كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : امثليات عددية

المحاضرة : السابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

حل مسائل الأمثليات التالية:

$$\min f(x) = xy^2 + x^3y - xy \quad (1)$$

الحل: أولاً نوجد ∇f:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^2 + 3x^2y - y \\ 2xy + x^3 - x \end{bmatrix}$$

نحل $\nabla f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} y^2 + 3x^2y - y = 0 \\ 2xy + x^3 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y + 3x^2 - 1) = 0 \quad (I) \\ x(2y + x^2 - 1) = 0 \quad (II) \end{cases}$$

الحالة الأولى: $y = 0$ من (II) نجد:

$$x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \text{إما } x = 0 \text{ أو } x = \pm 1$$

$$M_1(0,0) \; , \; M_2(1,0) \; , \; M_3(-1,0)$$

الحالة الثانية: $x = 0$ من (I) نجد:

$$y(y - 1) = 0 \Rightarrow \text{إما } y = 0 \text{ أو } y = 1$$

$$M_4(0,1)$$

الحالة الثالثة: من I : $y+3x^2-1=0$

$\Rightarrow [\, y = 1-3x^2 \,]$

نعوض في (II)

$x(2-6x^2+x^2-1)=0$

حالة $x=0$ تم مناقشتها سابقاً

حالة: $-5x^2+1=0$

$\Rightarrow x^2=\frac{1}{5} \Rightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt{5}}$

وبالتالي $y=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

$M_6\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{5}\right)$ ، $M_5\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{5}\right)$

الحالة الرابعة: من (II) : $2y+x^2-1=0$

$\Rightarrow [\, x^2 = 1-2y \,]$

نعوض في (I)

$y(y+3-6y-1)=0$

حالة $y=0$ تم مناقشتها سابقاً

حالة $-5y+2=0 \Leftarrow y=\frac{2}{5}$

إذاً $x=\mp\frac{1}{\sqrt{5}}$

وهي نقاط تم إيجادها سابقاً

ثانياً نجد مصفوفة هيسان:

$$F(X)=\begin{bmatrix} 6xy & 2y+3x^2-1 \\ 2y+3x^2-1 & 2x \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$F(X)\big|_{M_1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = 0 \qquad \Delta_2 = -1 \neq 0$$

$F(X)\big|_{M_1}$ ليست معرفة موجبا"

$$F(X)\big|_{M_2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = 0 \qquad \Delta_2 = -4 \neq 0$$

$F(X)\big|_{M_2}$ ليست معرفة موجبا"

$$F(X)\big|_{M_3} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = 0 \qquad \Delta_2 = -4 \neq 0$$

$F(X)\big|_{M_3}$ ليست معرفة موجبا"

$$F(X)\big|_{M_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = 0 \neq 0 \qquad \Delta_2 = -1 < 0$$

$F(X)\big|_{M_4}$ ليست معرفة موجبا"

$$F(X)\big|_{M_5} = \begin{bmatrix} \frac{-12}{5\sqrt{5}} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = \frac{-12}{5\sqrt{5}} < 0 \qquad \Delta_2 = \frac{20}{25}$$

$F(X)\big|_{M_5}$ ليست معرفة موجبا"

$$F(X)\big|_{M_6} = \begin{bmatrix} \frac{12}{\sqrt{5}} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = \frac{12}{\sqrt{5}} > 0$$

وبالتالي $\Delta_2 = \frac{24}{5} - \frac{4}{25} = \frac{116}{25} > 0$ $F(X)\big|_{M_6}$ معرفة موجبا"

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f(x,y)$ الدالة عندها تبلغ نقطة $M_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{5}\right)$ هي نقطة

قيمة صغرى محلياً

$$\min f(x,y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{5}\right) = \frac{-4}{25\sqrt{5}}$$

ملاحظة:

نقول عن شكل كمي XQX^T حيث $Q = Q^T$ إنه معرف سالباً إذا كانت الصفائح الكيتية الأولية لصفوفة المتناظرة Q متناوبة بالإشارة بدءاً من $\Delta_1 < 0$ أي الصفائح الكيتية الأولية ذات الرتب الفردية سالبة والصفائح الكيتية الأولية ذات الرتب الزوجية موجبة

$\Delta_1 < 0$ ، $\Delta_2 > 0$ ، $\Delta_3 < 0$ ...

علماً أن $\Delta_1 = q_{11}$ و $\Delta_2 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$

$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{} \end{bmatrix}$

... $\Delta_{n-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{(n-1)1} & & q_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$ $\Delta_n = \det Q$

* كل مسألة $\max_{X \in \mathbb{R}^n} f(X)$:

أولاً: نجد النقط الحرجة بحل $\nabla f = 0$

ثانياً: X^* نقطة نعطي جيدة ظاهية عظمى محلياً

Strict Local Maximum

إذا كانت $f(X^*) < 0$ أي صفوفة هيسيان عند X^* معرفة سالباً

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بالعودة إلى التمرين السابق: $M_5\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{5}\right)$

$$F(X)\Big|_{M_5} = \begin{bmatrix} \frac{-12}{5\sqrt{5}} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = \frac{-12}{5\sqrt{5}} < 0$

$\Delta_2 = \frac{24}{25} - \frac{4}{25} = \frac{20}{25} > 0$

بالتالي M_5 نقطة تبلغ عندها الدالة $f(x,y)$ قيمة حاصة عظمى محلياً وتساوي

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{5}\right) = \frac{-4}{25\sqrt{5}} - \frac{2}{25\sqrt{5}} - \frac{10}{25\sqrt{5}} = \frac{-16}{25\sqrt{5}}$$

ملاحظة: إن المناقشة التحليلية السابقة تعطي القيم الصغرى محلياً والقيم الكبرى محلياً لذلك حتى نحل مسألة البحث عن $\min f(x)$ ، $\max f(x)$ $x \in \mathbb{R}^n$ يجب مناقشة كل النقاط الحرجة

لمحة عن الطريقة العامة لإيجاد القيم الأمثلية لدالة هدف n متغير و m معادلة قيد باستخدام مضاريب لاغرانج:

$$\min / \max_{X \in \mathbb{R}^n} f(X)$$

$$s.t \quad h_j(X) = 0 \qquad 1 \le j \le m$$

(1) نعرف مضاريب لاغرانج $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ونشكل الدالة لاغرانج

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(X) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j(X)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② نجد النقط الحرجة لدالة لاغرانج كل حلة المعادلات: $\nabla L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m)=0$

③ نحدد فيما اذا كانت النقطة الحرجة الناتجة عن الخطوة (2) هي نقطة عظمى محلياً أو نقطة صغرى محلياً أو نقطة سرجية وذلك باستخدام الشرط الكافي من المرتبة الثانية والذي يتطلب ايجاد مصفوفة هيسيان المحدودة (المحيطة) المعرفة بالشكل التالي

$$HL=\begin{bmatrix} 0 & \nabla h \\ \nabla h & L_{x_i x_j} \end{bmatrix}$$

نعرف لصغرى مصفوفة هيسيان المحدودة HL الكيفي الواقع من المرتبة n ويرمز له $|HL_i|$ بأنه محدد المصفوفة الجزئية الناتجة عن أخذ أول $m+i$ سطر أول $m+i$ عمود

(2) اذا كانت $X^*=(x_1^*,\dots,x_n^*)$ نقطة حرجة من الخطوة

عندئذٍ:

تكملة بالمحاضرة القادمة

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z