كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : امثليات عددية

المحاضرة : السادسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

الشكل التربيعي:

يعرف الشكل التربيعي كالتالي:

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = X^T Q X$$

حيث Q هي مصفوفة مربعة من القياس $n \times n$

ملاحظة:

يمكننا ان نفترض دوماً بأن Q هي مصفوفة متناظرة $Q = Q^T$ لأنها في حال كانت خلاف ذلك نأخذ المصفوفة: $Q_0 = \frac{1}{2}(Q + Q^T)$ ويمكن اثبات ان $X^T Q X = X^T Q_0 X$ لكل $X \in \mathbb{R}^n$

تعريف:

1. الشكل التربيعي $X^T Q X$ يعرف موجباً اذا كان $X^T Q X > 0$ لكل $X \in \mathbb{R}^n$ غير صفري

$(1\times n)(n\times n)(n\times 1) = 1\times 1$ عدد
$(1\times n) \times (n\times 1) = 1\times 1$ عدد

2. $X^T Q X$ يعرف موجباً اذا كان $X^T Q X \geq 0$ لكل $X \in \mathbb{R}^n$ غير صفري
3. $X^T Q X$ يعرف سالباً اذا كان $X^T Q X < 0$ لكل $X \in \mathbb{R}^n$ غير صفري

٤) $X^T QX$ شبه معرف سالباً

إذا كان $X^T QX \leq 0$ لكل $X \in \mathbb{R}^n$ غير صفري

صغير مصفوفة مربعة: Square Matrix Minor

هو محدد المصفوفة الناتجة عند حذف عدد من الأسطر وعدد من الأعمدة يساوي عدد الأسطر المحذوفة.

الصغائر الرئيسية لمصفوفة مربعة Q: Principal Minors

هي det Q (محدد Q) بالإضافة إلى محدد كل مصفوفة ناتجة عند اكذف المتتابع للسطر مع العمود من المصفوفة Q

الصغائر الرئيسية الرائدة: leading principal Minors

هي det Q بالإضافة إلى محددات المصفوفات التي نحصل عليها باكذف المتتابع للسطر الأخير والعمود الأخير

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = q_{11} \qquad \Delta_2 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \qquad \cdots \qquad \Delta_n = |Q|$$

تعريف:

نقول عن مصفوفة مربعة متناظرة أنها معرفة موجباً، معرفة سالباً، شبه معرفة موجباً، شبه معرفة سالباً" إذا كان الشكل التربيعي الموافق لها يتمتع بالخواص حذره. وبضلع: $Q>0$ ، $Q<0$ ، $Q\geq 0$ ، $Q\leq 0$ على الترتيب

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

معيار سيلفستر:

$Q = Q^T$ ، $X^T Q X$ معرف موجباً إذا وفقط إذا كانت الصفائح الرئيسية الرائدة كلها موجبة تماماً.

ملاحظة:

$Q = Q^T$ ، $X^T Q X$ شبه معرفة موجباً إذا كانت الصفائح الرئيسية غير سالبة.

معيار آخر يعتمد على القيم الذاتية:

(★) $Q = Q^T$ ، Q معرفة موجباً $\Leftrightarrow$ القيم الذاتية لـ Q موجبة تماماً

(★) $Q = Q^T$ ، Q شبه معرفة موجباً $\Leftrightarrow$ القيم الذاتية لـ Q غير سالبة

ملاحظة:

Q معرفة سالباً $\Leftrightarrow$ $-Q$ معرفة موجباً

Q شبه معرفة سالباً $\Leftrightarrow$ $-Q$ شبه معرفة موجباً

ملاحظة:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ، $X^* \in \mathbb{R}^n$

$f(X^*)$ قيمة عظمى محلياً لـ f $\Leftrightarrow$ $-f(X^*)$ قيمة صغرى محلياً لـ $-f$

تمارين

① حل الشكل التربيعي $X^T \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X$ معرف موجباً أم معرف سالباً أم شبه معرف موجباً أو شبه معرف سالباً

② $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ بين انه على الرغم من كون الصفائح الرئيسية الرائدة لـ A كلها غير سالبة إلا ان A ليست شبه معرفة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

③ ليكن لدينا الشكل التربيعي

$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_2 + 2\varepsilon x_1x_2 + 4x_1$

عين قيم ε حتى يكون الشكل التربيعي السابق معرف موجباً"

نناقش الآن مسألة الأمثليات من النمط:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

[FONC] الشرط اللازم من المرتبة الأولى:

$f(x^*)$ قيمة صغرى محلياً $\Leftarrow \nabla f(x^*) = 0$

[SOSC] الشرط اللازم والكافي من المرتبة الثانية:

① $f(x^*)$ قيمة صغرى محلياً $\Leftarrow \nabla f(x^*)=0$ ومصفوفة حسيانه $F(x^*)\geq 0$ شبه معرفة موجبة

② $\nabla f(x^*)=0$ ، $F(x^*)>0$ مصفوفة حسيان معرفة موجباً $\Leftarrow f(x^*)$ قيمة صغرى محلياً

ملاحظة:

لدراسة مسألة الأمثليات $\max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$ نؤول الدراسة إلى $\min_{x\in\mathbb{R}^n} -f(x)$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z