i+N_i)$$ 5

بما أن W_{M-B} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B})=\frac{\partial Ln(W_{M-B})}{\partial N_i}dN_i\approx\frac{\partial}{\partial N_i}\left[N\,Ln\,N-N+\sum_i(N_i\,Ln\,g_i-N_i\,Ln\,N_i+N_i)\right]dN_i \qquad (*)$$

$$\approx 0-0+\sum_i(Ln\,g_i-Ln\,N_i-1+1)\,dN_i=\sum_i Ln\frac{g_i}{N_i}dN_i$$ 5

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U=\sum_i\varepsilon_i N_i \Rightarrow dU=\sum_i\varepsilon_i\, dN_i \quad \text{و} \quad N=\sum_i N_i \Rightarrow dN=\sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln\frac{g_i}{N_i}dN_i+\alpha\sum_i dN_i+\beta\sum_i\varepsilon_i\, dN_i=0$$ 5

وبالإصلاح:

$$\sum_i\left(Ln\frac{g_i}{N_i}+\alpha+\beta\,\varepsilon_i\right)dN_i=0 \Rightarrow Ln\frac{g_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\,\varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\boxed{N_{i(M-B)}=g_i\,e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}} \Leftrightarrow \boxed{N_{i(M-B)}=e^{\alpha}\,g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}}$$ 5

٢- المسألة: (إجباري) 20

١- عدد حالات التوزع الماكروي: 3

$$N_o=\frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!}=\frac{(N+2-1)!}{N!(2-1)!}=\frac{(N+1)!}{N!1!}=\frac{(N+1)N!}{N!1!}=N+1$$

٢- A - الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(N-1,1)}==N!\left(\frac{1^{N-1}}{(N-1)!}\frac{2^1}{1!}\right)=2N$$ 3

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{M}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\Rightarrow W_{(N-1,1)}=\frac{(N-1+1-1)!}{(N-1)!\,(1-1)!}\,\frac{(1+2-1)!}{1!\,(2-1)!}=2$$ 3

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(N-1,1)$ لا تحقق الشرط $g_i\geq N_i$ فهي غير مقبولة 1

٣- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية و $N=2$. نوجد تحاص الجملة z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z=\sum_i g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}=\sum_i g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT}=1e^{-1}+2e^{-2}$$ 2

تحاص الطاقم

$$Z_\Omega = Z^N = (1e^{-1} + 2e^{-2})^2 = 1e^{-2} + 4e^{-4} + 4e^{-3} \qquad (*)$$ 2

لاستنتاج الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة

نلاحظ وجود 3 حالات ماكروية بطاقات موافقة $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$ كما يلي $(\overbrace{1,1}^{U=3KT})\ (\overbrace{0,2}^{U=4KT})\ (\overbrace{2,0}^{U=2KT})$.

نوجد تحاص الطاقم بطريقة ثانية من العبارة.

$$Z_\Omega = \sum_i W_i e^{\beta U_i} = W_{(2,0)}\, e^{\beta U_{(2,0)}} + W_{(0,2)}\, e^{\beta U_{(0,2)}} + W_{(1,1)}\, e^{\beta U_{(1,1)}}$$

نعوض عن طاقة كل من الحالات الماكروية بقيمتها، واعتبار أن $\beta = -1/KT$، نجد:

$$Z_\Omega = \sum_i W_i e^{\beta U_i} = W_{(2,0)}\, e^{-2} + W_{(0,2)}\, e^{-4} + W_{(1,1)}\, e^{-3}$$ 2

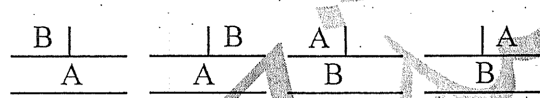
نطابق العبارة الحاصلة مع (*) فنجد قيم الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة.

$W_{(1,1)} = 4$ و $W_{(0,2)} = 4$ و $W_{(2,0)} = 1$ 2

توجد حالتان لهما الوزن الإحصائي نفسه $W_{(0,2)} = 4$ و $W_{(1,1)} = 4$

فتكون الحالة الأكثر احتمال هي الحالة الماكروية $(1,1)$ لأن طاقتها هي الأقل $U_{(1,1)} = 3KT$.

- تمثيل الحالة الماكروية الأكثر احتمال $(1,1)$



2

٣: 20

بما أن جسيمات الغاز المثالي شبه الكلاسيكي هي بوزونات أو فيرميونات (فهي غير متمايزة). فإننا نطبق الشروط التالية عند التعامل مع هذه الجسيمات:

الشرط: $(N! \approx 1)$ لإلغاء حالات التوزع المتشابه عند (M-B) من جانب.

الشرط: $(g_i >> N_i >> 1)$ لتحقيق شرط توزع الفيرميونات باعتبارها جسيمات كمية من جانب ثاني.

الشرط المتمثل بتقريب ستيرلنغ: $(Ln x! \approx x Ln x - x)$ باعتبارها جسيمات كلاسيكية من جانب آخر.

A- التقريب المطبق على توزع $(M-B)$:

$$W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \approx \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$$

$$Ln W_{M-B} \approx \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Ln W_{M-B} = \sum_i (N_i Ln \frac{g_i}{N_i} + N_i)}$$

B- التقريب المطبق على توزع $(B-E)$:

$$W_{B-E} = \prod_i \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \approx \prod_i \frac{(N_i + g_i)!}{N_i!\, g_i!}$$

$$Ln W_{B-E} \approx \sum_i [(Ln(N_i + g_i)! - Ln N_i! - Ln g_i!)]$$

$$\approx \sum_i [(N_i + g_i) Ln(N_i + g_i) - (N_i + g_i) - N_i Ln N_i + N_i - g_i Ln g_i + g_i)]$$

$$\approx \sum_i (N_i Ln \frac{N_i + g_i}{N_i} + g_i Ln \frac{N_i + g_i}{g_i})$$

نستخدم التقريبين الرياضيين التاليين:

$$\frac{g_i}{N_i} >> 1 \Rightarrow Ln(\frac{g_i \pm N_i}{N_i}) = Ln(\frac{g_i}{N_i} \pm 1) \approx +Ln\frac{g_i}{N_i}$$
$$\frac{N_i}{g_i} << 1 \Rightarrow Ln(\frac{g_i \pm N_i}{g_i}) = Ln(1 \pm \frac{N_i}{g_i}) \approx \pm\frac{N_i}{g_i} \quad (*)$$

2

$$LnW_{B-E} \approx \sum_i (N_i\, Ln\frac{g_i}{N_i} + g_i\frac{N_i}{g_i}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{LnW_{B-E} = \sum_i (N_i\, Ln\frac{g_i}{N_i} + N_i)}$$

2

C- التقريب المطبق على توزع $(F-D)$:

$$W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{N_i!(g_i - N_i)!}$$
$$LnW_{F-D} = \sum_i [Ln\, g_i! - Ln\, N_i! - Ln\,(g_i - N_i)!]$$
$$LnW_{F-D} \approx \sum_i [g_i Ln\, g_i - g_i - N_i Ln\, N_i + N_i - (g_i - N_i) Ln\,(g_i - N_i) + (g_i - N_i)]$$
$$LnW_{F-D} \approx \sum_i [N_i Ln\frac{g_i - N_i}{N_i} + g_i Ln\frac{g_i}{g_i - N_i}] = \sum_i [N_i Ln\frac{g_i - N_i}{N_i} - g_i Ln\frac{g_i - N_i}{g_i}]$$

نستخدم التقريبين الرياضيين الواردين في (*):

$$LnW_{F-D} \approx \sum_i [N_i Ln\frac{g_i}{N_i} - g_i(-\frac{N_i}{g_i})] \quad \Rightarrow \boxed{LnW_{F-D} \approx \sum_i [N_i Ln\frac{g_i}{N_i} + N_i]}$$

2

- لإيجاد صيغة عبارة الوزن الإحصائي للغاز شبه الكلاسيكي في الحالة الأكثر احتمالاً، نوجد قيمة المقدار $Ln\frac{g_i}{N_i}$ باعتبار أن $\frac{g_i}{N_i} >> 1$ من عبارة رقم الانشغال العائد للتوزعات $(M-B)$ و $(B-E)$ و $(F-D)$ كما يلي:

$$(N_i)_{\max}^{M-B} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}} \quad \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$
$$(N_i)_{\max}^{B-E} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} - 1} \quad \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} - 1 \approx e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} \quad ; \frac{g_i}{N_i} >> 1$$
$$(N_i)_{\max}^{F-D} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} + 1} \quad \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} + 1 \approx e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} \quad ; \frac{g_i}{N_i} >> 1$$

مما سبق نستنتج أن أرقام الانشغال (في الحالة الأكثر احتمال) العائدة لكافة التوزعات تكون متساوية، ومساوية لرقم انشغال $(M-B)$. وبأخذ اللغارتم نجد:

$$\frac{g_i}{N_i} \approx e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} = e^{\frac{\varepsilon_i}{kT} - \alpha} \quad \Rightarrow \quad Ln\frac{g_i}{N_i} \approx \frac{\varepsilon_i}{kT} - \alpha$$

بالتعويض في الصيغة المشتركة للغارتم الوزن الإحصائي للغاز المثالي شبه الكلاسيكي في الحالة الأكثر احتمال نجد:

$$LnW_{\max} \approx \sum_i [N_i(\frac{\varepsilon_i}{kT} - \alpha) + N_i] \approx \frac{1}{kT}\sum_i N_i\varepsilon_i - \alpha\sum_i N_i + \sum_i N_i = \frac{U}{kT} - \alpha N + N$$
$$\boxed{LnW_{\max} \approx \frac{U}{kT} - \alpha N + N}$$

5

- لإيجاد الصيغة السابقة لعبارة الوزن الإحصائي للغاز شبه الكلاسيكي في الحالة الأكثر احتمالاً، بدلالة تابع تجاص مكسويل الكلاسيكي Z . نلاحظ من تعريف Z :

$$Z = \frac{N}{A} \quad ; A = e^{\alpha} \quad \Rightarrow \alpha = Ln\, A$$

$$LnW_{\max} \approx \frac{U}{kT} - N\, Ln\, A + N = \frac{U}{kT} - N\, Ln\frac{N}{Z} + N = \frac{U}{kT} + N\, Ln\, Z - (N\, Ln\, N - N)$$
$$LnW_{\max} \approx \frac{U}{kT} + Ln\, Z^N - Ln\, N! = \frac{U}{kT} + Ln\frac{Z^N}{N!}$$

$$LnW_{\max} \approx \frac{U}{kT} + Ln Z_S \qquad ; Z_S = \frac{Z^N}{N!}$$

يمثل Z_S تابع تحاص الغاز شبه المثالي

٤:

حساب الحرارة النوعية (السعة الحرارية):

- من أجل $\boxed{T > T_B}$: تتوافق السعة الحرارية للبوزونات مع السعة الحرارية للغاز الكلاسيكي

$$\boxed{C_{V\max} = \left(\frac{\partial U_{\max}}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}NK = C_{V\,Clas}}$$

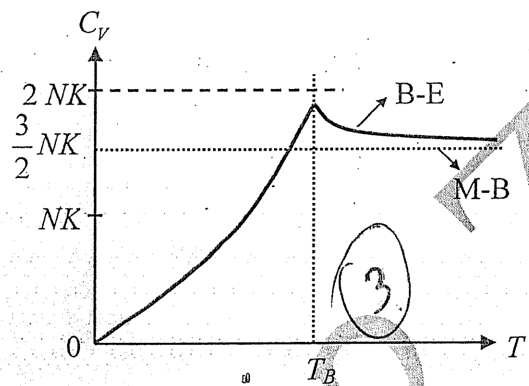
نلاحظ هنا أنه عند الطاقات العالية تكون $C_{V\max}$ غير تابعة لدرجة الحرارة T.

- من أجل $\boxed{T \le T_B}$:

$$C_{V\min} = \left(\frac{\partial U_{\min}}{\partial T}\right)_V \approx \frac{5}{2}\,0{,}77\,NKT_B^{-3/2}T^{3/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_{V\min} = 1{,}92\,NK\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}}$$

نلاحظ هنا أنه عند الطاقات المنخفضة تكون $C_{V\min}$ تابعة لتغيرات درجة الحرارة T .

يوضح الشكل تمثيل $C_{V\min}$ (السعة الحرارية لغاز البوزون عند الطاقات المختلفة)



- عند الطاقات المنخفضة: أي في المجال الواقع بجوار T_B

نلاحظ أن $C_V = 0$ عندما $T = 0k^o$، وتزداد بازدياد T بشكل يتناسب طرداً مع $T^{3/2}$ إلى أن تصل لقيمتها القصوى $C_V = 1{,}92\,NK$ عندما $T = T_B$.

- وعند الطاقات العالية: أي عندما $T > T_B$ تنخفض قيمة C_V بازدياد T لتأخذ قيمة ثابتة $C_V = \frac{3}{2}NK$، كما هو الحال في الغاز الكلاسيكي الخاضع لتوزع M-B .

- برهان صيغة الانتروبية:

من المبدأ الأول في الترموديناميك يكون $\delta Q = dU$ ونحسب الأنتروبية من عبارة كلاوزيوس كما يلي:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} = C_V\frac{dT}{T} \qquad ; dU = C_V dT$$

وبالمكاملة نحصل على صيغة الأنتروبية $S = \int_0^T C_V \frac{dT}{T}$

حساب الانتروبية:

- عند الطاقات العليا: $S_{\max} = \int_0^T C_{V\max}\frac{dT}{T} = \frac{3}{2}NK\,LnT$

- عند الطاقات المنخفضة: $S_{\min} = \int_0^T C_{V\min}\frac{dT}{T}$

$$S_{\min} = \int_0^T 1{,}92\,NK\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}\frac{dT}{T} = 1{,}92\,NKT_B^{-3/2}\int_0^T T^{1/2}dT = 1{,}92\,NKT_B^{-3/2}\,\frac{2}{3}T^{3/2} = 1{,}28\,NK\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}$$

ج ٢: 20 درجة

لدينا صيغة $dN(\vartheta)$ المعطاة والمعبرة عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$ بالشكل التالي :

$$dN(\vartheta) = \frac{N}{Z} e^{\beta\varepsilon} g(\vartheta)\, d\vartheta \qquad (*)$$

لدينا من تعريف تابع التحاص

$$Z = CV(2\pi mkT)^{3/2} \qquad (a)$$

نوجد عبارة تحلل السويات بدلالة عنصر الفراغ الطوري الذي يرتبط اندفاعه بالسرعة المطلقة بالشكل التالي:

$$p = m\vartheta \Rightarrow dp = m\,d\vartheta$$

$$g(\vartheta)\, d\vartheta = C\, d\Gamma(\vartheta) = C\, dq_V dp_V = CV\, 4\pi\, p^2 dp = CV\, 4\pi\, m^3 \vartheta^2 d\vartheta \qquad (b)$$

4

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم هي طاقة حركية فقط

$$\varepsilon = m\vartheta^2/2 \qquad (c)$$

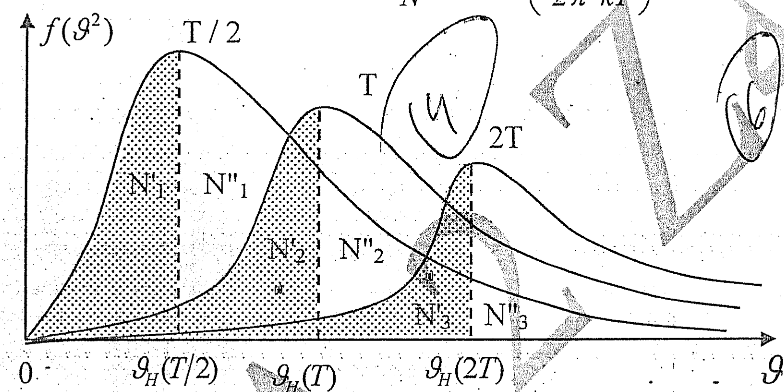
بتعويض العبارات (a) و(b) و(c) في (*)،

مع الأخذ بعين الاعتبار قيمة مضروب لاغرانج $\beta = -1/kT$ نجد:

$$dN(\vartheta) = \frac{N}{CV(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-m\vartheta^2/2kT}\, CV\, 4\pi\, m^3 \vartheta^2 d\vartheta$$

بالاختزال والقسمة على N نحصل على تابع توزع السرعة المطلقة لجسيم واحد ، بالشكل التالي :

$$dF(\vartheta) = \frac{dN(\vartheta)}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi\, kT}\right)^{3/2} \vartheta^2\, e^{-m\vartheta^2/2kT}\, d\vartheta = f(\vartheta^2)\, d\vartheta$$



و بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$

6

$$\boxed{dF(\vartheta) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\, d\vartheta = f(\vartheta^2)\, d\vartheta}$$

4

- نمثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة كما هو موضح في الشكل التالي :

المناقشة والتفسير :

تحقيقاً لمبدأ انحفاظ عدد الجسيمات

N = cte عند كل درجة حرارة .

فإننا نمثل المساحة المحصورة تحت المنحني البياني بـ N ، حيث "N = N' + N

3

حيث 'N عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أقل من السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H

و "N عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أكبر من ϑ_H .

حيث ϑ_H السرعة الموافقة لقمة المنحني (حيث تكون قيمة تابع الكثافة أعظمية) ، (السرعة الأكثر احتمالاً).

النتائج :

١- تنزاح النهايات العظمى للمنحنيات بارتفاع درجات الحرارة نحو تزايد قيمة السرعة المطلقة للجسيمات

٢- بارتفاع درجات الحرارة يزداد "N على حساب تناقص 'N بحيث يبقى N ثابت ("N = N' + N) .

٣- بارتفاع درجات الحرارة تنخفض قيمة تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ ، مما يشير لانخفاض عدد الجسيمات التي تقع سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$.

3

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ثمانون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة الإضافية (الصيفية) للعام الدراسي 2016 - 2017

س1- أجب عن النقطتين التاليتين (40 درجة)

- استنتج عبارة **رقم الانشغال** $N_{\max}^{(F-D)}$ لتوزع فيرمي - ديراك، في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج).
- **مسألة**: جملة مكونة من N جسيم $(N >> 1)$ موزعة على سويتين للطاقة:
  $\varepsilon_1 = KT\ (J)$ و $\varepsilon_2 = 2KT\ (J)$، السويتان متحللتين بالشكل $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$. والمطلوب:
  1- أوجد عدد حالات التوزع الماكروية (العدد فقط بدلالة N).
  2- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2})$ في الحالات التالية
  A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.
  3- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة z والطاقم Z_{Ω}. ثم استنتج من ذلك (حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة، والحالة الأكثر احتمال، ومثلها.

س2- أجب عن البندين التاليين (40 درجة)

1- تُعبر الصيغة $dN(\vartheta) = \frac{N}{Z} e^{\beta\varepsilon} g(\vartheta)\, d\vartheta$ عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$، وفقاً لتوزع (M-B). والمطلوب:

- أوجد تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$. علماً أن قيمة تابع التحاص $Z = CV\,(2\pi\, m KT)^{3/2}$.
- مثّل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة مع مناقشة النتائج والتفسير.

2- جملة مكونة من N جسيم كلاسيكي موزعة على عدد محدود من سويات الطاقة غير المتحللة $(g_i = 1)$، وطاقاتها تتبع العلاقة: $\varepsilon_i = i\,\varepsilon_o \quad ; \; i = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$. والمطلوب: 1- احسب تحاص الجملة Z بدلالة β.
2- احسب متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$. 3- احسب قيمة $\bar{\varepsilon}$ إذا علمت أن: $\varepsilon_o << KT$، ماذا تستنتج ؟.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس في 2017 / 8 / 28

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة الإضافية (الصيفية) للعام الدراسي 2016 – 2017
الدرجة العظمى : ثمانون درجة (توزيع الدرجات: 40 درجة للسؤال الأول و 40 للثاني)

ج 1 (40 درجة) 20

- استنتاج **رقم الانشغال** لتوزع $N_{(F-D)\,max}$

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (F-D). المعطاة بالعلاقة: $W_{F-D}=\prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}$

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التجلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i. أي $\boxed{g_i >> N_i}$.
نوجد بدايةً $Ln(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d\,Ln(W_{F-D})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{F-D})\approx Ln\prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}=\sum_i\left[Ln\,g_i!-Ln\,N_i!-Ln(g_i-N_i)!\right]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنغ $Ln\,x!\approx x\,Ln\,x$ نجد:

$$Ln(W_{F-D})\approx\sum_i\left[g_iLn\,g_i-N_i\,Ln\,N_i-g_iLn(g_i-N_i)+N_i\,Ln(g_i-N_i)\right]$$ 4

بما أن W_{F-D} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d\,Ln(W_{F-D})=\frac{\partial Ln(W_{F-D})}{\partial N_i}dN_i\approx\frac{\partial}{\partial N_i}\sum_i\left[g_iLn\,g_i-N_i\,Ln\,N_i-g_iLn(g_i-N_i)+N_i\,Ln(g_i-N_i)\right]dN_i$$

$$\approx\sum_i\left[-Ln\,N_i-1+\frac{g_i}{g_i-N_i}+Ln(g_i-N_i)-\frac{N_i}{g_i-N_i}\right]dN_i=\sum_i\left(Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}-1+\frac{g_i-N_i}{g_i-N_i}\right)dN_i$$

$$d\,Ln(W_{F-D})\approx\sum_i Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}dN_i$$ 4

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$N=\sum_i N_i\ \Rightarrow\ dN=\sum_i dN_i$$ و $$U=\sum_i\varepsilon_i N_i\ \Rightarrow\ dU=\sum_i\varepsilon_i dN_i$$

$$d\,Ln(W_{F-D})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0$$

$$\sum_i\left(Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}+\alpha+\beta\varepsilon_i\right)dN_i=0\ \Rightarrow\ Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\varepsilon_i)\ \Rightarrow\ \frac{g_i-N_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}+1\ \Rightarrow\ \boxed{N_{i(F-D)\,max}=\frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}+1}}$$ 6

- **المسألة:** 20

1- عدد حالات التوزع الماكروي:

$$N_o=\frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!}=\frac{(N+2-1)!}{N!(2-1)!}=\frac{(N+1)!}{N!1!}=\frac{(N+1)N!}{N!1!}=N+1$$ 2

2- A - الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(N-1,1)}==N!\left(\frac{1^{N-1}}{(N-1)!}\frac{2^1}{1!}\right)=2N$$ 2

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{M}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\quad\Rightarrow W_{(N-1,1)}=\frac{(N-1+1-1)!}{(N-1)!\,(1-1)!}\frac{(1+2-1)!}{1!\,(2-1)!}=2$$ 2

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(N-1,1)$ لا تحقق الشرط $g_i\geq N_i$ فهي غير مقبولة 2

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية و $N=2$. نوجد تحاص الجملة z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z=\sum_i g_i e^{\beta\varepsilon_i}=\sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT}=1e^{-1}+2e^{-2}$$ 2

تحاص الطاقم

$$Z_\Omega=Z^N=(1e^{-1}+2e^{-2})^2=1e^{-2}+4e^{-4}+4e^{-3} \qquad (*)$$ 2

لاستنتاج الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة

نلاحظ وجود 3 حالات ماكروية بطاقات موافقة $U=\sum_i N_i\varepsilon_i$ كما يلي $(\overbrace{1,1}^{U=3KT})$ $(\overbrace{0,2}^{U=4KT})$ $(\overbrace{2,0}^{U=2KT})$.

نوجد تحاص الطاقم بطريقة ثانية من العبارة. 2

$$Z_\Omega=\sum_i W_i e^{\beta U_i}=W_{(2,0)}e^{\beta U_{(2,0)}}+W_{(0,2)}e^{\beta U_{(0,2)}}+W_{(1,1)}e^{\beta U_{(1,1)}}$$

نعوض عن طاقة كل من الحالات الماكروية بقيمتها، واعتبار أن $\beta=-1/KT$، نجد:

$$Z_\Omega=\sum_i W_i e^{\beta U_i}=W_{(2,0)}e^{-2}+W_{(0,2)}e^{-4}+W_{(1,1)}e^{-3}$$ 2

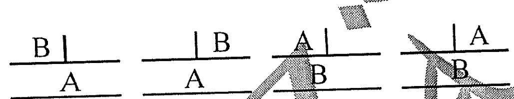
نطابق العبارة الحاصلة مع (*) فنجد قيم الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة.

$W_{(2,0)}=1$ و $W_{(0,2)}=4$ و $W_{(1,1)}=4$ 2

توجد حالتان لهما الوزن الإحصائي نفسه $W_{(0,2)}=4$ و $W_{(1,1)}=4$

فتكون الحالة الأكثر احتمال هي الحالة الماكروية $(1,1)$ لأن طاقتها هي الأقل $U_{(1,1)}=3KT$.

- تمثيل الحالة الماكروية الأكثر احتمال $(1,1)$



2

ج 2- (40 درجة) 20

1-

- لدينا صيغة $dN(\vartheta)$ المعطاة والمعبرة عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$ بالشكل التالي :

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{Z}e^{\beta\varepsilon}g(\vartheta)\,d\vartheta \qquad (*)$$

لدينا من تعريف تابع التحاص

$$Z=CV(2\pi mkT)^{3/2} \qquad (a)$$

نوجد عبارة تحلل السويات بدلالة عنصر الفراغ الطوري الذي يرتبط اندفاعه بالسرعة المطلقة بالشكل التالي:

$$p=m\vartheta \;\Rightarrow\; dp=m\,d\vartheta$$

$$g(\vartheta)\,d\vartheta=C\,d\Gamma(\vartheta)=C\,dq_V\,dp_V=CV\,4\pi\,p^2dp=CV\,4\pi\,m^3\vartheta^2d\vartheta \qquad (b)$$

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم هي طاقة حركية فقط

$$\varepsilon=m\vartheta^2/2 \qquad (c)$$

بتعويض العبارات (a) و(b) و(c) في (*)،

مع الأخذ بعين الاعتبار قيمة مضروب لاغرانج $\beta=-1/kT$ نجد:

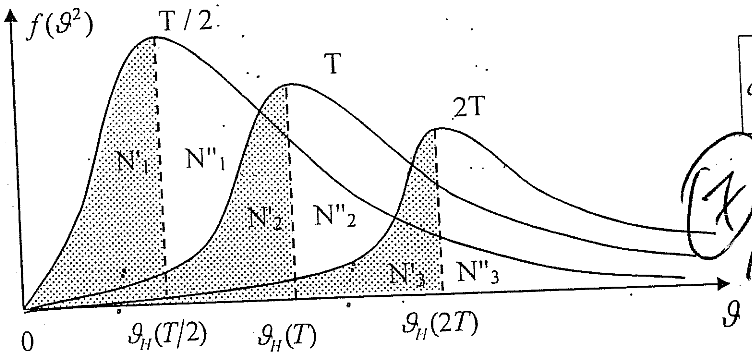
$$dN(\vartheta)=\frac{N}{CV(2\pi mkT)^{3/2}}e^{-m\vartheta^2/2kT}\,CV\,4\pi m^3\vartheta^2d\vartheta$$ 7

بالاختزال والقسمة على N نحصل على تابع توزع السرعة المطلقة لجسيم واحد ، بالشكل التالي :

$$dF(\vartheta)=\frac{dN(\vartheta)}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi\, kT}\right)^{3/2}\vartheta^2\; e^{-m\vartheta^2/2kT}\, d\vartheta=f(\vartheta^2)\,d\vartheta$$

و بدلالة الثابت $\alpha=m/2kT$

$$\boxed{dF(\vartheta)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\; e^{-\alpha\vartheta^2}\, d\vartheta=f(\vartheta^2)\,d\vartheta}$$



(7)

- نمثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة كما هو موضح في الشكل التالي :

المناقشة والتفسير :

تحقيقاً لمبدأ انحفاظ عدد الجسيمات $N = cte$ عند كل درجة حرارة .

فإننا نمثل المساحة المحصورة تحت المنحني البياني بـ N ، حيث $N = N' + N''$

حيث 'N عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أقل من السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H .

و "N عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أكبر من ϑ_H .

حيث ϑ_H السرعة الموافقة لقمة المنحني (حيث تكون قيمة تابع الكثافة أعظمية) ، (السرعة الأكثر احتمالاً).

(3)

النتائج :

1- تنزاح النهايات العظمى للمنحنيات بارتفاع درجات الحرارة نحو تزايد قيمة السرعة المطلقة للجسيمات

2- بارتفاع درجات الحرارة يزداد "N على حساب تناقص 'N بحيث يبقى N ثابت ($N = N' + N''$)

3- بارتفاع درجات الحرارة تنخفض قيمة تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ ، مما يشير لانخفاض عدد الجسيمات التي تقع سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$.

(3)

-2 (2/20)

-1
$$Z=\sum_i g_i e^{\beta\varepsilon_i}=\sum_i e^{\beta\varepsilon_i}=1+e^{\beta\varepsilon_o}+e^{2\beta\varepsilon_o}+.........$$

يمثل Z سلسلة هندسية أساسها $e^{\beta\varepsilon_o}$. وحدودها متناقصة، لأن $\beta=-1/KT$. وحدها الأول = 1

فيكون مجموعها: $Z=1\dfrac{1-(e^{\beta\varepsilon_o})^n}{1-e^{\beta\varepsilon_o}}\approx\dfrac{1}{1-e^{\beta\varepsilon_o}}$; $(e^{\beta\varepsilon_o})^n=0$

(6)

2- متوسط طاقة الجسيم: نجدها بتطبيق العلاقة: $\bar{\varepsilon}=\dfrac{\partial Ln Z}{\partial\beta}$. لذا نوجد لغارتم Z :

$$Ln Z=Ln\left(\frac{1}{1-e^{\beta\varepsilon_o}}\right)=-Ln(1-e^{\beta\varepsilon_o})$$

وبالتعويض:

$$\bar{\varepsilon}=-\frac{\partial}{\partial\beta}Ln(1-e^{\beta\varepsilon_o})=\frac{\varepsilon_o e^{\beta\varepsilon_o}}{1-e^{\beta\varepsilon_o}}=\frac{\varepsilon_o}{e^{-\beta\varepsilon_o}-1}=\frac{\varepsilon_o}{e^{\varepsilon_o/KT}-1}$$

(7)

3- عندما $\varepsilon_o << KT$. ننشر التابع الأسي بالشكل:

$$e^{\varepsilon_o/KT}=1+\frac{\varepsilon_o}{1!KT}+\frac{\varepsilon_o^{\,2}}{2!K^2T^2}+\frac{\varepsilon_o^{\,3}}{3!K^3T^3}+.....$$

نهمل الحدود ذات المراتب العليا لأنها صغيرة. ونكتفي بالحدين الأول والثاني. ونعوض في عبارة $\bar{\varepsilon}$

$$\bar{\varepsilon}\approx\frac{\varepsilon_o}{1+\dfrac{\varepsilon_o}{KT}-1}\approx KT$$

نستنتج بهذه الحالة أن الغاز الكلاسيكي يتحول إلى غاز مثالي لأن $\bar{\varepsilon}_{Clas}=\dfrac{3}{2}KT$ و $\bar{\varepsilon}_{Id}=KT$

(7)

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ثمانون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الثاني للعام الدراسي 2016 - 2017

أجب عن الأسئلة التالية: (توزيع الدرجات: 20 درجة لكل سؤال)

س1- مسألة: جملة مكونة من N جسيم $(N>>1)$ موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = KT \quad (J)$ و $\varepsilon_2 = 2KT \quad (J)$
السويتين متحللتين بالشكل $g_1 = g_2 = N$. والمطلوب:

- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{\widehat{N/2}}, \overset{\varepsilon_2}{\widehat{N/2}})$، بدلالة N، في الحالات التالية:
A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.
- بفرض $N = 6$ أوجد القيمة العددية لهذه الأوزان، أي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{3}, \overset{\varepsilon_2}{3})$ في الحالات A و B و C.
- احسب نسب أرقام انشغال السويات في حالة الجسيمات متمايزة، عند الدرجة T، ورتبها، ما نوع التوزع.
- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة Z والطاقم Z_Ω (بدلالة e). واستنتج من ذلك (حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة، ثم حدد الحالة الأكثر احتمال ومثّلها.

س2- إذا علمت أن الطاقة الداخلية لغاز البوزون عند درجات حرارة تفوق درجة التكاثف $T > T_B$ هي ذاتها الطاقة الداخلية لغاز مكسويل الكلاسيكي $U_{\max} = \frac{3}{2}NKT = U_{Class}$.

وعند الدرجات الأقل $T \le T_B$ تأخذ الصيغة $U_{\min} \approx 0,77\, NKT\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}$. والمطلوب: أوجد السعات الحرارية $C_{V\max}$ و $C_{V\min}$ لمجالي الحرارة، وارسم الخط البياني لتحولات C_V بدلالة T مع الشرح.

- برهن أن الأنتروبية تعطى وفق الصيغة $S = \int_0^T C_V \frac{dT}{T}$، ثم أوجد قيمتها عند الطاقات العالية والمنخفضة.

س3- برهن صحة ما يلي:

1- $\frac{\partial}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T}$

2- $\bar{\varepsilon} = \frac{\partial Ln\, Z}{\partial \beta} = KT^2 \left(\frac{\partial Ln\, Z}{\partial T}\right)_V$

3- $U = \left[\frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta}\right]_V$

4- $\bar{U} = \frac{\partial\, Ln\, Z_\Omega}{\partial \beta}$

5- بفرض $Z = CV\,(2\pi\, m\, KT)^{3/2}$ ، و $U = N\,\bar{\varepsilon}$، برهن أن السعة الحرارية: $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V} = \frac{3}{2}NK$.

س4- جملة مكونة من N جسيم كلاسيكي موزعة على عدد محدود من سويات الطاقة غير المتحللة $(g_i = 1)$، وطاقاتها تتبع العلاقة: $i = 0,1,2,3,.....\ ; \quad \varepsilon_i = i\,\varepsilon_o$. والمطلوب: 1- احسب تحاص الجملة Z بدلالة β.
2- احسب متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$. 3- احسب قيمة $\bar{\varepsilon}$ إذا علمت أن: $KT >> \varepsilon_o$، ماذا تستنتج ؟.

- أوجد عبارة عدد الجسيمات N بدلالة سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(o)}$.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس الخميس 22 / 6 / 2017

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية

الفصل الثاني العام الدراسي 2016 – 2017

الدرجة العظمى : ثمانون درجة (توزيع الدرجات

ج1 المسألة: 20

- إيجاد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N/2}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N/2}})$

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية):

$$W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(\frac{N}{2},\frac{N}{2})} = N!\left(\frac{N^{N/2}}{(N/2)!}\,\frac{N^{N/2}}{(N/2)!}\right) = N!\left(\frac{N^{N/2}}{(N/2)!}\right)^2 = N!\frac{N^N}{[(N/2)!]^2}$$ 2

B- الجسيمات بوزونات:

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{M}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(\frac{N}{2},\frac{N}{2})} = \frac{(\frac{N}{2}+N-1)!}{\frac{N}{2}!\,(N-1)!}\,\frac{(\frac{N}{2}+N-1)!}{\frac{N}{2}!\,(N-1)!} = \frac{[(\frac{3N}{2}-1)!]^2}{[\frac{N}{2}!\,(N-1)!]^2}$$ 2

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N/2}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N/2}})$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{M}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!} \Rightarrow W_{(\frac{N}{2},\frac{N}{2})} = \frac{N!}{\frac{N}{2}!\,(N-\frac{N}{2})!}\,\frac{N!}{\frac{N}{2}!\,(N-\frac{N}{2})!} = \frac{[N!]^2}{[(\frac{N}{2})!]^4}$$ 2

- عندما $N = 6$ نحسب القيمة العددية لهذه الأوزان، أي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{3}, \overset{\varepsilon_2}{3})$ في الحالات A و B و C.

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية):

$$W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(3,3)} = 6!\left(\frac{6^3}{3!}\,\frac{6^3}{3!}\right) = 6!\frac{6^6}{6^2} = 720\times 1296 = 933120$$

أو بالتعويض في العبارة $W_{M-B} = N!\dfrac{N^N}{[(N/2)!]^2} = 6!\dfrac{6^6}{(3!)^2} = 6!\dfrac{6^6}{6^2} = 720\times 1296 = 933120$ 2

B- الجسيمات بوزونات:

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{M}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(3,3)} = \frac{(3+6-1)!}{3!\,(6-1)!}\,\frac{(3+6-1)!}{3!\,(6-1)!} = 3136$$

أو بالتعويض في العبارة $W_{B-E} = \dfrac{[(\frac{3N}{2}-1)!]^2}{[\frac{N}{2}!\,(N-1)!]^2} = \dfrac{[8!]^2}{[3!\,5!]^2} = \dfrac{1625702400}{720} = 3136$ 2

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(\overset{\varepsilon_1}{3}, \overset{\varepsilon_2}{3})$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{M}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!} \Rightarrow W_{(3,3)} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!}\,\frac{6!}{3!\,(6-3)!} = 400$$

أو بالتعويض في العبارة $W_{F-D} = \dfrac{[N!]^2}{[(\frac{N}{2})!]^4} = \dfrac{[6!]^2}{[3!]^4} = \dfrac{518400}{1296} = 400$ 2

- نحسب نسب أرقام انشغال السويات بتطبيق العلاقة

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{e^{\alpha}\,g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}}{e^{\alpha}\,g_j\,e^{\beta\varepsilon_j}} = \frac{g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT}}{g_j\,e^{-\varepsilon_j/KT}}$$

والتوزع طبيعي $\frac{N_1}{N_2}=\frac{N e^{-1}}{N e^{-2}}=e>1 \Rightarrow N_1>N_2$ 1

- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية. نوجد تحاص الجملة z (يأتي بعد التبويبات فقط)

$$Z=\sum_i g_i e^{\beta\varepsilon_i}=\sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT}=Ne^{-1}+Ne^{-2}=2e^{-1}+2e^{-2}$$

تحاص الطاقم $N=2$.

$$Z_\Omega=Z^N=(2e^{-1}+2e^{-2})^2=4e^{-2}+4e^{-4}+8e^{-3} \qquad (*)$$ 2

لاستنتاج الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة

نلاحظ وجود 3 حالات ماكروية بطاقات موافقة $U=\sum_i N_i\varepsilon_i$ كما يلي $(\overbrace{2,0}^{U=2KT})$ $(\overbrace{0,2}^{U=4KT})$ $(\overbrace{1,1}^{U=3KT})$.

نوجد تحاص الطاقم بطريقة ثانية من العبارة.

$$Z_\Omega=\sum_i W_i e^{\beta U_i}=W_{(2,0)}e^{\beta U_{(2,0)}}+W_{(0,2)}e^{\beta U_{(0,2)}}+W_{(1,1)}e^{\beta U_{(1,1)}}$$

نعوض عن طاقة كل من الحالات الماكروية بقيمتها، واعتبار أن $\beta=-1/KT$، نجد:

$$Z_\Omega=\sum_i W_i e^{\beta U_i}=W_{(2,0)}e^{-2}+W_{(0,2)}e^{-4}+W_{(1,1)}e^{-3}$$

نطابق العبارة الحاصلة مع (*) فنجد قيم الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة.

$W_{(2,0)}=4$ و $W_{(0,2)}=4$ و $W_{(1,1)}=8$ 2

فتكون الحالة الأكثر احتمال هي الحالة الماكروية (1,1).

- تمثيل الحالة الماكروية الأكثر احتمال (1,1) 2

B |	| B	B |	| B
A |	A |	| A	| A
A |	| A	A |	| A
B |	B |	| B	| B

ج2- حساب الحرارة النوعية (السعة الحرارية): 20

- من أجل $\boxed{T>T_B}$: تتوافق السعة الحرارية للبوزونات مع السعة الحرارية للغاز الكلاسيكي

$$\boxed{C_{V\max}=\left(\frac{\partial U_{\max}}{\partial T}\right)_V=\frac{3}{2}NK=C_{V\,Clas}}$$ 3

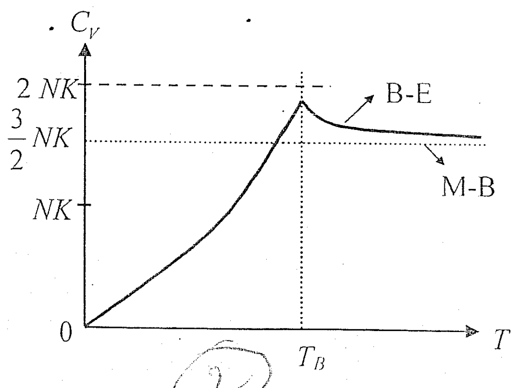
نلاحظ هنا أنه عند الطاقات العالية تكون $C_{V\max}$ غير تابعة لدرجة الحرارة T.

- من أجل $\boxed{T\le T_B}$:

$$C_{V\min}=\left(\frac{\partial U_{\min}}{\partial T}\right)_V\approx\frac{5}{2}\,0{,}77\,NKT_B^{-3/2}\,T^{3/2} \Rightarrow \boxed{C_{V\min}=1{,}92\,NK\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}}$$ 3

نلاحظ هنا أنه عند الطاقات المنخفضة تكون $C_{V\min}$ تابعة لتغيرات درجة الحرارة T.

يوضح الشكل تمثيل $C_{V\min}$ (السعة الحرارية لغاز البوزون عند الطاقات المختلفة)



2

- عند الطاقات المنخفضة: أي في المجال الواقع بجوار T_B
نلاحظ أن $C_V=0$ عندما $T=0k^o$، وتزداد بازدياد T بشكل يتناسب طرداً مع $T^{3/2}$ إلى أن تصل لقيمتها القصوى $C_V=1{,}92\,NK$ عندما $T=T_B$. 2

- وعند الطاقات العالية: أي عندما $T>T_B$ تنخفض قيمة C_V بازدياد T لتأخذ قيمة ثابتة $C_V=\frac{3}{2}NK$، كما هو الحال في الغاز الكلاسيكي الخاضع لتوزع M-B . 2

- برهان صيغة الانتروبية:

من المبدأ الأول في الترموديناميك يكون $\delta Q = dU$ ونحسب الأنتروبية من عبارة كلاوزيوس كما يلي:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} = C_V \frac{dT}{T} \quad ; dU = C_V dT$$

وبالمكاملة نحصل على صيغة الأنتروبية $S = \int_0^T C_V \frac{dT}{T}$ (3)

حساب الانتروبية:

- عند الطاقات العليا: (2) $S_{\max} = \int_0^T C_{V\max} \frac{dT}{T} = \frac{3}{2} NK\, LnT$

- عند الطاقات المنخفضة: $S_{\min} = \int_0^T C_{V\min} \frac{dT}{T}$

$$S_{\min} = \int_0^T 1{,}92\, NK\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} \frac{dT}{T} = 1{,}92\, NK\, T_B^{-3/2} \int_0^T T^{1/2} dT = 1{,}92\, NK\, T_B^{-3/2} \frac{2}{3} T^{3/2} = 1{,}28\, NK\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}$$ (3)

ج3- $\boxed{20}$

1- للبرهان على صحة العبارة $\frac{\partial}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T}$ نعلم أن قيمة مضروب لاغرانج هي $\beta = -\frac{1}{KT}$ فنجد :

$$T = -\frac{1}{K\beta} \quad \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \beta} = \frac{1}{K\beta^2} = KT^2$$

وحيث أنه يمكننا كتابة المشتقة بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{\partial T}{\partial \beta}\frac{\partial}{\partial T}$$

بالتعويض عن $\partial T/\partial \beta$ بقيمتها نجد:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial T} = \frac{1}{KT^2}\frac{\partial}{\partial \beta}}$$ (4)

2- للبرهان على صحة العبارة $\bar{\varepsilon} = \frac{\partial Ln Z}{\partial \beta}$

بما أن رقم الانشغال معطى بدلالة β بالشكل $N_i = e^{\alpha} g_i e^{\beta \varepsilon_i}$ فنجد:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{U}{N} = \frac{\sum_i \varepsilon_i N_i}{\sum_i N_i} = \frac{e^{\alpha} \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}}{e^{\alpha} \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}} = \frac{1}{Z} \underbrace{\sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}}_{*}$$

نوجد (*) من تعريف تابع التحاص $Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$ وذلك بإيجاد مشتقة Z بالنسبة لـ β كما يلي:

$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}}$$

وبالتعويض في (*) عن عبارة المجموع بقيمتها. نجد:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\partial Z/Z}{\partial \beta} \quad \Rightarrow \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\partial Ln Z}{\partial \beta} = KT^2 \left(\frac{\partial Ln Z}{\partial T}\right)_V$$ (4)

3- للبرهان على صحة العبارة $U = \left[\frac{\partial (\beta F)}{\partial \beta}\right]_V$

نبدأ من الطرف الأيمن للمساواة فنجد :

$$\left[\frac{\partial (\beta F)}{\partial \beta}\right]_V = \left[F + \beta \frac{\partial F}{\partial \beta}\right]_V = F + \beta\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_V$$

نوجد قيمة $\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_V$ بإدخال درجة الحرارة T كوسيط بالشكل التالي:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_V = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right)_V \quad ; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right)_V = -S\left(\frac{1}{K\beta^2}\right)_V \quad ; S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \text{ و } \beta = -\frac{1}{KT} \Rightarrow T = -\frac{1}{K\beta}$$

بالتعويض والاستفادة من معين الطاقات التالي نجد:

U

T	P
V	S

F

G

$$F + \beta\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_V = F - \beta S\left(\frac{1}{K\beta^2}\right)_V = F - \frac{S}{K\beta} = F + TS = U$$

4

-4 $$\overline{U} = \frac{U_\Omega}{\Omega} = \frac{\sum_i W_i U_i}{\sum_i W_i} = \lim_{\beta \to 0} \frac{\sum_i W_i U_i e^{\beta U_i}}{\sum_i W_i e^{\beta U_i}} = \frac{1}{Z_\Omega}\frac{\partial Z_\Omega}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln Z_\Omega}{\partial \beta}$$

4

لأن: $$Z_\Omega = \sum_i W_i e^{\beta U_i} \Rightarrow \frac{\partial Z_\Omega}{\partial \beta} = \sum_i W_i U_i e^{\beta U_i}$$

5- بما أن الطاقة الداخلية $U = N\bar{\varepsilon} = NKT^2\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V$

نطبق عبارة السعة الحرارية المولية C_V

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V} = 2NKT\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V + NKT^2\left(\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2}\right)_V \Rightarrow C_V = NKT\left[2\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V + T\left(\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2}\right)_V\right]$$

نوجد المشتقات من عبارة تابع التخاص $Z = CV(2\pi mKT)^{3/2}$

$$\ln Z = \ln C + \ln V + \frac{3}{2}\ln(2\pi mK) + \frac{3}{2}\ln T$$

$$\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2T} \quad \text{و} \quad \left(\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2}\right)_V = -\frac{3}{2T^2}$$

بالتعويض عن المشتقات بقيمها نجد:

$$C_V = NKT\left[2\frac{3}{2T} - T\frac{3}{2T^2}\right] = NKT\left[\frac{3}{T} - \frac{3}{2T}\right] = \frac{3}{2}NK$$

4

وهي النتيجة ذاتها التي تعطيها النظرية الحركية للغازات.

ج4- الحل: 1- $$Z = \sum g_i e^{\beta\varepsilon_i} = \sum_i e^{\beta\varepsilon_i} = 1 + e^{\beta\varepsilon_o} + e^{2\beta\varepsilon_o} + \dots\dots\dots$$

20

يمثل Z سلسلة هندسية أساسها $e^{\beta\varepsilon_o}$. وحدودها متناقصة، لأن $\beta = -1/KT$. وحدها الأول $= 1$

3

فيكون مجموعها: $(e^{\beta\varepsilon_o})^n = 0$; $$Z = 1\frac{1-(e^{\beta\varepsilon_o})^n}{1-e^{\beta\varepsilon_o}} \approx \frac{1}{1-e^{\beta\varepsilon_o}}$$

2- متوسط طاقة الجسيم: نجدها بتطبيق العلاقة: $\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$. لذا نوجد لغارتم Z:

$$\ln Z = \ln\left(\frac{1}{1-e^{\beta\varepsilon_o}}\right) = -\ln(1-e^{\beta\varepsilon_o})$$

وبالتعويض:

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial \beta}\ln(1-e^{\beta\varepsilon_o}) = \frac{\varepsilon_o e^{\beta\varepsilon_o}}{1-e^{\beta\varepsilon_o}} = \frac{\varepsilon_o}{e^{-\beta\varepsilon_o}-1} = \frac{\varepsilon_o}{e^{\varepsilon_o/KT}-1}$$

3

3- عندما $\varepsilon_o << KT$ ننشر التابع الأسي بالشكل: $$e^{\varepsilon_o/KT} = 1 + \frac{\varepsilon_o}{1!KT} + \frac{\varepsilon_o^2}{2!K^2T^2} + \frac{\varepsilon_o^3}{3!K^3T^3} + \dots$$

نهمل الحدود ذات المراتب العليا لأنها صغيرة. ونكتفي بالحدين الأول والثاني. ونعوض في عبارة $\bar{\varepsilon}$

$$\bar{\varepsilon} \approx \frac{\varepsilon_o}{1+\dfrac{\varepsilon_o}{KT}-1} \approx KT$$ 3

نستنتج بهذه الحالة أن الغاز الكلاسيكي يتحول إلى غاز مثالي لأن $\bar{\varepsilon}_{Clas} = \frac{3}{2}KT$ و $\bar{\varepsilon}_{Id} = KT$ 1

• نوجد عبارة عدد الجسيمات N بدلالة سوية فيرمي $\varepsilon_f(0)$ بمكاملة العلاقة التالية في المجال $]0,\infty[$: 10

$$dN = f(\varepsilon)\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

واعتبار قيمة تابع فيرمي

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & ; \varepsilon < \varepsilon_f^{(o)} \\ 0 & ; \varepsilon > \varepsilon_f^{(o)} \end{cases}$$

$$N = \int_0^\infty dN = \int_0^\infty f(\varepsilon)\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_f} \underbrace{f(\varepsilon)}_{1}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon + \int_{\varepsilon_f}^{\infty} \underbrace{f(\varepsilon)}_{0}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_f} g(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_f} C\,d\Gamma(\varepsilon) \qquad (*)$$ 3

نوجد درجة التحلل $g(\varepsilon)\,d\varepsilon$ بدلالة عنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma(\varepsilon)$. ونضربه بـ 2 نظراً لتمتع الفيرميون بسبين مزدوج $S = \pm\hbar/2$ ، واعتبار أن $C = 1/h^3$ (لأن الجسيمات كمية) بالشكل :

$$C\,d\Gamma(\varepsilon) = 2C\,dq_V\,dp_V = \frac{2V}{h^3}\,d\!\left(\frac{4}{3}\pi\,p^3\right) = \frac{2V}{h^3}4\pi\,p^2 dp \qquad (**)$$

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم هي طاقة حركية فقط

$$\varepsilon = m\vartheta^2/2 = p^2/2m \Rightarrow p^2 = 2m\varepsilon \quad \text{و} \quad p = \sqrt{2m\varepsilon} \Rightarrow dp = m\,d\varepsilon/\sqrt{2m\varepsilon}$$

بالتعويض في (**)

$$C\,d\Gamma(\varepsilon) = \frac{2V}{h^3}4\pi\,2m\varepsilon\frac{m\,d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$ 4

بالتعويض في (*)

$$N = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^{\varepsilon_f}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon \;\Rightarrow\; \boxed{N = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\frac{2}{3}\varepsilon_f^{3/2}}$$ 3

تشير العبارة الحاصلة إلى توزع الجسيمات بدلالة سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(o)}$ عند درجة الصفر المطلق.

مع التمنيات

بالتوفيق والنجاح

مكتبة

A to Z