كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : السادسة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

حاضرة السابعة — هندسة تحليلية — 8/12/2021

تمرين الأول : أوجد معادلة المستوي لذي المستقيم :

$$L : \begin{cases} l_1 : x - y + 2z - 1 = 0 \\ l_2 : 2x - 3y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

من المحمول في المستوي :

$$A \in \cdots P_1 = x + y - 2 + 5 = 0$$

ملاحظة : إن معادلة المستوي المطلوب تحقق معادلة الحزمة المارة بـ l_1 , l_2 :

$$P \equiv l_1 + \lambda l_2$$

$$\equiv (1+2\lambda)x + (-1-3\lambda)y + (2+\lambda)z - (1+2\lambda) = 0$$

ناظم الحزمة : $\vec{\omega}_\lambda (1+2\lambda, -1-3\lambda, 2+\lambda)$

نختار من هذه الحزمة المستوي الذي يعامد المستوي المعطى P_1

$P_1 : x + y - 2 + 5 = 0$; $\vec{\omega}_1 (1, 1, -1)$

أي أن :

$$\vec{\omega}_1 . \vec{\omega}_\lambda = 0 \Rightarrow 1(1+2\lambda) + 1(-1-3\lambda) - 1(2+\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 2\lambda - 1 - 3\lambda - 2 - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow -2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$$

نعوض قيمة λ في معادلة الحزمة فنحصل على المستوي :

$$P : -x + 2y + 2 + 1 = 0$$

وهي معادلة المستوي المطلوب .

* * *

التمرين الثاني : أحسب أقصر بعد بين المستقيمين :

$$D_1 = \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2\beta - 2 = 0 \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ y + \beta - 4 = 0 \end{cases}$$

ج: لنوجد متجهة التوجيه D_2:

$$\vec{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \vec{v_2}(1,-2,2)$$

لنوجد حزمة المستويات المارة من D_1:

$$P_1 + \lambda P_2 \equiv (1+\lambda)x - y + (1-2\lambda) - 2\lambda = 0$$

$$\vec{w_\lambda}(1+\lambda, -1, 1-2\lambda)$$

نختار من هذه الحزمة مستوى P الموازي لـ D_2 أي $\vec{w_\lambda}$ و $\vec{v_2}$ متعامدان

$$\vec{w_\lambda} \cdot \vec{v_2} = 0 \Rightarrow (1+\lambda) + 2 + 2(1-2\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \lambda + 2 + 2 - 4\lambda = 0$$

$$\Rightarrow -3\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{5}{3}}$$

$\Leftarrow$ نعوض في معادلة الحزمة لنوجد معادلة المستوى المار من D_1 والموازي لـ D_2:

$$P \equiv \left(1+\frac{5}{3}\right)x - y + \left(1-\frac{10}{3}\right)z - \frac{10}{3} = 0$$

$$\equiv \frac{8}{3}x - y - \frac{7}{3}z - \frac{10}{3} = 0$$

$$\boxed{P \equiv 8x - 3y - 7z - 10 = 0}$$

نختار نقطة من المستقيم D_2:

نفرض $x=0 \Leftarrow y=1 \Leftarrow z=3$

$M(0,1,3)$

ويكون بعد هذه النقطة M عن المستوى P هو:

$$d = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|-3-21-10|}{\sqrt{8^2+(-3)^2+(-7)^2}} = \frac{|-34|}{\sqrt{64+9+49}}$$

$$= \frac{34}{\sqrt{127}}$$

وهو أقصر بعد بين المستقيمين D_1 و D_2.

التمرين الثالث : ادرس وضع المستقيم بالنسبة للمستويات:

$x = 2-3\lambda$, $y = 1+\lambda$, $z = \lambda$

$P_1 : x+y+z+4=0$

$P_2 : x+2y+z+5=0$

$P_3 : x+4y-z-6=0$

الحل : نعوض معادلات المستقيم في المستوي P_1 فنجد :

$(2-3\lambda)+(1+\lambda)+\lambda+4=0$

$-\lambda+7=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=7}$

ونكون نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى P_1 هي :

$M_1(-19, 8, 7)$

• نعوض معادلات المستقيم في المستوي P_2 فنجد:

$(2-3\lambda)+2(1+\lambda)+\lambda+5=0 \Rightarrow 0\lambda+9=0$

وهذه المعادلة مستحيلة الحل والمستقيم يوازي المستوي P_2

• نعوض معادلات المستقيم في المستوي P_3 فنجد:

$(2-3\lambda)+4(1+\lambda)-(\lambda)-6=0 \Rightarrow 0\lambda+0=0$

وهذه المعادلة محققة مهما كان λ والمستقيم واقع في المستوي P_3 [يوجد عدد لا نهائي من النقاط التي تحقق هذه المعادلة].

* * *

التمرين الرابع : ادرس تقاطع المستقيم

$$D = \begin{cases} x+y+2z+3=0 \\ x-2y+5z=0 \end{cases}$$

مع كل من المستويات السابقة P_1 , P_2 , P_3 في التمرين السابق.

الحل : التقاطع مع P_1 :

$$\begin{cases} x+y+2z-3=0 \\ x-2y+5z=0 \\ x+y+z+4=0 \end{cases}$$

نوجد محدد الأمثال :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7+4+6 = 3 \neq 0$$

ثم نشاهد D_x ، D_y ، D_z :

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -57$$

$$\Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{-57}{3} = -19$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 24 \quad \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{24}{3} = 8$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 21 \quad \Rightarrow z = \frac{D_z}{z} = \frac{21}{3} = 7$$

• أيضاً ندرس تقاطع D مع P_2 :

في حين المثال $D=0$ ، أيضاً $D_z \neq 0$ ، $D_y \neq 0$ ، $D_x \neq 0$

والحالة مستحيلة الحل، لا يوجد تقاطع.

• أما بالنسبة للمستوي الثالث P_3 فنجد أن : $D=0$

$D_x=0$ ، $D_y=0$ ، $D_z=0$

والحالة عدد لا نهائي من الحلول تتوضع في الفصل المشترك للمستويات الثلاثة.

مكتبة A to Z