كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي٢

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مبرهنة:

لتكن M مجموعة جزئية غير خالية في فضاء هلبرت H فإن الشرط اللازم والكافي كي تكون $\text{Span } M$ مجموعة كثيفة في H هو أن يكون $M^{\perp} = \{0\}$

مثال

ليكن $H = \mathbb{R}^3$ ، $M = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ أثبت أن $M^{\perp} = \{(0,0,a_3) : a_3 \in \mathbb{R}\}$

الحل:

نفرض $S = \{(0,0,a_3) ; a_3 \in \mathbb{R}\}$ ، لنثبت أن $S = M^{\perp}$

* $\forall y \in S \Rightarrow y = (0,0,a_3) ; a_3 \in \mathbb{R}$

$\forall x \in M ; x = (x_1, x_2, 0)$

$\Rightarrow \langle y, x \rangle = \langle (0,0,a_3), (x_1, x_2, 0) \rangle = 0x_1 + 0x_2 + a_3 0 = 0$

$\Rightarrow y \in M^{\perp} \Rightarrow [S \subseteq M^{\perp}]$

* $\forall Z \in M^{\perp}$

، لنفرض جدلاً أن $Z \notin S$ عندئذٍ يوجد

$Z = (a_1, a_2, a_3) ; a_1 \neq 0$

$M \ni x = (x_1, 0, 0)$ ، ليكن:

$x_1 \neq 0$

$\Rightarrow \langle Z, x \rangle = a_1 x_1 + a_2 \cdot + a_3 \cdot 0 \neq 0$

$Z \notin M^{\perp}$ ، هذا يناقض الفرض إذاً $\Leftarrow$

$Z \in S \Leftarrow [M^{\perp} \subseteq S]$

من علاقتي الاحواء نجد

$M^{\perp} = S = \{(0, 0, a_3) ; a_3 \in \mathbb{R}\}$

المجموعات والمتتاليات المتقاربة المنتظمة:

* تعريف المجموعة المتقاربة:

المجموعة المتقاربة M في فضاء جداء داخلي X هي مجموعة جزئية M من X عناصرها متقاربة مثنى مثنى

* تعريف المجموعة المتقاربة المنتظمة:

المجموعة المتقاربة المنتظمة M في X هي مجموعة متقاربة في X تطبع كل من عناصرها بياضي 1

بمعنى آخر:

تكون المجموعة M في X متقاربة منتظمة إذا تحقق الشرط:

$$\forall x, y \in M ; \langle x, y \rangle = \begin{cases} 0 & ; x \neq y \\ 1 & ; x = y \end{cases}$$

* ملاحظة:

إذا كانت M مجموعة متقاربة أو متقاربة منتظمة، وكانت M معدودة فيمكننا أن نرتبها في متتالية (x_n) نرمز لها متتالية متقاربة منتظمة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بالتالي (x_n) متتالية متعامدة منظمة إذا كان

$$\langle x_n, x_m \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad n \neq m \\ 1 & ; \quad n = m \end{cases}$$

ملاحظة :

كل متتالية هي محزومة ولكن العكس ليس صحيح بالعموم

نظرية الاستقلال الخطي :

المجموعة المتعامدة المنظمة مستقلة خطياً

الإثبات :

لتكن $M = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ متعامدة منظمة ، لنثبت بأنها مستقلة خطياً

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$$

ولنثبت أن $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

$$0 = \langle 0, e_j \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i , e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_j \rangle = \alpha_j \langle e_j, e_j \rangle = \alpha_j$$

وهذا يثبت الاستقلال الخطي لكل مجموعة متعامدة منظمة بشكل عام ويقتضي هذا أيضاً الاستقلال الخطي في حال كون المجموعة المتعامدة المنظمة المعطاة غير منتهية.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال # هام

ليكن X فضاء جداء داخلي مؤلف من كل الدوال المستمرة على المجال $[0, 2\pi]$ والمزود بالجداء الداخلي

$$\langle x, y \rangle = \int_0^{2\pi} x(t)\, y(t)\, dt$$

اثبت ان (e_n) متتالية متعامدة منظمة حيث

$$e_n(t) = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \quad ; \quad n \geq 1$$

$n \neq m$: الحل

$$\langle e_n, e_m \rangle = \left\langle \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos mt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nt \cdot \cos mt \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n+m)t + \cos(n-m)t \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{n+m} \sin(n+m)t + \frac{1}{n-m} \sin(n-m)t \right]_0^{2\pi} = 0$$

$n = m$

$$\langle e_n, e_m \rangle = \left\langle \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 nt \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2nt)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[t + \frac{1}{2n} \sin 2nt \right]_0^{2\pi} = 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 0 & ; \ n \neq m \\ 1 & ; \ n = m \end{cases}$$

ومنه (e_n) متتالية متعامدة منظمة

* ملاحظة:

اذا كانت $M = \{e_1, e_2, \dots\}$ متتالية متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X وكانت $x \in \text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ حيث n عدد طبيعي

استنادا إلى تعريف Span نجد أن:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$$

فإن:

$$\langle x, e_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j \langle e_j, e_j \rangle = \alpha_j$$

* تعريف:

ليكن $e_1, e_2, \dots$ متتالية متعامدة منظمة في فضاء جليرت H عندئذ من اجل كل $x \in M$ نسمي العدد $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$ عوامل فوريه للعنصر x بالنسبة للمجلة المتعامدة المنظمة، ونسمي العدد $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ متسلسلة فوريه للعنصر x في H بالنسبة للمتتالية $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة (متباينة بسل):

اذا كانت $(e_k)_{k\geq 1}$ متتالية متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X، فإننا نجد أياً كان $x\in X$ فإن

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

حيث $\langle x, e_k\rangle$ معاملات فوريه للعنصر x بالنسبة للمتتالية المتعامدة المنظمة $\{e_k\}_k$

سؤال:

كيف يمكننا تحويل متتالية مستقلة خطياً $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ إلى متتالية متعامدة منظمة $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

الجواب:

نستخدم طريقة غرام ـ شميت

مبرهنة:

يوجد لأي فضاء جداء داخلي X فضاء هلبرت H وايزومورفيزم T من X على فضاء جزئي كثيف لها في H

[الفضاء H وحيد إذا ما استثنينا الإيزومورفيزمات]

تعريف:

المجموعة الكلية أو المجموعة الأساسية في فضاء منظم X هي مجموعة جزئية M في X بحيث $\operatorname{Span} M$ كثيفة في X

ملاحظة:

① المجموعة (المتتالية) المتعامدة المنظمة في فضاء جداء داخلي X والكلية في X تدعى المجموعة (المتتالية) المتعامدة المنظمة الكلية في X

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② M كلية في X $\Leftrightarrow$ $\overline{\text{Span}M} = X$

③ يوجد في كل فضاء هلبرت $H \neq \{0\}$ مجموعة متعامدة منظمة كلية

مبرهنة:

M مجموعة جزئية في فضاء جداء داخلي X فإن:

① إذا كانت M كلية في X فلا يوجد متجه غير صفري x في X بحيث يكون x عمودياً على كل عنصر من M وبالعكس

$$[\ x \in X\ ;\ x \perp M \Rightarrow x = 0\ ] \quad (\star)$$

② إذا كان X تاماً فإن الشرط $(\star)$ كافٍ كي تكون M كلية

البرهان:

① ليكن X فضاء جداء داخلي عندئذٍ يوجد لـ X فضاء هلبرت H وايزومورفيزم $T: X \to W \subset H$ بحيث W كثيف في H $\Leftarrow$ X كثيف في H

وبما أن M كلية $\Leftarrow$ $\overline{\text{Span}M}$ كثيفة في X عندئذٍ $\overline{\text{Span}M}$ كثيفة في H $\Leftarrow$ $M^{\perp} = \{0\}$ $\Leftarrow$ $x \perp M$

$\Leftarrow$ $x = 0$

② X فضاء جداء داخلي تام

$\Leftarrow$ X فضاء هلبرت ولدينا

$$\forall x \in X\ ;\ x \perp M \Rightarrow x = 0$$

أي $M^{\perp} = \{0\}$ $\Leftarrow$ $\overline{\text{Span}M} = X$ $\Leftarrow$ M كلية في X

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* ملاحظة:

H فضاء هلبرت عندئذٍ:

M كلية في H $\Leftrightarrow$ $x \in H : x \perp M \Rightarrow x = 0$

الإثبات:

[$\Leftarrow$] M كلية في H $\Leftarrow$ $\overline{\text{Span}\, M} = H$

$\Leftarrow$ $M^{\perp} = \{0\}$ $\Leftarrow$ $\forall x \in H : x \perp M \Rightarrow x = 0$

[$\Rightarrow$] $x \in H : x \perp M \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow M^{\perp} = \{0\}$

$\Rightarrow \overline{\text{Span}\, M} = H \Rightarrow$ M كلية في H

* مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة المتعامدة المنظمة M كلية في H هلبرت هو أن تتحقق علاقة بارسيفال

$$\forall x \in H ; \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2$$

* مبرهنة:

H فضاء هلبرت:

① إذا كان H فصول فإن كل مجموعة متعامدة منظمة في H عدودة

② إذا كان H متتالية متعامدة منظمة وكلية في H فإن H فصول

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T(u) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \sqrt{2}y \,,\, \sqrt{2}x + y)$$

حيث $u(x,y)$

والمطلوب:

① اثبت ان المجموعة $A = \{a_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), a_2 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ مجموعة متعامدة منظمة في $\mathbb{R}^2$

② اثبت ان $\{T(a_1), T(a_2)\}$ مجموعة متعامدة منظمة في $\mathbb{R}^2$

الحل: ①

$$\langle a_1, a_1 \rangle = \langle (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\langle a_2, a_2 \rangle = \langle (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \langle (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\langle a_2, a_1 \rangle = \langle (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle a_1, a_2 \rangle = \begin{cases} 1 & ; 1 = 2 \\ 0 & ; 1 \neq 2 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

A مجموعة متقاربة منظمة في $\mathbb{R}^2$ ⇐

$$Ta_1 = T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(1-\sqrt{2}, \sqrt{2}+1\right)$$

$$Ta_2 = T\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-1-\sqrt{2}, \sqrt{2}+1\right)$$

نعم المقرض تبين ان :

$$\langle Ta_1, Ta_1 \rangle = 1$$

$$\langle Ta_2, Ta_2 \rangle = 1$$

$$\langle Ta_1, Ta_2 \rangle = 0$$

$\{T(a_1), T(a_2)\}$ ⇐ مجموعة متقاربة منظمة في $\mathbb{R}^2$

التقارب القوي و التقارب الضعيف :

(*) تعريف التقارب القوي :

يُقال عن المتتالية (x_n) في فضاء منظم X بأنها متقاربة بقوة (أو متقاربة في النظيم) اذا وجد x من X بحيث يكون $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ونعبر عن هذا بالشكل: $x_n \xrightarrow{s} x$

نسمي x النهاية القوية للمتتالية (x_n) ونقول بأن (x_n) تتقارب بقوة من x

* تعريف التقارب الضعيف:

يقال عن متتالية (x_n) في فضاء منظم X أنها متقاربة بضعف إذا وجد x من X بحيث $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ $\forall f \in X'$

[X' فضاء الدالبات الخطية المحدودة على X]

ونكتب هذا بالشكل $x_n \xrightarrow{w} x$

ونسمي x النهاية الضعيفة لـ (x_n) ونقول بأن (x_n) تتقارب بضعف من x

ملاحظة:

1. التقارب الضعيف تم تعريفه باستخدام الدالبات الخطية المحدودة على X
2. التقارب الضعيف يعني تقارب المتتاليات العددية $a_n = f(x_n)$ أياً كان $f \in X'$
3. التقارب الضعيف له تطبيقات عدة في التحليل الرياضي [في حساب التغيرات وفي النظرية العامة للمعادلات التفاضلية]

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة