كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة ٣

المحاضرة : السابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

نعتبر أن X متغير عشوائي ثنائي $X \sim (n,p)$

$X \sim poisson(\lambda)$

التوزيع الطبيعي: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\mu = E(X)$

له تابع كثافة من الشكل

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

التوزيع الطبيعي المعياري $Z \sim N(0,1)$

حيث $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

التوزيع المشترك لمتغيرين منفصلين:

X و Y متغيرين عشوائيين معرفين على تجربة ما

مثال: بفرض أن لدينا تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات

X متغير عشوائي يدل على عدد الشعارات.

Y متغير عشوائي يدل على ربح 3 نقاط إذا ظهر شعارين على الأقل

و يدل على خسارة 2 نقاط عدا ذلك.

الحل:

الجدول الاحتمالي المشترك للمتغيرين

Y \ X	0	1	2	3	توابع Y
5	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
-2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{4}{8}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

+5:
- 3 ← HHH
- 2 ← HHT, HTH, THH

-2:
- TTH, THT, HTT
- TTT → 3

وهو التابع الاحتمالي للزوج (X, Y)

$$f(x,y) \geq 0$$

$$\sum\sum f(x,y) = 1$$

- التوزيع الهامشي لـ X

X	0	1	2	3
$p(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

مثال: لدينا التابع الاحتمالي التالي المعرف بتابع كثافة

$$f(x,y) = kxy \qquad x = 1, 2, 3$$
$$y = 1, 2, 3$$

أوجد قيمة K ليكون تابع احتمالي.

$$f(x,y) \geq 0$$

$$\sum\sum f(x,y) = 1$$

$$f(1,1) + f(1,2) + f(1,3) + f(2,1) + f(2,2) + f(2,3) + f(3,1) + f(3,2) + f(3,3) = 1$$

$$K + 2K + 3K + 2K + 4K + 6K + 3K + 6K + 9K = 1$$

$$36K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{36}$$

تابع الكثافة المشترك لمتغيرين مستمرين:

نعرف تابع كثافة مشترك $f(x,y)$ $x \in R$

$y \in R$

يحقق الشرطين

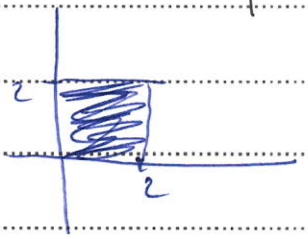
① $f(x,y) \geq 0$

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

مثال: لدينا التابع التالي تابع كثافة

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , 0 < x < 2 \\ & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

هذا تابع كثافة لأن $f(x,y) \geq 0$



$$\int_0^2\int_0^2 \frac{1}{4}\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^2 \frac{1}{4}\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{4}x\right]_0^2 dy = \int_0^2 \frac{1}{2}\,dy = \left[\frac{1}{2}x\right]_0^2 = 1$$

ويعرف تابع التوزيع المشترك

$$F(x,y) = P(X \leq x , Y \leq y)$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

تابع التوزيع للمثال السابق:

$$F(x,y) = \int_0^x\int_0^y \frac{1}{4}\, du\, du = \int_0^x \left(\int_0^y \frac{1}{4}\, du \right) du$$

$$= \int_0^x \left[\frac{1}{4} u \right]_0^y du = \int_0^x \frac{1}{4} y\, du = \left[\frac{1}{4} y u \right]_0^x = \frac{1}{4} x y$$

* استنتج احتمال $F(\frac{1}{2}, 1)$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{8}$$

ملاحظة: إذا علم تابع التوزيع الاحتمالي المشترك لمتغيرين عشوائيين يمكن معرفة تابع الكثافة بالاشتقاق بالنسبة لـ x و y

مثال:

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي لـ (X, Y) هي

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 + e^{-x-y} & x > 0 ,\ y > 0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

1) أوجد دالة الكثافة الاحتمالية لمتغيرين.

2) احسب احتمال $P(\le x < 3 , 1 \le y < 2)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & x > 0 ,\ y > 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x-y}\right)$$

$f(x,y) = e^{-x-y}$; $x>0$; $y>0$

(2)

$P(1<x<3)$, $1<y<2$

$$= \int_1^3\int_1^2 e^{-x} e^{-y}\, dx\, dy = \int_1^3\left(\int_1^2 e^{-x} e^{-y}\, dy\right) dx$$

$$= \int_1^3 \left[-e^{-x-y}\right]_1^2 dx = \int_1^3 \left(-e^{-x-y} + e^{-x-1}\right) dx$$

$$= \left[e^{-x-y} - e^{-x-1}\right]_1^2 = e^{-4} - e^{-3} - \left(e^{-3} - e^{-2}\right)$$

$$= e^{-4} - 2e^{-3} + e^{-2}$$

انتهت المحاضرة