كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : بصريات هندسية

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

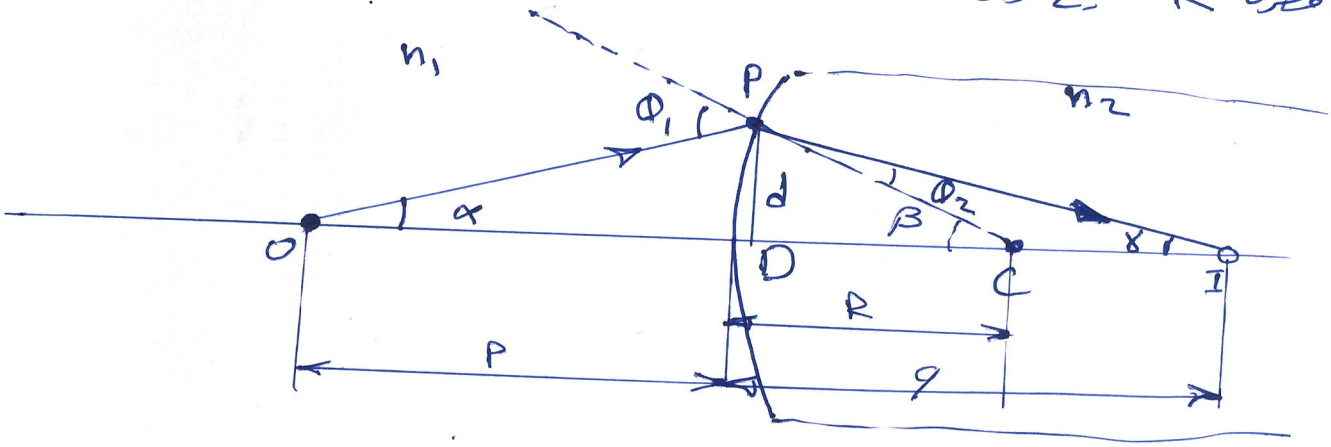
يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

المحاضرة الخامسة 5/1

الانكسار على السطوح الكروية:

١- الصورة الناتجة بالانكسار على السطوح الكروية:

لوصف كيفية تكون الصورة عندما تنكسر الأشعة على السطح الفاصل بين وسطين شفافين نتأمل وسطين شفافين لهما قرينتي انكسار n_1 و n_2 حيث السطح بينهما سطح كروي نصف قطره R ويقع مركز انحنائه في الوسط ذي القرينة n_2 كما في الشكل



بفرض أن الجسم النقطي O يقع في الوسط الذي له قرينة انكسار n_1 حيث $n_2 > n_1$ حيث يمكن ملاحظة أن شعاعاً OP يقارب الجسم النقطي O بزاوية ورود θ_1 ينكسر عند P ليصل النقطة (I) بزاوية انكسار θ_2 حيث أن I هي خيال الجسم O.

هنا أخذنا شعاعين لتحديد موقع الخيال I، أحدهما الشعاع الذي يمر بالمركز C والثاني هو الشعاع المفترض أن يكون وقوعه OC (أي شعاع يمر بمركز الانحناء لأي سطح انكسار) نقطة تقاطع هذين الشعاعين تحدد موقع الخيال (I)

لتطبيق قانون سنيل في الانكسار عند النقطة (P) للشعاع OP نجد أن:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad \cdots (1)$$

حيث تقع $\sin\theta \cong \theta$ إذا كانت قيم θ_1 و θ_2 صغيرة فإنه بتقريب مكلورين (الزاوية بالراديان) وبالتالي تصبح المعادلة (1) كما يلي:

$$n_1\theta_1 = n_2\theta_2 \quad \cdots (2)$$

باستخدام حقيقة (نظرية) أن الزاوية الخارجية في المثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين عدا المجاورة: نجد من المثلثين OPC و PIC أن:

$$\left.\begin{aligned}\theta_1 &= \alpha + \beta \\ \beta &= \theta_2 + \gamma\end{aligned}\right\} \quad \cdots (3)$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \alpha + \theta_2 + \gamma \quad \cdots (4)$$

$$\alpha_2 = \beta - \gamma \quad ---(5)$$

بتعويض (4) و (5) في (2) نجد أن :

$$n_1(\alpha+\beta) = n_2(\beta-\gamma)$$

$$\Rightarrow n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2-n_1)\beta \quad ---(6)$$

إذا كان بعد الجسم كبيرة فإن بؤرة الكاسر الكروي (P) وبعد الصورة (q) تحدد المثلثات القائمة OPD ، PDC ، PDI وبإستخدام البعد البؤري وتقريب الزوايا الصغيرة $\tan\theta \approx \theta$

$$\tan\alpha \approx \alpha \approx \frac{d}{p}, \quad \tan\beta \approx \beta \approx \frac{d}{R} ; \quad \tan\gamma \approx \gamma \approx \frac{d}{q} \quad ---(7)$$

بتعويض قيم الزوايا في (6) في العلاقة (6) نحذف d ثم نقسم على d لنحصل على :

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2-n_1}{R} \quad ---(8)$$

نرى من العلاقة أنه إذا كان بعد الجسم ثابت p فإن بعد الخيال q هو دالة فقط من الزاوية التي يصنعها الشعاع الحوري أي أن جميع البؤرة الحوري تتجمع في نفس النقطة (I).

إن المعادلة (8) من أجل كاسر كروي محدب عندما يكون $n_1 < n_2$.

ويمكن استخدامها أيضاً في حالة الكاسر الكروي المقعر وعندها نأخذ الإشارات لكل من الكاسر وكما يجب الأخذ بالحسبان إشارات الإشارة الموضحة في الجدول

الجهة الخلفية	الجهة الأمامية
p negative	p positive
q positive	q negative
الضوء المنكسر	الضوء الوارد

وإشارات الإحداثيات للسطوح الكاسرة.

المقدار	موجب عندما	سالب عندما
بعد الجسم p	الجسم واقع أمام السطح (جسم حقيقي)	الجسم واقع خلف السطح (جسم وهمي)
بعد الخيال q	الخيال واقع خلف السطح (خيال حقيقي)	الخيال واقع أمام السطح (خيال وهمي)
طول الخيال h'	الخيال معتدل نحو الأعلى (صحيح)	الخيال مقلوب
نصف قطر الانحناء R	مركز الانحناء يقع خلف السطح	مركز الانحناء يقع أمام السطح

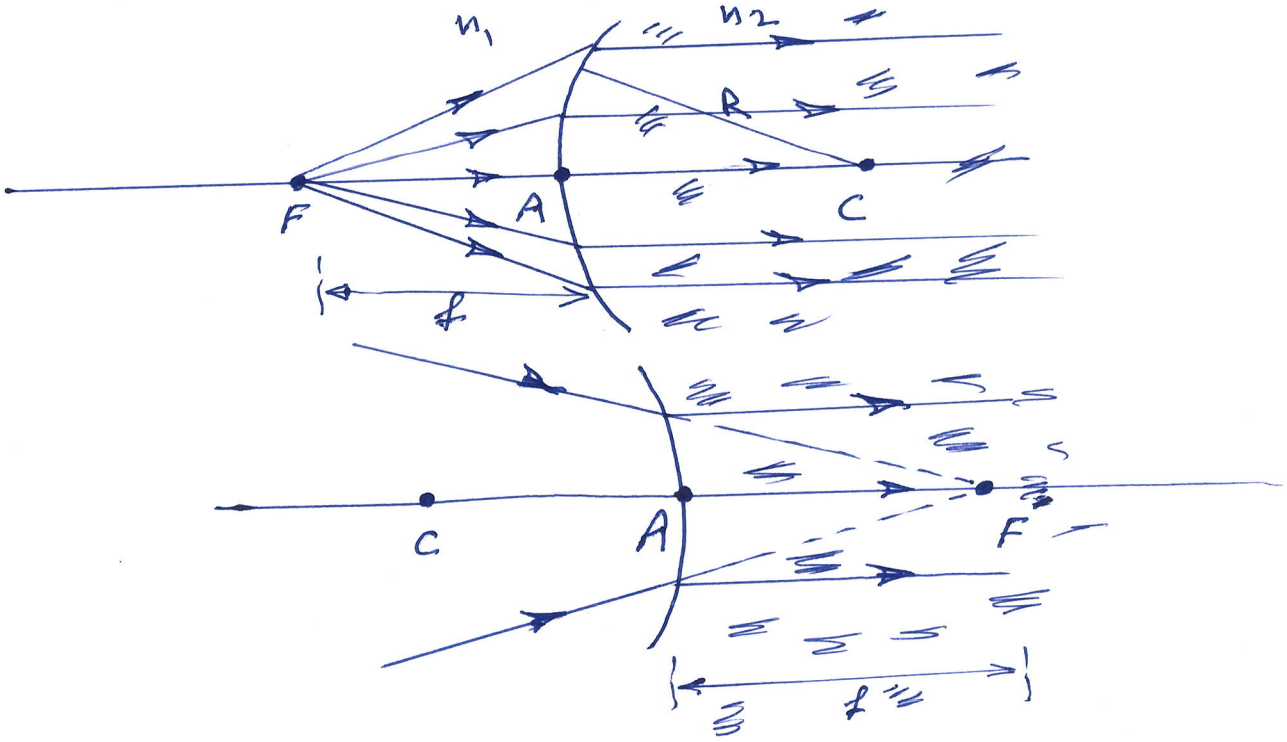
محرقا الكاسر الكروي :

لدينا المعادلة (8) :

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

غير حقيقي :

الدولي : إذا كان الخيال واقعاً في اللانهاية أي $q = \infty$ تصبح الأشعة المنكسرة متوازية ومحاورية للمحور الأصلي كما في الشكل



وتصبح المعادلة كما يلي :

$$\frac{n_1}{\infty} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

يكون في هذه الحالة الخيال في النقطة المحرقية الخيالية هو F وتكون البعد عن رأس الكاسر بـ f' ويسمى البعد المحرقي الخيالي . ويمكن عندئذ كتابة المعادلة وفق الآتي :

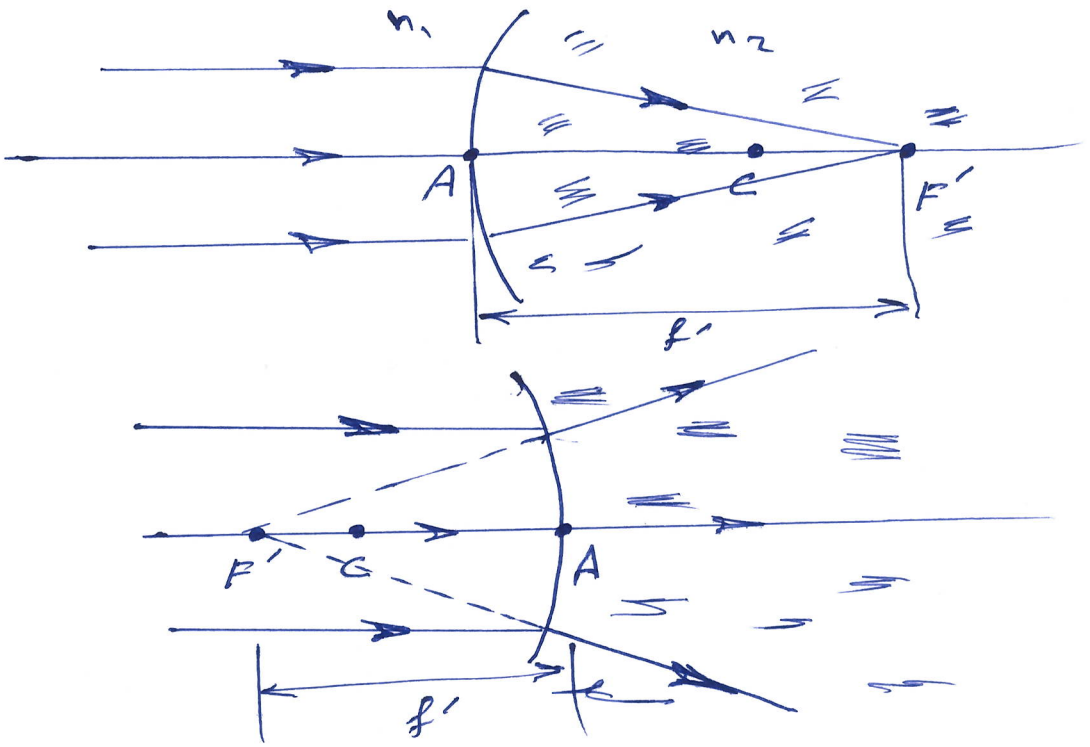
$$\frac{n_2}{f'} = \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \text{---- (9)}$$

ثانياً : إذا كان الجسم واقعاً في اللانهاية : $p = \infty$ عندها تصبح الأشعة الواردة متوازية ومتوازية للمحور الأصلي كما في الشكل وتصبح المعادلة (8)

$$\frac{n_1}{\infty} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

عندئذ يكون الخيال في النقطة المحرقية الخيالية F' وتكون البعد عن رأس الكاسر f' ويسمى بالبعد المحرقي الخيالي . وتصبح المعادلة :

$$\frac{n_2}{f'} = \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \text{---(10)}$$



نلاحظ من العلاقتين (9) و(10) أنه :

- إذا كانت $n_1 > n_2$ يكون الكاسر مبعداً وعندئذ تكون كلاً من f و f' سالبتان
- " " " $n_1 < n_2$ " " مقرباً " " " " f و f' موجبتان.

ونستنتج أيضاً من العلاقتين (9) و (10) أن :

$$\frac{f'}{f} = \frac{n_2}{n_1} \quad ---(11)$$

حيث تشير هذه العلاقة أن لكل من f و f' من إشارة واحدة أي أنهما متعاكستان دائماً على جانبي الكاسر الكروي أي أنهما كلاهما حقيقي أو كلاهما وهمي. (راجع الجدول)

سطوح الكاسرة المستوية كحالة خاصة للكاسر الكروي :

يمكن عد الكاسر المستوي حالة خاصة من الكاسر الكروي إذا كان نصف قطر انحنائه $R = \infty$

وتصبح المعادلة (8)

$$\frac{n_1}{p} = -\frac{n_2}{q}$$

$$\Rightarrow q = -\frac{n_2}{n_1} p \quad ---(12)$$

وهي نفس العلاقة (15) المستنتجة سابقاً

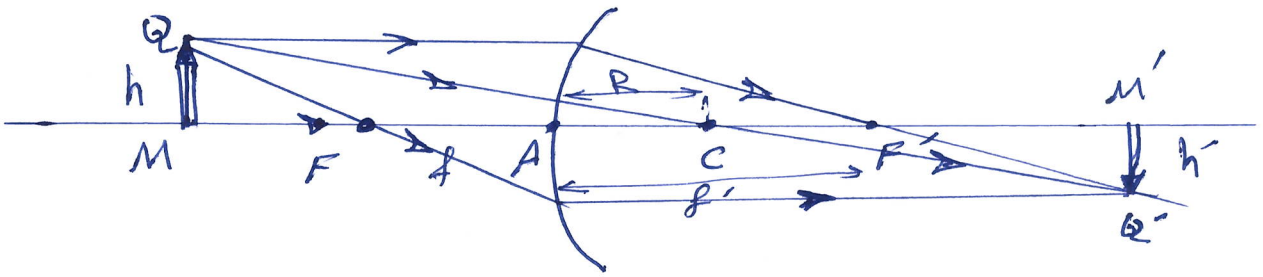
$$q = p \frac{n'}{n}$$

يُستشار وجود إشارة السالب التي تدل على أن الخيال في الكاسر المستوي يخالف الجسم في طبيعته أي أنه وهمي إذا كان الجسم حقيقياً وهو حقيقي إذا كان الجسم وهمياً.
وبالتالي وهذا ما يتوافق مع اصطلاحات الإشارة للكاسر الكروي المذكور سابقاً في الجدول.

التكبير الخطي العرضاني للكاسر الكروي :

يعرف التكبير الخطي العرضاني لأية أداة بصرية بأنه النسبة بين الأبعاد العرضية للخيال الناتج والأبعاد المواقفة للجسم المرئي.

لنقم الآن باستخراج علاقة التكبير الخطي العرضاني من أجل الكاسر الكروي بمساعدة الشكل المواقف للكاسر الكروي المحدب



نلاحظ أن المثلثين MQC و $M'Q'C$ متشابهان ومنه نستطيع كتابة:

$$\frac{M'Q'}{MQ} = \frac{CM'}{CM}$$

بالتعويض نجد أن:

$$-\frac{h'}{h} = \frac{q-R}{p+R}$$

ومنه نعرف التكبير الخطي العرضاني بالعلاقة:

$$m_t = \frac{h'}{h} = -\frac{q-R}{p+R} \quad \text{---- (13)}$$

كما نجد بتطبيق قانون سنيل عند النقطة A في حالة الزوايا الصغيرة أن:

$$n_1 \sin\phi = n_2 \sin\phi'$$

حيث أن ϕ و ϕ' زاويتي الورود والانكسار على الترتيب ويمكن كتابة العلاقة في حالة الزوايا الصغيرة $\sin\phi = \tan\phi = \phi$ بالشكل

$$n_1 \tan\phi = n_2 \tan\phi'$$

وبما أن

$$\tan\phi = \frac{h}{p} \quad , \quad \tan\phi' = \frac{-h'}{q}$$

نبدل في العلاقة نجد:

$$n_1 \frac{h}{p} = -n_2 \frac{h'}{q}$$

ومنه علاقة التكبير الخطي العرضاني تكون:

$$m_t = \frac{h'}{h} = -\frac{n_1 q}{n_2 p} \quad \text{---(14)}$$

ملاحظة: يمكن استنتاج العلاقة نفسها للكاسر المقعر الذي يعين بنفس الطريقة السابقة مع مراعاة الإشارات المناسبة لكاسر الكروي المحدب أو المقعر.

التكبير الخطي الطولاني للكاسر الكروي:

يعرف التكبير الخطي الطولاني m_l بأنه النسبة $\frac{dq}{dp}$ عندما تئول dp و dq إلى الصفر. حيث أن dp مقدار انزياح الجسم وفق المحور الأصلي و $-dq$ مقدار انزياح الخيال المواقق لانزياح الجسم وفق المحور الأصلي.

يمكن حساب التكبير الطولي الخطي باستنتاج العلاقة (8):

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

فنجد

$$-\frac{n_1 dp}{p^2} - \frac{n_2 dq}{q^2} = 0$$

ومنه

$$m_l = \frac{dq}{dp} = -\frac{n_1}{n_2}\left(\frac{q}{p}\right)^2$$

نضرب ونقسم طرفي العلاقة بالمقدار $n_1 n_2$ متحصل على

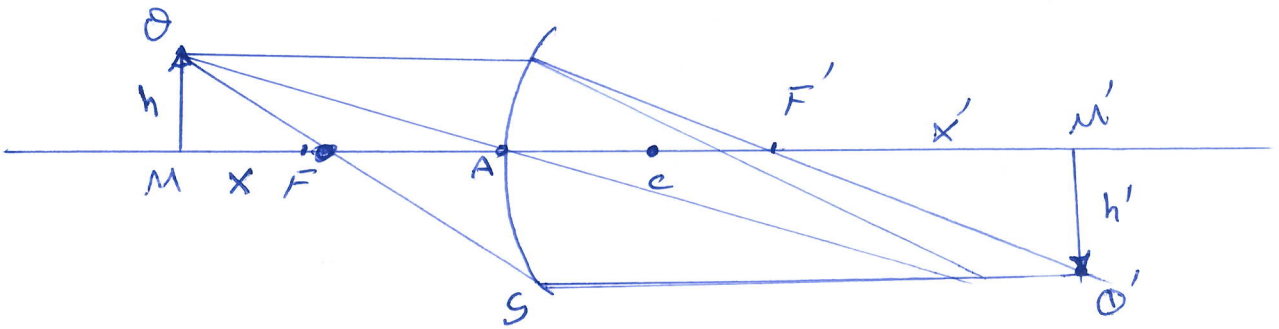
$$m_l = -\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{n_1 q}{n_2 p}\right)^2 = -\frac{n_2}{n_1} m_t^2 \quad \text{---(15)}$$

فنستنتج من هذه العلاقة أن التكبير الخطي الطولي m_l سالب دوما، أي أن الجسم وخياله يتقابلان دوما بالنسبة نقطة، فإذا اقترب الجسم من الكاسر اقترب الخيال منه وإذا اقترب الجسم ابتعد الخيال، ولا يلتقيان إلا في المركز C أو عند رأس الكاسر A.

دستور نيوتن:

نقدم استخراج علاقة أخرى تقارن الأسهم الأصلي وذلك بأخذ بعين الاعتبار بعد الجسم عن المحرق الجسمي X وبعد الخيال عن المحرق الخيالي X' وتكون X موجبة إذا وقع الجسم على يسار F وتكون X' موجبة عندما يقع الخيال على يمين F'

يمكن استنتاج هذه العلاقة بمساعدة الشكل. حيث يلاحظ أن المثلثين OMF و SAF متشابهان وكذلك المثلثين TAF' و OMF' متشابهان.



ونستنتج من النتائج أن:

$$\frac{h}{F'} = \frac{h'}{X'} \quad , \quad \frac{h}{X} = -\frac{h'}{F} \quad \text{---(1)}$$

من الهامش العلاقتين نكتب

$$m_t = \frac{h'}{h} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} \quad \text{..(2)}$$

وهي تعطي قانون نيوتن وهو :

$$x.x' = f.f' \quad \text{..(3)}$$

تمرين : استخرج قانون التكبير الطولي باشتقاق العلاقة $xx' = ff'$ واستنتج قانون نيوتن في التكبير الخطي العرضاني m_t المحصل بالعلاقة (2)

$$m_t = \frac{h'}{h} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$$

الحل : باشتقاق العلاقة $x.x' = f.f'$ نجد أن

$$x'dx + x\,dx' = 0$$

$$m_l = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x} \quad \text{...}$$

ومنه من العلاقة (2) نجد أن

$$m_t^2 = \left(-\frac{f}{x}\right) \times \left(-\frac{x'}{f'}\right)$$

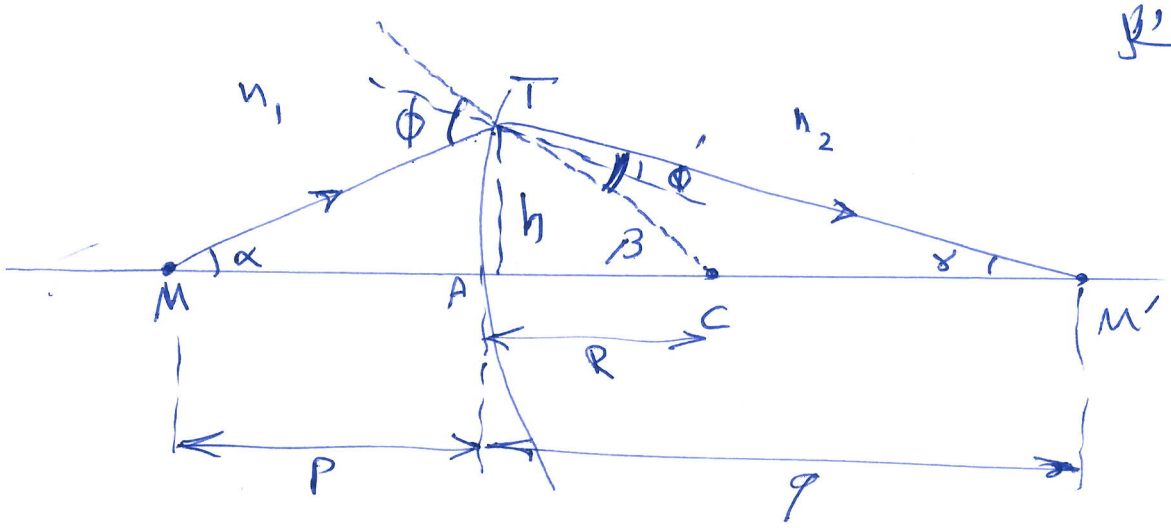
$$\frac{x'}{x} = m_t^2 \frac{f'}{f}$$

وباستغلال أن $\frac{f'}{f} = \frac{n_2}{n_1}$ نجد أن

$$m_l = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x} = -m_t^2 \frac{n_2}{n_1} \quad \text{...}$$

شرط الجيب لآبي Abbe في التقطيع، معادلة لاغرانج ـ هلمولتز

ليكن لدينا كاسر كروي محدب نصف قطر انحنائه R، ونضع جسماً نقطياً M على المحور الأصلي لهذا الكاسر فيكون له خيال في النقطة M' وذلك لأجل زاوية ورود كبيرة ϕ كما في الشكل



بتطبيق قانون الجيوب في المثلث MTC نجد:

$$\frac{\sin(\pi-\phi)}{R+P} = \frac{\sin\phi}{R+P} = \frac{\sin\alpha}{R}$$

أو

$$P+R = R\,\frac{\sin\phi}{\sin\alpha} \qquad --(1)$$

وكذلك بتطبيق قانون الجيوب في المثلث TCM' نجد:

$$\frac{\sin(-\alpha')}{R} = \frac{-\sin\alpha'}{R} = \frac{\sin\phi'}{q-R}$$

$$q-R = -R\,\frac{\sin\phi'}{\sin\alpha'} \qquad ---(2)$$

ملاحظة: إشارة السالب للزاوية α' لأنها تعاكس الزاوية α في اتجاهها.

نعوض الآن (1) و(2) في علاقة التكبير الخطي العرضاني المعطاة بالعلاقة التي في

$$m_t = \frac{h'}{h} = -\frac{q-R}{P+R}$$

نحصل على

$$\frac{h'}{h} = \frac{-R\sin\phi'\sin\alpha}{R\sin\alpha\sin\phi} = \frac{n_1\sin\alpha}{n_2\sin\alpha'}$$

والتي تختصر لنظيري :

$$n_1 h \sin\alpha = n_2 h' \sin\alpha' \quad ---(3)$$

وهذا هو شرط أبي لتحقق النقطية عند أبعد النقاط المحورية مهما كانت قيمة كل من α و α' وحين تكون الأسطح محورية أي عندما تكون زوايا الورود صغيرة يصبح الشرط أبي :

$$n_1 h \alpha = n_2 h' \alpha' \quad ---(4)$$

وهذه هي معادلة هلمهولتز وهي تربط بين التكبير الخطي العرضاني $\frac{h'}{h}$ ، التكبير الزاوي $\frac{\alpha'}{\alpha}$ بالعلاقة التالية :

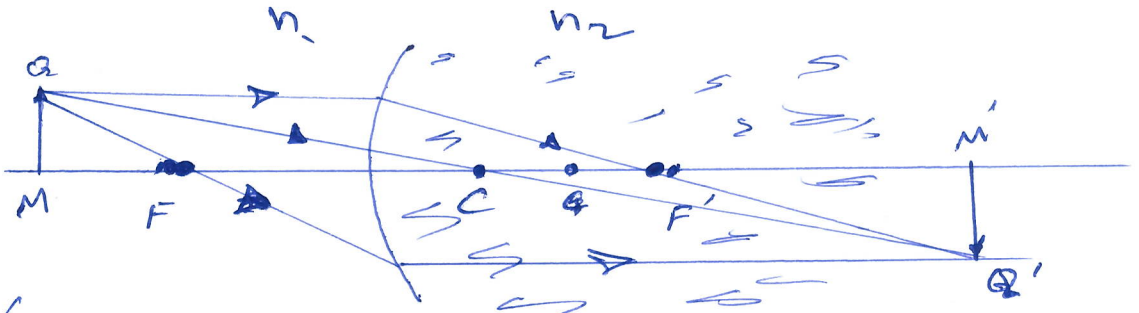
$$\frac{\alpha'}{\alpha} \times \frac{h'}{h} = \frac{n_1}{n_2} \quad ---(5)$$

بحيث أن جداءهما يساوي مقداراً ثابتاً مهما كانت قيمة كل من التكبيرين .

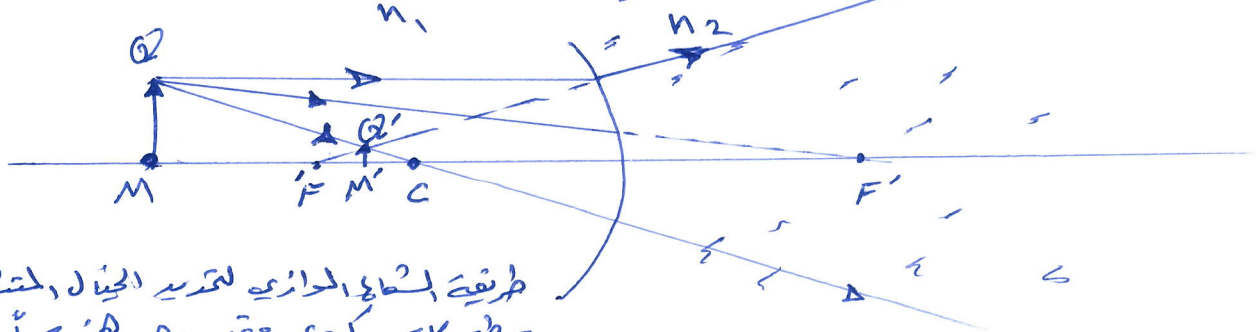
تحديد الخيال بالرسم الهندسي :

تذكر دائماً أن الأشعة السابقة للكاسر الكروي هي فقط صادرة عن الأسطح المحورية .

هنا سنقوم بتحديد طبيعة الخيال وموقعه لجسم MQ غير نقطي (أي ذي أبعاد) وذلك لكاسرين كرويين : محدب ومقعر على التوالي :



طريقة الشعاع الوازي لتحديد الخيال المتشكل بواسطة سطح كاسر كروي محدب وحيد الهندسياً .



طريقة الشعاع الوازي لتحديد الخيال المتشكل بواسطة سطح كاسر كروي مقعر وحيد الهندسياً .

1- يرد شعاع ضوئي داخل الهواء بزاوية ورود قدرها 45° على وجه منشور ثلاثي متساوي الوجهين معامل انكساره 1.5 وزاوية رأسه 45°.
احسب انزياح الشعاع البارز عن الشعاع الوارد. وقارن هذا الانزياح بالانزياح عندما تكون زاوية الورود صغيرة وتساوي 3°.

2- موشور زجاجي قرينة انكساره بالنسبة للضوء الأخضر المأخوذ عن الصوديوم تساوي 1.523 وزاويته رأسه 50°، إذا وردت حزمة من الضوء الأخضر على الوجه الأول بزاوية قدرها 47°، أوجد:
أ- زاوية الانحراف D عند الوجه الأول
ب- زاوية الانحراف D' عند الوجه الثاني
ج- زاوية الانحراف الكلية للموشور.

3- تتوضع قطعة معدنية في قعر حوض مليء بالماء حتى ارتفاع قدره 36 cm فإذا كانت قرينة انكسار الماء مساوية 1.333، أوجد البعد الظاهري للقطعة عن النظر الناظر الناظر بالشكل العمودي، مفترضين أن الزوايا صغيرة.

4- موشور رقيق زاويته وقرينة انكساره بالنسبة للشعاع الوارد إليه 1.58 احسب استطالة الموشور.

5- قضيب زجاجي قرينة انكساره n = 1.5 أجريت نهايته محدبة بنصف قطر انحناء 6 cm وضع في الهواء على المحور الأصلي للقضيب وجهة النهاية المحدبة للقضيب، أوجد مواقع الخيال الموافقة للأبعاد الجسمية التالية:
أ- 20 cm
ب- 10 cm
ج- 3 cm عن نهاية القضيب.

6- قضيب زجاجي طوله 2 cm وقرينة انكساره 1.5 قطعت نهايته على شكل كاسر كروي محدب نصف قطر انحناءه 2 cm. وضع جسم طوله 2 mm عمودياً على محور القضيب وعلى بعد 5 cm من نهايته المحدبة.
أ- أوجد بعد الخيال النهائي وطبيعته
ب- طول هذا الخيال.