كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : برمجة غرضة التوجة

المحاضرة : الخامسة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات
مقرر: برمجة غرضية التوجه- السنة الرابعة

المحاضرة الخامسة

الأسس والجذور واللوغريتمات

الأس والأساس:

تكتب الصيغة الأسينة x^n حيث ، **x** أي عدد حقيقي و **n** أي عدد نسبي، وتقرأ: الأساس (**x**) مرفوعا إلى الأس (**n**).

- وإذا كان الأساس عددا سالبا فإن الناتج يكون موجبا إذا كان الأس عددا زوجيا ، في حين يكون سالبا إذا كان الأس عددا فرديا .
- وبطبيعة الحال يكون الناتج موجبا دائما إذا كان الأساس عددا موجبا بغض النظر عن إشارة الأس.

قوانين الأسس:

بافتراض أن **x** و **y** تمثلان أعدادا حقيقية و **n** تمثل عددا صحيحا ، فإن جميع هذه القوانين تنطبق عليها:

1. $x^1 = x$
2. $x^0 = 1 \quad (x \neq 0)$
3. $\frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad (x \neq 0)$
4. $x^n x^m = x^{n+m}$
5. $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \quad (x \neq 0)$
6. $\left(x^n\right)^m = x^{nm}$
7. $(xy)^n = x^n y^n$
8. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0)$
9. $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$

في لغة ماتلاب يتم رفع أي عدد لأس معين باستخدام علامة ^.

مثال:

```
(-3)^3
ans =
   -27
```

الجذور

الصيغة العامة للجذر ($\sqrt[n]{y}$)، حيث **n** عدد طبيعي أكبر من واحد صحيح، و **y** أي عدد حقيقي.
وتقرأ ($\sqrt[n]{y}$): الجذر النوني لـ **y** الذي يسمى المجذور.
وجذر ($\sqrt[n]{y}$) هو الأساس الذي إذا رُفع إلى الأس (**n**) أنتج المجذور (**y**).
وعندما تكون **n=2** ، فقد جرت العادة على كتابة الجذر بهذه الصورة ($\sqrt{y}$) بدلا من $\sqrt[2]{y}$
ويمكن تحويل أي جذر إلى صيغة أسية باستخدام هذا القانون $\sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ والعكس صحيح.
ومن خواص الجذور ما يلي (لأي عدد طبيعي **n>1** ، و أي عددين حقيقيين موجبين **x** و **y**):

$$\sqrt[n]{x^n} = x$$
$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$$
$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

يمكن حساب الجذر التربيعي في ماتلاب باستخدام الدالة **sqrt** .

```
sqrt(16)
ans =4
```

وحيث نعلم العلاقة بين الأسس والجذور فإنه بالإمكان إيجاد الجذور برفع المجذور إلى الأس المناسب.

مثال: الجذر التكعيبي للعدد ٢٧ يمكن حسابه كالتالي:

```
27^(1/3)
ans =3
```

اللوغاريتمات

الصيغة اللوغاريتمية تكتب ($\log_x y$) وتقرأ: لوغاريتم **y** بالنسبة للأساس **x**. ولوغاريتم ($\log_x y$) هو الأس الذي يجب أن يرفع إليه الأساس (**x**) للحصول على (**y**). وإذا لم يذكر أساس اللوغاريتم فإن المفترض أن يكون أساسه **10**. ويسمى اللوغاريتم الذي أساسه **10** باللوغاريتم العادي. ($\log_{10} a = \log a$).
أما إذا كان أساس اللوغاريتم العدد الطبيعي **e=2.71828...** ، فيسمى اللوغاريتم الطبيعي، ويكتب عادة على هذه الصورة ($\log_e a = \ln a$).

قوانين اللوغاريتمات:

بافتراض أن **v** و **a** و **u** و **n** تمثل أعداداً حقيقية، وأن **a>0** و **1 ≠ a** ، فإن جميع هذه القوانين تنطبق عليها:

$$1.\ \log_a 1 = 0 \qquad 2.\ \log_a a = 1 \qquad 3.\ \log_a vu = \log_a v + \log_a u$$
$$4.\ \log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v \qquad 5.\ \log_a u^n = n \log_a u$$

يمكن حساب اللوغريتمات في ماتلاب باستخدام أكثر من دالة. وأهم هذه الدوال دالتا اللوغاريتم العادي والطبيعي. فاللوغاريتم العادي يحسب باستخدام الدالة **log10**، واللوغاريتم الطبيعي يحسب باستخدام الدالة **log**

أمثلة:

```
log10(100)
ans =
      2
log(100)
ans =
    4.6052
```

قوانين اللوغاريتمات:

ملاحظة: يمكن الحصول على ناتج e^n في ماتلاب باستخدام الدالة **exp**؛ مثال إذا أردنا أن نعرف ناتج e^3 نكتب:

```
exp(3)
ans =
   20.0855
```

ولمعرفة قيمة العدد الطبيعي **e** نكتب:

```
exp(1)
ans =
    2.7183
```

العلاقة بين الأسس والجذور واللوغريتمات:

يوجد علاقة بين الأسس والجذور واللوغاريتمات؛ فلو افترضنا أن **$x^n = y$** ، حيث **y** أكبر من الصفر ولا تساوي الواحد صحيح **(y>0,y≠1)**، فإن رفع طرفي المعادلة إلى الأس **(1/n)** يعطي $[x^n]^{\frac{1}{n}} = y^{\frac{1}{n}}$ وباستخدام قوانين الأسس والجذور نعلم أن $x = y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y}$. كذلك فإن اخذ لوغاريتم طرفي المعادلة **$x^n = y$** بالنسبة لـ **x** (أو **$\log_x$**) يعطي $\log_x x^n = \log_x y$ وباستخدام قوانين اللوغاريتمات نعلم أن $\log_x x^n = n$، إذن $\log_x y = n$. وعليه، فإن **$y = x^n$** تساوي **$n = \log_x y$** .

المتغيرات كرموز ضمن الماتلاب

كما بينا سابقا ، من المعتاد استخدام الحروف الأبجدية في الرياضيات للدلالة على الأعداد؛ وتكون بحسب ما تعرف به، فيقال إن **a** أو **b** تدل على أي عدد حقيقي أو أي عدد حقيقي صحيح .. وهكذا. الأصل في ماتلاب أن يحتفظ في ذاكرته برقم أو أرقام لكل متغير يتم التعامل معه؛ مع هذا فهو يستطيع أن يتعامل مع الرموز الرياضية كما هي إذا تمت إضافة ملحق **Symbolic Math Toolbox** إليه، وفي هذه الحالة يمكن استخدامه في حل التمارين التالية، أو التأكد من صحة حلنا لها. ويتم تحويل أي متغير أو تعريفه ابتداء على أنه رمز باستخدام الدالة **syms**؛ فلنأخذ المسألة الأولى في التمرين التالي

كمثال: المسألة هي احسب a^2a^3 ؛ فلو كتبنا:

```
a^2*a^3
```

لرد ماتلاب بهذه الرسالة التحذيرية:

```
ans =
??? Undefined function or variable 'a'.
```

فماتلاب لا يعرف المتغير **a** ولا يحتفظ في ذاكرته برقم معين يمثله المتغير **a**؛ ولتمكين ماتلاب من حل هذه المسألة، لابد أن نطلب منه التعامل مع **a** على أنه متغير رمزي لا عددي باستخدام الدالة **syms**

```
syms a
a^2*a^3

ans =
a^5
```

لاحظ أن الحل تضمن رمزا رياضيا وهو **a**

ومن مزايا ماتلاب أيضا أنه يمكن من عرض المقادير الجبرية التي ندخلها، أو التي ينتجها كإجابة في الشكل المألوف الذي تكتب به عادة، ويتم هذا باستخدام الأمر **pretty** على سبيل المثال:

```
pretty(ans)
          5
         a
```

المتغيرات كرموز ضمن الماتلاب

كما قد نحتاج هذا الأمر لعرض بعض التعبيرات الجبرية قبل حسابها للتأكد من أننا أدخلناها بالترتيب الصحيح؛ خذ على سبيل المثال :

$$\frac{8^{1+n}(2^{n+5})2^5(4^{2n})}{2^{4n+8}(16^{n+1})}$$

```
syms n
pretty((8^(1+n)*2^(n+5)*2^5*4^(2*n))/(2^(4*n+8)*16^(n+1)))

        (1 + n)   (n + 5)   (2 n)
       8         2         4
  32 ------------------------
         (4 n + 8)   (1 + n)
        2          16
```

لاحظ أن ماتلاب حسب $32 = 2^5$ قبل عملية العرض.

وفي كثير من الأحيان يطلب السؤال تبسيط الناتج ما أمكن، ويتضمن ماتلاب دالة تقوم بهذا الغرض وهي **simple** ؛

لنفس المثال السابق

```
a13 =
((8^(1+n)*2^(n+5)*2^5*4^(2*n))/(2^(4*n+8)*16^(n+1)))
a13 =
32*8^(1+n)*2^(n+5)*4^(2*n)/(2^(4*n+8))/(16^(1+n))
a13 = simple(a13)
a13 =
2
```

المقادير الجبرية

تعريف

يتم تكوين المقدار الجبري باستخدام ثوابت ومتغيرات وعمليات جبرية (الجمع والطرح والضرب والقسمة، والرفع لأس، وأخذ الجذر)، وقد يتكون المقدار الجبري من حد واحد، أو حدين، أو أكثر؛ والحد يمكن أن يشتمل على ثابت (رمزي أو رقمي) مرفوع لأس معين، أو متغير مرفوع لأس معين، مضروبة في بعضها أو مقسومة على بعضها.

أمثلة للمقادير الجبرية:

$$x + y - 6 \qquad 5x^3 + 2x^2 - 5 \qquad \sqrt[6]{x^3 + 5}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \qquad \frac{x - 5}{x^2 + 2x - 5} \qquad (2x - y)^2$$

ويطلق مصطلح (كثيرة الحدود) على المقدار الجبري الذي يتضمن عمليات جمع وطرح وضرب ورفع إلى عدد طبيعي فقط.

وتستخدم كثيرة الحدود في الرياضيات كثيرا لوصف وتقريب العلاقات الرياضية. وتمهيدا لمعرفة المزيد عن كثيرات الحدود، نعرض فيما يلي لمفهوم الثوابت والمتغيرات.

الثوابت والمتغيرات

كما أشرنا سابقا ، يستعمل الرياضيون حروف الهجاء والرموز اللاتينية في الرياضيات للدلالة على الأعداد؛ فنقول مثلا : إن **n** ترمز إلى أي عدد حقيقي؛ والهدف من ذلك هو صياغة القوانين الرياضية في صورة تتسم بقدر كبير من التعميم.

وعادة ما تقسم هذه الأحرف والرموز إلى أحرف تدل على ثوابت وأخرى تدل على متغيرات.

الثوابت والمتغيرات

١. **الثابت**، هو الحرف الذي يرمز إلى قيمة واحدة فقط. وبعبارة أخرى يتكون نطاق الثابت من عدد واحد، وعادة ما يرمز للثوابت بالحروف الأولى من الأبجدية مثل(**a, b, c, d**) . ويسمى الثابت ب (معلمة) أو (الثابت الرمزي) مادام مرموزا له بأحد هذه الحروف، إذا تم استبدال الحرف الذي يرمز للثابت بالقيمة الوحيدة له فيسمى (الثابت العددي أوالثابت الرقمي).

٢ . **المتغير**، هو الحرف الذي يمكن أن يرمز إلى أكثر من قيمة في وقت واحد؛ فيشتمل نطاقه على أكثر من عدد، وعادة ما يرمز للمتغيرات بالحروف الأخيرة من الأبجدية مثل(. **y, x, z**)

كما جرت العادة على تقسم المتغيرات إلى مستقلة وتابعة؛ فالمستقلة هي التي تؤثر في المتغيرات المستقلة، وليس العكس. كما تقسم المتغيرات إلى متغيرات متقطعة ومتصلة (أو مستمرة)؛ فالمتغير المتقطع لا تخرج القيم التي يمكن أن يأخذها عن مجموعة الأعداد الصحيحة؛ مثل: عدد أفراد العائلة (٠ ، ١ ، ٣ ، ...). والمتغير المتصل هو الذي يمكن أن يأخذ قيمة ثالثة بين قيمتين مهما قل الفرق بينهما؛ مثل: درجة الحرارة.

وعندما يضرب ثابت في متغير فإن هذا الثابت يسمى بمعامل هذا المتغير ؛ ومثال ذلك: **ax** فهنا يسمى الثابت **a** معامل المتغير **x**.

نظريا، تستخدم الثوابت للدلالة على ما يفترض ثباته عند دراسة ظاهرة معينة (مثل ميل دالة الطلب والعرض)، في حين يستخدم المتغير لما تفترض الدراسة أن يأخذ أكثر من قيمة خلال فترة الدراسة (مثل السعر والكمية المطلوبة أو المعروضة).

كثيرات الحدود

تعد كثيرات الحدود كما أشرنا نوعا من المقادير الجبرية التي تتضمن عمليات جمع وطرح وضرب ورفع إلى عدد طبيعي فقط؛ ولهذا لا يمكن أن يظهر المتغير في كثيرات الحدود في المقام، أو الأس، أو داخل جذر.

أمثلة لكثيرات الحدود:

$x+y-6$	$5x^3+2x^2-5$	$2x-3$
0	$x-3xy+4y^2$	5

وتصنف كثيرات الحدود بناء على درجتها وعدد المتغيرات فيها؛ حيث تساوي درجة كثيرات الحدود أعلى أس للمتغير في كل الحدود.

ويمكن أن تشتمل كثيرات الحدود على متغير واحد أو أثنين أو أكثر، وعندئذ تساوي درجته أعلى مجموع لأسس المتغيرات في أي حد من الحدود.

جمع وطرح المقادير الجبرية

لجمع (أو طرح) المقادير الجبرية، نتبع الخطوات الآتية:

١ . إزالة الأقواس.

٢ . توحيد الحدود المتشابهة (أي الحدود التي يكون فيها المتغير مرفوع ا إلى الأس نفسه).

٣ . نجمع (أو نطرح) الثوابت مع الثوابت، ونجمع (أو نطرح) معامل كل متغير على حدة.

مثال: اجمع $x-3x^3+x^2$ مع $3x-x^3-2x^2$

الحل:

$$(x-3x^3+x^2+6)+(3x-x^3-2x^2-5)$$
$$x-3x^3+x^2+6+3x-x^3-2x^2-5$$
$$x+3x-3x^3-x^3+x^2-2x^2+6-5$$
$$4x-4x^3-x^2+1$$

ضرب وقسمة المقادير الجبرية:

لضرب المقادير الجبرية، نتبع الخطوات الآتية:

١ . فك الأقواس؛ من خلال ضرب المقدار خارج القوس بكل حد داخل القوس.

٢ . توحيد الحدود المتشابهة (أي الحدود التي يكون فيها المتغير مرفوع ا إلى الأس نفسه).

٣ . نجمع (أو نطرح) الثوابت مع الثوابت، ونجمع (أو نطرح) معامل كل متغير على حدة.

وتقسم المقادير الجبرية بقسمة كل حد في البسط على الحد أو الحدود في المقام.

مثال: اضرب $2x - 3$ في $3x^2 - 2x + 3$

الحل:

$$(2x - 3)(3x^2 - 2x + 3)$$
$$2x(3x^2 - 2x + 3) - 3(3x^2 - 2x + 3)$$
$$6x^3 - 4x^2 + 6x - 9x^2 + 6x - 9$$
$$6x^3 - 4x^2 - 9x^2 + 6x + 6x - 9$$
$$6x^3 - 13x^2 + 12x - 9$$

العامل المشترك:

العامل المشترك لمقدار جبري هو مقداران جبريان أو أكثر، تعطي حصيلة ضربهما أو ضربها المقدار الجبري.

مثال:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

في هذا المثال، يمثل كل من المقدارين $(x + 2)$ و $(x - 2)$ عامل مشترك للمقدار $x^2 - 4$.

من التقنيات الشائعة التي تستخدم لإيجاد العامل المشترك (عكس عملية فك الأقواس) أن نستخرج المتغير (أو الثابت) المشترك بين أكثر من حد خارج القوس، ونجعل المعاملات أو الثوابت أو المتغيرات غير المشتركة داخل القوس.

مثال:

العامل المشترك لبعض المقادير شائعة الاستخدام:

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$$
$$(x + y)^2 = x^2 + xy + y^2$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

العامل المشترك:

كما أشرنا سابقا ، لكي يتعامل ماتلاب مع المقادير الجبرية التي تتضمن رموز ا رياضية (مثل **x** و **y** و **n** و **m** وغيرها) نحتاج فقط إلى أن نجعل ماتلاب ينظر لهذه الأحرف على أساس أنها متغيرات رمزية وليست متغيرات رقمية، وذلك باستخدام الأمر **syms** .

مثال: اكتب برنامج ماتلاب ينفذ العملية التالية: $(x - 7)(x + 7)$

```
syms x
d5 = (x-7)*(x+7)
d5 =
(x-7)*(x+7)
```

لتبسيط الحل نستخدم الأمر:

```
d5 = simple(d5)
d5 =
x^2-49
```

لعرض الحل بالصورة المعتادة نستخدم:

```
pretty(d5)
2
x - 49
```

ملاحظة: كثير من الطلاب يهمل عملية الضرب؛ مما ينتج عنه رسالة تخطئة. مثال ذلك **2x** فهذا الحد عبارة عن٢ في **x** ولذا تؤدي كتابة المقدار **2x** إلى:

```
2x
2 ؟؟؟
|
Missing operator, comma, or semi-colon.
```

العامل المشترك:

فهذه الرسالة تقول بأن هناك شيئا مفقودا إما معامل (ضرب أو قسمة أو جمع أو طرح) أو فاصلة؛ والصحيح أن يكتب هذا الحد بهذه الطريقة:

```
2*x
ans =
2*x
```

كما يكتب المقدار $x(x-3)$ هكذا:

```
x*(x-3)
ans =
x*(x-3)
```

يوجد دالة في ماتلاب تقوم بحساب العامل المشترك في التعبير الجبري المعطى. وهذه الدالة هي **factor**؛ مثال

```
factor (2*x + 3*x^2)
ans =
x*(2+3*x)
```

فالعامل المشترك بين هذين الحدين هو **x** .

مثال: أحسب العامل المشترك لكثير الحدود التالي $2x^2 - 2xy + x - y$

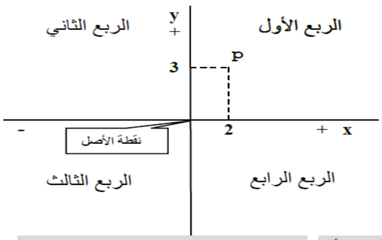
```
syms y
factor(2*x^2-2*x*y + x - y)

ans =
(2*x+1)*(x-y)
```

الدوال

الإحداثيات المتعامدة

الإحداثيان المتعامدان عبارة عن خطين مستقيمين متعامدين، يتقاطعان عند الصفر (نقطة الأصل). ويسمى الخط الأفقي بالمحور الأفقي أو محور المتغير **x** بينما يسمى الخط الرأسي بالمحور الرأسي أو محور المتغير **y**.
والإحداثيان المتعامدان يقسمان المستوى إلى أربعة أقسام (من الربع الأول إلى الربع الرابع). ويقابل كل نقطة على المستوى زوج مرتب، وفي الزوج المرتب (2,3)، الممثلة في النقطة **p** في الشكل ، يمثل العدد الأيسر إحداثي **x**، في حين يمثل العدد الأيمن إحداثي **y** .



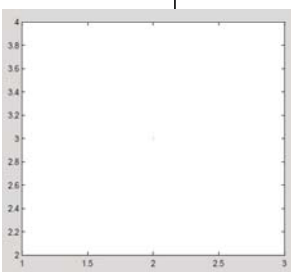
لتمثيل أي زوج مرتب في المستوى، نستخدم دالة الرسم **plot** . مثال:

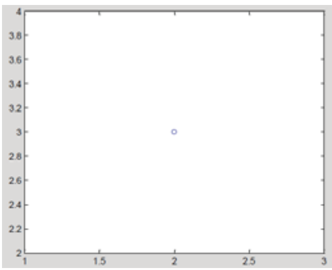
تمثيل الزوج المرتب (2,3)

```
plot(2,3)
```

وحيث من الصعوبة بمكان ملاحظة النقطة الممثلة، فإنه يمكن وضع دائرة صغيرة على هذه النقطة باستخدام الأمر:

```
plot(2,3,'o')
```





الدالة

تعبر الدالة عن علاقة بين متغيرين، وتكتب عادة على شكل **y=f(x)** وتقرأ **y** دالة في x حيث **y** المتغير التابع (المتأثر) و **x** المتغير المستقل (المؤثر)

وتجب ملاحظة أن كل دالة علاقة وليست كل علاقة دالة؛ لأن الدالة تشترط أن يقابل كل قيمة من قيم المتغير المستقل **x** قيمة واحدة فقط للمتغير التابع **y**.

الدالة

وقد يعبر عن الدالة في شكل عام كما في المثال أعلاه، $y=f(x)$، أو يعبر عنها في شكل محدد يبين كيف يؤثر المتغير المستقل في المتغير التابع؛ مثل $y=2x$ أو $y=3x^2$.

طرق تمثيل العلاقات والدوال:

يمكن تمثيل العلاقة بعد طرق مثل: (١) جدول أو (٢) معادلة أو (٣) رسم بياني.

وقد جرى عرف الرياضيين على وضع المتغير التابع (y) على المحور الرأسي والمتغير المستقل (x) على المحور الأفقي،

أنواع الدوال:

تنقسم الدوال إلى دوال جبرية ودوال هندسية (مثل بتا). وتنقسم الدوال الجبرية إلى نوعين خطية وغير خطية، والدوال غير الخطية تنقسم إلى أنواع كثيرة؛ منها: التربيعية، التكعيبية، النونية، الأسية، اللوغاريتمية، النسبية، غير النسبية.

الدالة الخطية:

تمثل الدالة الخطية جبريا في شكل المعادلة:

$$y = a + b x$$

وتمثل الدالة بيانيا في شكل خط مستقيم على المستوى.

ومن أهم خواص الدالة الخطية ما يلي:

١ – تتقاطع الدالة الخطية مع المحور الرأسي عندما تكون قيمة y مساوية لقيمة a، وتتقاطع مع المحور الرأسي عندما تكون قيمة x مساوية للمقدار $(-a/b)$

٢ – إذا كانت $a=0$، فإن الدالة تقطع المحورين الرأسي والأفقي عند نقطة الأصل.

الدالة الخطية:

٣– ميل الدالة الخطية ثابت ويساوي b (معامل المتغير المستقل x).

٤ – إذا كانت $b=0$ فإن الدالة الخطية تمثل بيانيا في شكل خط أفقي موازي للمحور الأفقي، ويبعد عنه بمقدار قيمة الثابت a.

٥ – تمثل المعادلة $x=c$؛ حيث c عدد حقيقي في شكل خط رأسي، ولكنها لا تعد حينئذ دالة من الناحية الرياضية.

٦ – إذا كانت $b>0$ فإن الدالة الخطية تكون متزايدة (تزيد قيمة y إذا زادت قيمة x) أي تعبر الدالة عن علاقة طردية بين هذين المتغيرين، وتمثل الدالة بيانيا في شكل خط صاعد من اليسار إلى اليمين، أما إذا كانت $b<0$ فإن الدالة الخطية تكون متناقصة (تنقص قيمة y إذا زادت قيمة x؛) أي تعبر الدالة عن علاقة عكسية بين هذين المتغيرين. وتمثل الدالة بيانيا في شكل خط هابط من اليسار إلى اليمين.

رسم الدالة الخطية

ترسم الدالة الخطية باتباع الخطوات التالية:

١ – اختر أي قيمتين للمتغير المستقل (x مثلا ٠ و ١)

٢ – عوض بدل x في الدالة الخطية بهاتين القيمتين للحصول على قيمتي y المناظرتين.

٣ – بهذا يكون لديك زوجان مرتبان يمكن تمثيلهما في شكل نقطتين في مستوى (x,y).

٤ – ارسم خطا مستقيما يمر بهاتين النقطتين.

رسم الدالة الخطية

هناك طريقتان لرسم الدوال الخطية باستخدام ماتلاب؛ الأولى هي أن نتبع نفس الخطوات أعلاه؛ فنبدأ بتكوين متجه يتضمن قيمتين للمتغير **x**

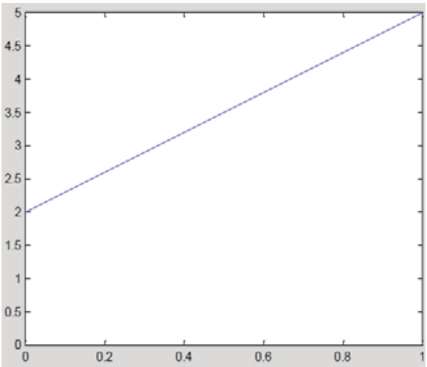
```
x = [0 1]
x =
    0    1
```

وبافتراض أن الدالة الخطية التي نريد رسمها هي $y = 2 + 3x$؛ فنقوم في الخطوة الثانية بإيجاد قيم **y** المناظرة لقيم **x** في المتجه أعلاه:

```
y = 2 + 3*x
y =
    2    5
```

فيكون لدينا الآن زوجان مرتبان هما (٠،٢)،(١،٥) يمكن أن نمثلهما بيانيا بنقطتين في المستوى، ثم نوصل بينهما خطط مستقيم، وهاتان الخطوتان يمكن اختزالهما باستخدام الأمر:

```
plot(x,y)
axis([0 1 0 5])
```



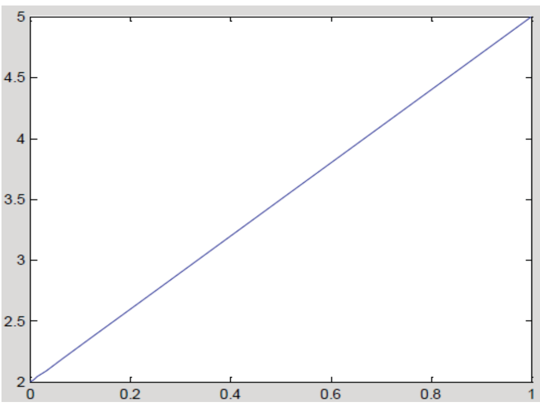
لاحظ أن الدالة تقطع المحور الرأسي عند ٢ .

وقد تم إضافة الأمر **axis([0 1 0 5])** بهدف إلزام ماتلاب أن يجعل المحور الأفقي يبدأ من ٠ وينتهي بـ ١ ، وأن يبدأ المحور الرأسي من ٠ وينتهي بـ ٥

رسم الدالة الخطية

أما الطريقة الثانية فهي استخدام الدالة **fplot** على هذا النحو:

```
fplot('2+3*x',[0 1])
```



لاحظ كيف تعمل هذه الدالة؛ حيث يجب أن تكتب بين علامتي التنصيص ما يظهر في الدالة المراد رسمها بعد علامة(y=2+3x)، تعقبه فاصلة نضع بعدها بين قوسين معقوفين [] المدى الذي تختاره للمتغير المستقل **x** .

تنبه إلى أن الرسمين السابقين يرسمان الدالة نفسها، والفرق بينهما أن المحور الرأسي في الرسم الثاني يبدأ من ٢ بدلا من ٠

أنواع الدوال:

الدوال غير الخطية:

الدوال غير الخطية أنواع، وسنركز على دراسة الدوال التربيعية والأسية واللوغاريتمية؛ ويلاحظ على الدوال غير الخطية عموما أن ميلها متغير (يتغير بتغير قيمة **x**)، أما الدالة الخطية فميلها ثابت دائما .

رسم الدالة غير الخطية

بخلاف الدالة الخطية يتطلب رسم الدالة غير الخطية على مجموعة كبيرة من الأزواج المرتبة، وليس زوجين فقط.

الدالة التربيعية

تمثل الدالة التربيعية جبريا في صورة معادلة من الدرجة الثانية

$$y = a + bx + c\,x^2$$

وبيانيا في صورة منحنى محدب (له نهاية كبرى) أو مقعر (له نهاية صغرى). ومن أهم خواص الدالة التربيعية ما يلي:

١ – إذا كانت **c=0** فإن الدالة التربيعية تصبح خطية.

٢ – تتقاطع الدالة التربيعية مع المحور الرأسي عندما تكون قيمة **y** مساوية لقيمة **a** .

٣ – من أهم معلمات الدالة التربيعية المعلمة **c** . فإذا كانت **c>0** فإن الدالة تكون مقعرة (أي تكون في البداية متنازلة ثم تصل الدالة إلى نهايتها الصغرى، ثم تتزايد بعد ذلك)،

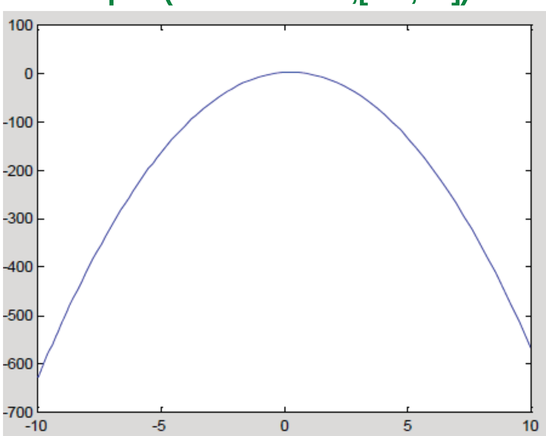
وإذا كانت **c<0** فإن الدالة تكون محدبة (أي تكون في البداية متزايدة ثم تصل الدالة إلى نهايتها الكبرى، ثم تناقص بعد ذلك)

الدالة التربيعية

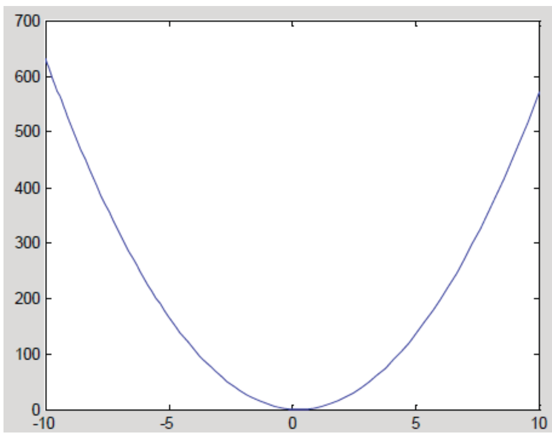
يمكن رسم الدالة التربيعية باستخدام الطريقتين السابقتين. وسوف نعرض هنا مثالا لدالتين باستخدام الطريقة الثانية دالة (**fplot**) لسهولتها.

$$y = 2 + 3\,x - 6\,x^2$$
$$y = 2 - 3\,x + 6x^2$$

fplot('2+3*x-6*x^2',[-10,10])



fplot('2-3*x+6*x^2',[-10,10])



ونلاحظ أن الدالة الأولى محدبة (لأن معامل x^2 سالب)، وأن الدالة الثانية مقعرة (لأن معامل x^2 موجب).

الدالة الأسية:

في الدالة الأسية، يكون المتغير المستقل x في الأس $y = a^x$، بشرط أن تكون قيمة الأساس a أكبر من الصفر، وغير مساوية للواحد صحيح (a>0 , a≠1)

ومن أهم خواص الدالة الأسية:

١ – تقطع الدالة الأسية المحور الرأسي عند y=1 .

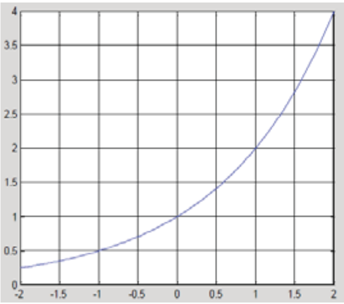
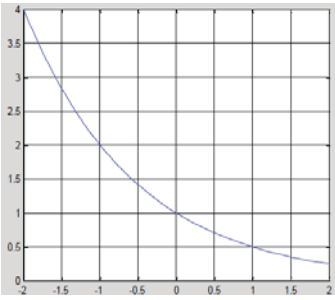
٢ – الدالة الأسية لا تتقاطع مع المحور الأفقي.

٣ – ميل الدالة الأسية موجب ومتزايد إذا كانت a>1، وسالب ومتناقص إذا كانت a<1 .

الدالة الأسية الطبيعية:

الدالة الأسية الطبيعية هي الدالة الأسية التي يكون أساسها العدد الطبيعي e وتكتب حينئذ $y = a^x$

سنورد هنا مثالين لرسم دالتين أسيتين؛ واحدة أساسها أكبر من واحد، والأخرى أساسها أقل من واحد.

```
fplot('2^x',[-2,2])
grid
```

```
fplot('(1/2)^x',[-2,2])
grid
```

ويلحظ أن الدالة الأولى متزايدة أما الثانية فمتناقصة، ولكن كلتا الدالتين تقطع المحور الرأسي عند y=1 .

لاحظ كذلك أننا استخدمنا الأمر grid بهدف تخطيط الرسم ومن ثم توضيح نقطة تقاطع الدالة مع المحور الرأسي.

الدالة اللوغاريتمية:

الدالة اللوغاريتمية هي عكس الدالة الأسية، وفيها يكون المتغير المستقل x هو العدد المطلوب إيجاد لوغاريتمه؛ أي $y = \log_a x$، بشرط أن تكون قيمة الثابت a أكبر من الصفر، وغير مساوية للواحد صحيح (a>0 , a≠1)

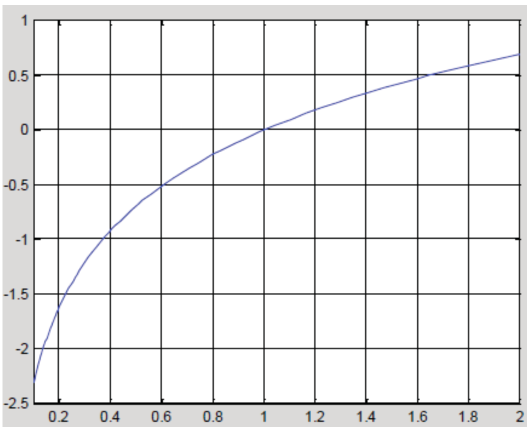
ومن أهم خواص الدالة اللوغاريتمية:

١ – تقطع الدالة اللوغاريتمية المحور الأفقي عند x=1 .

٢ – الدالة اللوغاريتمية لا تقطع المحور الرأسي.

٣ – ميل الدالة اللوغاريتمية موجب ومتناقص إذا كانت a>1، وسالب ومتناقص إذا كانت a<1

يستخدم العدد الطبيعي e كأساس للدالة الأسية وتكتب الدالة اللوغاريتمية حينئذ:
y = ln x



سنورد هنا مثالين لرسم دالتين لوغاريتمتين؛ إحداهما أساسها أكبر من واحد، والأخرى أساسها أقل من واحد؛ أما الدالة الأولى فيمكن رسمها مباشرة باستخدام أي من الدالتين log أو log10

```
fplot('log(x)',[0.1,2])
grid
```

الدالة اللوغاريتمية:

أما الدالة الثانية فلا يوجد دالة مباشرة تمكن من رسمها فنضطر للتحايل باستخدام الحيلة التالية: نعلم أن العلاقة الممثلة بـ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{log}_{\frac{1}{2}}x$

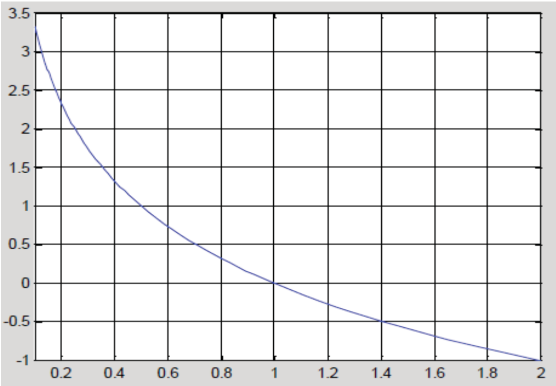
يمكن التعبير عنها بالصيغة الأسية على النحو التالي $x = (\frac{1}{2})^y$ بأخذ لوغاريتم الطرفين بالنسبة لأي أساس نحصل على:

$$\boldsymbol{y}\, log\frac{1}{2} = logx$$

وعليه، يمكن التعبير عن العلاقة الأصلية بهذه الدالة:

$$\boldsymbol{y} = \frac{logx}{log\frac{1}{2}}$$

```
fplot('log(x)/log(1/2)',[0.1,2])
grid
```



لاحظ أننا حددنا مدى المتغير **x** بأن يكون موجبا لأن الدالة اللوغاريتمية لا تقطع المحور الرأسي. ولاحظ كذلك أن الدالة الأولى متزايدة، في حين أن الثانية متناقصة ولكنهما تتفقان بأنهما تقطعان المحور الأفقي عند **x=1**