كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي٢

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

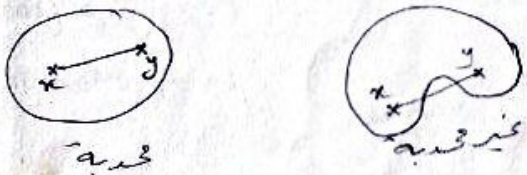
تعريف: تعرّف القطعة المستقيمة الواصلة بين عنصرين x و y من فضاء متجهي X بأنها مجموعة كل العناصر Z من X من الشكل

$$Z = \alpha x + (1-\alpha) y$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad ; \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

المجموعة المحدبة:

يُقال عن مجموعة جزئية M من X أنها محدبة إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين x و y في M محتواة في M.



ملاحظة:

* كل فضاء جزئي Y من X محدب «لأنه مهما كانت x و y من Y فإن $Z = \alpha x + (1-\alpha) y \in Y$ لأن Y جزئي»
* تقاطع مجموعات محدبة هو مجموعة محدبة.

تعريف: تُعرّف المسافة بين عنصر x من فضاء متجهي X ومجموعة جزئية غير خالية M في X بأنها

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} d(x, \tilde{y})$$

وفي الفضاء المنظم تعرّف بالشكل

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \| x - \tilde{y} \|$$

السؤال: هل يوجد عنصر $y \in M$ بحيث أن

$$\delta = \| x - y \|$$

وإذا وجد مثل هذا العنصر، فهل هو وحيد؟

مبرهنة (المتجه الأصغر):

ليكن X فضاء جداء داخلي ولتكن M مجموعة جزئية غير خالية ومحدبة وتامة (بالنسبة للمتراكم المحدد بالجداء الداخلي)

عندئذ يوجد لكل عنصر x من X عنصر وحيد y من M بحيث يكون

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \| x - \tilde{y} \| = \| x - y \|$$

مبرهنة (التعامد):

لنفترض في مبرهنة المتجه الأصغر M فضاء جزئي تام وأن x نقطة مشتبة في X عندئذ يكون $Z = x - y$ عمودياً على M.

المجموع المباشر:

يُقال عن فضاء متجهي X أنه مجموع مباشر لفضاءين جزئيين Y و Z من X ونكتب

$$X = Y \oplus Z$$

إذا كان لكل عنصر x من X تمثيل وحيد بالشكل

$$x = y + z$$

بحيث $y \in Y$ و $z \in Z$

عندئذ نسمي Z المتمم الجبري لـ Y في X وبالعكس.

كما يقال عن Y و Z أنهما زوج متمم من الفضاءات الجزئية من X.

* من المهم هنا أن نكتب فضاء هلبرت على شكل مجموع مباشر لفضاءين جزئيين منه وسيكون المجموع المباشر لفضاء الجزئي المغلق Y و المتمم العامد المعرف بالشكل

$$Y^{\perp} = \{ z \in H \; ; \; z \perp Y \}$$
$$= \{ z \in H \; ; \; \langle z, y \rangle = 0 \quad \forall y \in Y \}$$

مبرهنة المجموع المباشر:

ليكن Y فضاء جزئي مغلق في فضاء هلبرت H، عندئذ يكون

$$H = Y \oplus Z \quad ; \quad Z = Y^{\perp}$$

مؤثرات الإسقاط:

ليكن Y فضاء جزئي مغلق من فضاء هلبرت H و Z فضاء جزئي من H بحيث

$$H = Y \oplus Z$$

وهذا يعني أن

$$\forall x \in H : x = y + z$$

حيث $y \in Y$ & $z \in Z$

نسمي y مسقط x على الفضاء الجزئي Y

* نسمي المؤثر المعرف على H الذي يقابل كل $x \in H$ مسقطه على الفضاء الجزئي Y مؤثر الإسقاط على Y ونرمز له بالرمز P أو P_x

أي أن $\forall x \in H \quad P_x = y$

مبرهنة:

مؤثر الإسقاط هو مؤثر خطي ومحدود ونظيمه يساوي 1.

مبرهنة: مؤثر الإسقاط مرادف لذاته أي

$$P^2 = P$$

الإثبات:

$$\forall x \in H \Rightarrow P^2 x = P P x$$
$$= P y = y = P x$$

مسقط النقطة على الفضاء المحتواة فيه هي نفسها

$$\Rightarrow P^2 x = P x \quad \forall x \in H$$
$$\Rightarrow P^2 = P$$

مبرهنة: P مترافق ذاتياً أي $P^* = P$

الإثبات: $\forall h_1, h_2 \in H, z_1, z_2 \in Z$

$h_1 = y_1 + z_1 \; , \; h_2 = y_2 + z_2$

$$* \langle P h_1, h_2 \rangle = \langle y_1, h_2 \rangle$$
$$= \langle y_1, y_2 + z_2 \rangle$$
$$= \langle y_1, y_2 \rangle + \langle y_1, z_2 \rangle$$

y_1 و z_2 متعامدان

$$\Rightarrow \boxed{\langle P h_1, h_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle} \quad \text{---} (1)$$

$$* \langle h_1, P h_2 \rangle = \langle h_1, y_2 \rangle$$
$$= \langle y_1 + z_1, y_2 \rangle$$
$$= \langle y_1, y_2 \rangle + \langle z_1, y_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle h_1, P h_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle} \quad \text{---} (2)$$

من (1) و (2) نجد

$$\Rightarrow \langle P h_1, h_2 \rangle = \langle h_1, P h_2 \rangle$$

وجسب المؤثر المتراافق ذاتياً.

$\langle ph_1, h_2 \rangle = \langle h_1, p^* h_2 \rangle$

$p = p^*$ بالمقارنة نجد أن

ملاحظة: المؤثر $A: H \longrightarrow H$ يكون موجباً إذا كان

$\forall f \in H \quad \langle Af, f \rangle \geq 0$

ويكون موجب تماماً إذا كان

$\forall f \in H \quad \langle Af, f \rangle > 0$

مبرهنة: مؤثر إسقاط مؤثر موجب

الإثبات:

$\forall h \in H : \langle ph, h \rangle = \langle p^2 h, h \rangle$

$= \langle pph, h \rangle$ لأن p مؤثر مراوح

$= \langle ph, p^* h \rangle$ حسب تعريف المؤثر المرافق

$= \langle ph, ph \rangle$ لأن p مؤثر متراافق ذاتياً

$= \|ph\|^2 \geq 0$

تمرين: ليكن M مجموعة غير خالية في فضاء جداء داخلي X وبرهن أن

1) $M^\perp$ فضاء جزئي مغلق في X.

2) $M \subseteq M^{\perp\perp}$

الحل: لبرهن أن $\alpha x_1 + \beta x_2 \in M^\perp$

$\forall y \in M \quad ; \quad x_1, x_2 \in M^\perp$

$* \langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle =$

$= \langle \alpha x_1, y \rangle + \langle \beta x_2, y \rangle$

$= \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$

$= 0$ ($\langle x_1, y \rangle = 0$ لأن $x_1 \in M^\perp$، $\langle x_2, y \rangle = 0$ لأن $x_2 \in M^\perp$)

$\Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in M^\perp$

$\Leftarrow M^\perp$ فضاء جزئي خطي

* لبرهان أن $M^\perp$ مغلق أي لبرهان أن

$M^\perp = \overline{M^\perp}$

لدينا $M^\perp \subseteq \overline{M^\perp}$ محققة دوماً

$* \forall x \in \overline{M^\perp} \Rightarrow \exists z_n \in M^\perp$

$\Rightarrow \langle z_n, y \rangle = 0 \quad \forall y \in M$

بحيث $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ حسب تعريف المجموعة المغلقة

$\Rightarrow 0 = \lim_{n \to \infty} \langle z_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$

$\Rightarrow x \in M^\perp$

$\Rightarrow \overline{M^\perp} \subseteq M^\perp$

من علاقتي الاحتواء نجد أن

$M^\perp = \overline{M^\perp}$

$\Leftarrow M^\perp$ مغلقة.

$\forall x \in M \quad ; \quad x \perp y \quad \forall y \in M^\perp$ (2)

$\Downarrow$ حسب تعريف المعامد $M^\perp$

$x \perp M^\perp$

$\Rightarrow x \in M^{\perp\perp}$

وعليه $M \subseteq M^{\perp\perp}$

مبرهنة:

ليكن Y فضاء جزئي مغلق في فضاء هلبرت H فإن

$\boxed{Y = Y^{\perp\perp}}$