



كلية العلوم

القسم : الكيمياء

السنة : الاولى

المادة : رياضيات عامة ٣

المحاضرة: الثامنة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960



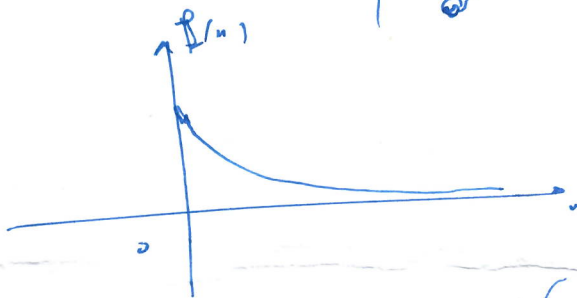
١ - بعداً لتوزيعات أسية

١ - التوزيع الأسي

هو من توزيعات الاحتمال المستمرة . وهو مقلد بالزمن .
 فنقول : الزمن المستغرق بين مكالمات
 الزبائن المستوفى بمكالمات هاتفيه .
 الزمن لصيانة جهاز ما .

* مذكور على أنه التوزيع الأسي إذا كان تابع كثافة احتمالية له

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & : x \geq 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}$$



له دالة

دالة التوزيع الاحتمال (التجميع) :

$$F(t) = P(X < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & : t > 0 \\ 0 & : t \leq 0 \end{cases}$$

التوقع الرياضي السابق :

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

مثال : إذا كان عملي صمام كهربائي بالساعات له كثافة احتمالية :

$$f(x) = \begin{cases} 0,0001 e^{-0,0001 x} & : x \geq 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases}$$

المطلوب : أوجد دالة التوزيع والتجميع لـ X .

٢ - أوجد العمر الوسطي للصمام

٣ - أوجد احتمال أنه بعد الصيانة سيظل ٨٥٥٥ ساعة .

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-0,0001t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

الكل: 1

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,0001} = 10000 \text{ h}$$

2

3

$$\begin{aligned} P(X > 8000) &= 1 - P(X < 8000) \\ &= 1 - [1 - e^{-0,0001(8000)}] \\ &= e^{-0,8} \approx 0,449 \end{aligned}$$

التوزيع الطبيعي: هو توزيع متركز معلوم لمتغير عشوائي

X

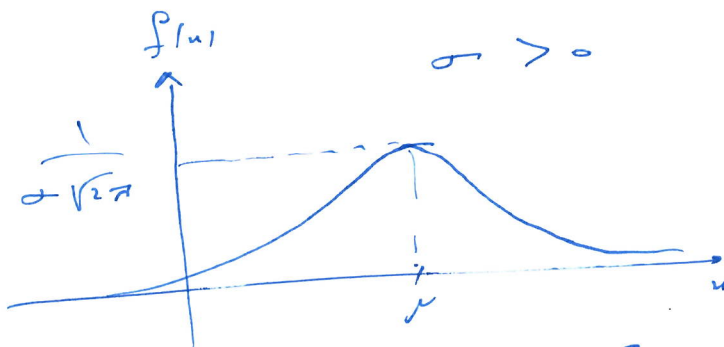
متغير عشوائي شكلياً

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$\sigma > 0$$



لا، شكلياً

X

التوقع الرياضي: $E(X) = \mu$

$$V(X) = \sigma^2$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

التوزيعات المشتركة - ٤ -

إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين منفصلين، $f(x, y)$ لوالح الاحتمالية المشتركة لهما، $g(x)$ و $h(y)$ دالتا الاحتمال الحدية.

فإن الدالت الاحتمالية المشتركة

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} \quad h(y) \neq 0$$

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0$$

دالة الكثافة المشتركة، شروط تفرق متباينة.

مثال: خذ لي مثال بسيط: أوجد التوزيع المشترك

$$f(x/y=1)$$

الـ ٢

$$f(0/1) = \frac{f(0, 1)}{h(1)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{9}} = \frac{2}{7}$$

$$f(1/1) = \frac{f(1, 1)}{h(1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{9}} = \frac{3}{7}$$

$$f(2/1) = \frac{f(2, 1)}{h(1)} = \frac{0}{\frac{7}{9}} = 0$$

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	
2	$\frac{1}{36}$		

مثال: إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين مستمرين

$$f(x, y) = \frac{2}{3}(x+2y) \quad 0 < x < 1$$

$$0 < y < 1$$

(أ) أوجد دالة الكثافة الحدية لـ X

$$g(x) = \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y) dy = \frac{2}{3} \left(xy + y^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}(x+1)$$

$$g(y) = \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y) dx = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2}{2} + 2xy \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}y = \frac{1}{3}(1+4y)$$

$$P\left(X \leq \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{2}\right)$$

ب- أوجد $f(x/y)$ ثم استنتج

$$f(x/\frac{1}{2})$$

مثال 3 : دالة الاحتمال المشتركة معطى بالجدول .

X \ Y	0	1	2	
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

أوجد 1) $P(X \leq 1, Y \leq 1)$

2) $F(-2, 1)$

3) $F(3, 7, 4, 5)$

1) $F(1, 1) = P(X \leq 1, Y \leq 1)$: الحل

$$= P(0, 0) + P(0, 1) + P(1, 0) + P(1, 1)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{8}{6}$$

2) $F(-2, 1) = P(X \leq -2, Y \leq 1) = 0$

3) $F(3, 7, 4, 5) = P(X \leq 3, Y \leq 4, 5) = 1$

مثال 4 : اذ كانت دالة التوزيع التراكمي للمتغيرين X, Y مستقرين و

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 + e^{-x-y} & : x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{علاوة} \end{cases}$$

أوجد $P(1 < X < 3, 1 < Y < 2)$

الحل : نوجد دالة الكثافة، معطاة

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = e^{-(x+y)} & : x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{علاوة} \end{cases}$$

$$P(1 < X < 3, 1 < Y < 2) = \int_1^3 \int_1^2 e^{-(x+y)} dx dy$$

$$= \int_1^3 \left[-e^{-(x+y)} \right]_1^2 dy = \int_1^3 \left(-e^{-(2+y)} + e^{-(1+y)} \right) dy$$

$$= \left[e^{-(2+y)} - e^{-(1+y)} \right]_1^3 = e^{-5} - e^{-4} - (e^{-3} - e^{-2}) = \frac{1}{e^5} - \frac{1}{e^4} - \frac{1}{e^3} + \frac{1}{e^2}$$

قوله 4: إذا كانت دالة التوزيع التراكمي المستمرة للمتغيرين X, Y :

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 + e^{-x-y} & : x > 0, y > 0 \\ 0 & : \text{علاوة} \end{cases}$$

1- أوجد دالة الكثافة $p(x, y)$ لـ $1 < x < 3, 1 < y < 2$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = e^{-x-y} & : x > 0, y > 0 \\ 0 & : \text{علاوة} \end{cases}$$

$$P(1 < x < 3, 1 < y < 2) = \int_1^3 \int_1^2 e^{-(x+y)} dy dx$$

$$= \int_1^3 \left[-e^{-x-y} \right]_1^2 dx = \int_1^3 (e^{-x-2} - e^{-x-1}) dx$$

$$= \left[e^{-x-2} - e^{-x-1} \right]_1^3 = e^{-5} - e^{-4} - (e^{-3} - e^{-2})$$

$$= e^{-5} - e^{-4} - e^{-3} + e^{-2} = 0,074$$

مثال 5: أوجد دالة الكثافة لـ X حيث $f(x) = c\sqrt{x}$ لـ $0 < x < 4$

$$1) f(x) = \begin{cases} c\sqrt{x} & : 0 < x < 4 \\ 0 & : \text{علاوة} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^4 \frac{c dx}{\sqrt{x}} = \left[c x^{-\frac{1}{2}+1} \right]_0^4 = \left[c x^{\frac{1}{2}} \right]_0^4 = 1$$

$$\left[2c\sqrt{x} \right]_0^4 = 1 \Rightarrow 4c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

تاریخ: ۱۰/۱۰/۱۴۰۱

$$f(x, y) = kxy \quad : \quad x = 1, 2, 3 \\ y = 1, 2, 3$$

دالة كثافة احتمالية:

$$\sum \sum f(x, y) = 1$$

بقي:

$$= f(1, 1) + f(1, 2) + f(1, 3) + f(2, 1) + f(2, 2) \\ + f(2, 3) + f(3, 1) + f(3, 2) + f(3, 3)$$

$$= k + 2k + 3k + 2k + 4k + 5k + 3k + 6k + 9k = 1$$

$$\Rightarrow 36k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{36}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{36} x(x+y) & : 0 < x < 1 \\ & 0 < y < 1 \\ 0 & : \text{غير ذلك} \end{cases}$$

احتمال وقوع

$$P(0 < x < \frac{1}{2}, 0 < y < \frac{1}{2})$$

$$P(0 < x < \frac{1}{2}, 0 < y < \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{5} x(x+y) dx dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2x^3}{15} + \frac{3x^2}{10} y \right]_0^{\frac{1}{2}} dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{60} + \frac{3}{40} y \right) dy$$

$$= \left[\frac{1}{60} y + \frac{3}{80} y^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{120} + \frac{3 \times 1}{4 \times 80} = \frac{1}{120} + \frac{3}{320} = \frac{1}{60} + \frac{3}{160}$$

$$= \frac{1}{60} + \frac{3}{160} = \frac{11}{480}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{3}{5} (x^2 + xy) dx dy = \int_0^1 \left[\frac{3}{5} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} y \right) \right]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{5} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} y \right) dy = \left[\frac{1}{5} y + \frac{3}{20} y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{3}{20}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{3x^2}{5} + \frac{3xy}{5} \right) dx dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{20} y \right) dy = \frac{1}{5} + \frac{3}{20}$$

تعريف: التباين المشترك لمتغيرين عشوائيين X و Y هو:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$= E(XY - XF(Y) - YE(X) + E(X)E(Y))$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

تعريف: الرتبة بين متغيرين عشوائيين X و Y هي:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$\rho(X, X) = 1, \quad \rho(X, -X) = -1$$

$$\rho(X, Y) = \rho(Y, X) \quad -1 \leq \rho \leq 1$$

مثال: اوجد التباين المشترك لمتغيرين عشوائيين X و Y :

$X \backslash Y$	-4	2	7	Σ
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
Σ	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$P(Y) \cdot P(X)$

1) $F(X)$ 2) $V(X)$ 3) $E(Y)$

4) $V(Y)$ 5) $\text{Cov}(X, Y)$ 6) $\text{Cov}(X, Y)$ 7) $\rho(X, Y)$

$$F(X) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$V(X) = F(X^2) - \mu_X^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{25}{2} - 9 = 9 - 9 = 0$$

$$\sigma_X = \sqrt{0} = 0$$

$$f_{Y=1} = \frac{1}{2} \quad f_{Y=5} = \frac{1}{2}$$

$Y \backslash X$	-4	2	7
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

$$E(Y) = \mu_Y = 1$$

$$V(Y) = 18,75$$

$$\sigma_Y = \sqrt{18,75} = 4,3$$

$$E(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j f(x_i, y_j)$$

$$= \frac{-4}{8} + \frac{2}{4} + \frac{7}{8} + \frac{-20}{4} + \frac{10}{8} + \frac{35}{8} = 1,5$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

$$\rho(X, Y) = \frac{-1,5}{\sqrt{0} \cdot 4,3} = \frac{-1,5}{0} = -1,5$$

حالت خاصه 1. $f(x) = ax$ $a > 0$ x را y قرار دهيم $y = ax$

و $f(x)$ را $g(y)$ قرار دهيم $f(x) = g(y)$ $g(y) = \frac{1}{a} f\left(\frac{y}{a}\right)$

$$g(y) = \frac{1}{a} f\left(\frac{y}{a}\right)$$

حالت خاصه 2. $f(x) = ax + b$ $a \neq 0$ x را y قرار دهيم $y = ax + b$ $a, b \in \mathbb{R}$

و $f(x)$ را $g(y)$ قرار دهيم $f(x) = g(y)$ $g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$

$$g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f(x) = |a| g(ax+b)$$

التوقع الرياضي: لمعدل عشوائي منفصل:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

لمعدل عشوائي مستمر:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

مثال: معدل مستمر: اذا كان X متحول عشوائي مستطيل $U(a,b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : x \in [a,b] \\ 0 & : x \notin [a,b] \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

طانه التوقع الرياضي

$$= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

عقود و صفا

۱۱

۱۲

۱۳

۱۴

۱۵

۱۶

۱۷

۱۸

۱۹

۲۰

۲۱

۲۲

۲۳

۲۴

۲۵

۲۶

۲۷

۲۸

۲۹

۳۰

۳۱

۳۲

۳۳

۳۴

۳۵

۳۶

۳۷

۳۸

۳۹

۴۰

۴۱

۴۲

۴۳

۴۴

۴۵

۴۶

۴۷

۴۸

۴۹

۵۰

۵۱

۵۲

۵۳

۵۴

۵۵

۵۶

۵۷

۵۸

۵۹

۶۰

۶۱

۶۲

۶۳

۶۴

۶۵

۶۶

۶۷

۶۸

۶۹

۷۰

۷۱

۷۲

۷۳

۷۴

۷۵

۷۶

۷۷

۷۸

۷۹

۸۰

۸۱

۸۲

۸۳

۸۴

۸۵

۸۶

۸۷

۸۸

۸۹

۹۰

۹۱

۹۲

۹۳

۹۴

۹۵

۹۶

۹۷

۹۸

۹۹

۱۰۰

۱۰۱

۱۰۲

۱۰۳

۱۰۴

۱۰۵

۱۰۶

۱۰۷

۱۰۸

۱۰۹

۱۱۰

۱۱۱

۱۱۲

۱۱۳

۱۱۴

۱۱۵

۱۱۶

۱۱۷

۱۱۸

۱۱۹

۱۲۰

۱۲۱

۱۲۲

۱۲۳

۱۲۴

۱۲۵

۱۲۶

۱۲۷

۱۲۸

۱۲۹

۱۳۰

۱۳۱

۱۳۲

۱۳۳

۱۳۴

۱۳۵

۱۳۶

۱۳۷

۱۳۸

۱۳۹

۱۴۰

۱۴۱

۱۴۲

۱۴۳

۱۴۴

۱۴۵

۱۴۶

۱۴۷

۱۴۸

۱۴۹

۱۵۰

۱۵۱

۱۵۲

۱۵۳

۱۵۴

۱۵۵

۱۵۶

۱۵۷

۱۵۸

۱۵۹

۱۶۰

۱۶۱

۱۶۲

۱۶۳

۱۶۴

۱۶۵

۱۶۶

۱۶۷

۱۶۸

۱۶۹

۱۷۰

۱۷۱

۱۷۲

۱۷۳

۱۷۴

۱۷۵

۱۷۶

۱۷۷

۱۷۸

۱۷۹

۱۸۰

۱۸۱

۱۸۲

۱۸۳

۱۸۴

۱۸۵

۱۸۶

۱۸۷

۱۸۸

۱۸۹

۱۹۰

۱۹۱

۱۹۲

۱۹۳

۱۹۴

۱۹۵

۱۹۶

۱۹۷

۱۹۸

۱۹۹

۲۰۰

۲۰۱

۲۰۲

۲۰۳

۲۰۴

۲۰۵

۲۰۶

۲۰۷

۲۰۸

۲۰۹

۲۱۰

۲۱۱

۲۱۲

۲۱۳

۲۱۴

۲۱۵

۲۱۶

۲۱۷

۲۱۸

۲۱۹

۲۲۰

۲۲۱

۲۲۲

۲۲۳

۲۲۴

۲۲۵

۲۲۶

۲۲۷

۲۲۸

۲۲۹

۲۳۰

۲۳۱

۲۳۲

۲۳۳

۲۳۴

۲۳۵

۲۳۶

۲۳۷

۲۳۸

۲۳۹

۲۴۰

۲۴۱

۲۴۲

۲۴۳

۲۴۴

۲۴۵

۲۴۶

۲۴۷

۲۴۸

۲۴۹

۲۵۰

۲۵۱

۲۵۲

۲۵۳

۲۵۴

۲۵۵

۲۵۶

۲۵۷

۲۵۸

۲۵۹

۲۶۰

۲۶۱

۲۶۲

۲۶۳

۲۶۴

۲۶۵

۲۶۶

۲۶۷

۲۶۸

۲۶۹

۲۷۰

۲۷۱

۲۷۲

۲۷۳

۲۷۴

۲۷۵

۲۷۶

۲۷۷

۲۷۸

۲۷۹

۲۸۰

۲۸۱

۲۸۲

۲۸۳

۲۸۴

۲۸۵

۲۸۶

۲۸۷

۲۸۸

۲۸۹

۲۹۰

۲۹۱

۲۹۲

۲۹۳

۲۹۴

۲۹۵

۲۹۶

۲۹۷

۲۹۸

۲۹۹

۳۰۰

۳۰۱

۳۰۲

۳۰۳

۳۰۴

۳۰۵

۳۰۶

۳۰۷

۳۰۸

۳۰۹

۳۱۰

۳۱۱

۳۱۲

۳۱۳

۳۱۴

۳۱۵

۳۱۶

۳۱۷

۳۱۸

۳۱۹

۳۲۰

۳۲۱

۳۲۲

۳۲۳

۳۲۴

۳۲۵

۳۲۶

۳۲۷

۳۲۸

۳۲۹

۳۳۰

۳۳۱

۳۳۲

۳۳۳

۳۳۴

۳۳۵

۳۳۶

۳۳۷

۳۳۸

۳۳۹

۳۴۰

۳۴۱

۳۴۲

۳۴۳

۳۴۴

۳۴۵

۳۴۶

۳۴۷

۳۴۸

۳۴۹

۳۵۰

۳۵۱

۳۵۲

۳۵۳

۳۵۴

۳۵۵

۳۵۶

۳۵۷

۳۵۸

۳۵۹

۳۶۰

۳۶۱

۳۶۲

۳۶۳

۳۶۴

۳۶۵

۳۶۶

۳۶۷

۳۶۸

۳۶۹

۳۷۰

۳۷۱

۳۷۲

۳۷۳

۳۷۴

۳۷۵

۳۷۶

۳۷۷

۳۷۸

۳۷۹

۳۸۰

۳۸۱

۳۸۲

۳۸۳

۳۸۴

۳۸۵

۳۸۶

۳۸۷

۳۸۸

۳۸۹

۳۹۰

۳۹۱

۳۹۲

۳۹۳

۳۹۴

۳۹۵

۳۹۶

۳۹۷

۳۹۸

۳۹

$$f(x) \geq 0 \quad +\infty \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+u^2)} du = \frac{1}{\pi} [\arctan u]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1$$

وہ صحت کے لئے نافع اور تھوڑے

$$f(u) = \int_{-\infty}^u f(t) dt = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{\pi} \left(\arctan t \right)_{-\infty}^u$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\arctan x + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$$

X توزیع مکول آاح لکھول ۲۰

ملک X کو اعوان و ملوک سے

$$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n$$

$$P(X=x_i) = P(x_i)$$

دیکھو γ متحرک پرستیجی X مضامین

مسئله ۱۰۰ در $\mathbb{R}^2$ نقاط x و y را در نظر بگیرید که $x = (1, 1)$ و $y = (1, 1)$ باشد. محاسبه کنید.

jein

g g - g

فرض $y_i = f(n_i)$ و y_i و n_i

$$P(Y = y_i) = P(\varphi(X) = y_i) = P(X = \varphi(y_i)) \\ = P(\varphi(y_i))$$

