كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تبولوجيا ٢

المحاضرة : الاولى /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

مقدمة في نظرية المجموعات

رموز و اصطلاحات:

يرمز للمجموعة التي لا ينتمي إليها أي عنصر بالرمز $\emptyset$ و تدعى المجموعة الخالية.

يرمز لعدد عناصر المجموعة A بالرمز $|A| = card\ A$ و يدعى العدد الكاردينالي للمجموعة A.

يرمز لأسرة جميع المجموعات الجزئية التي يمكن تشكيلها من المجموعة X بالرمز $\mathcal{P}(X)$ و نكتب $\mathcal{P}(X) = \{A, A \subseteq X\}$.

ملاحظة:

إذا كان $|X| = n$ فإن $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$

إثبات:

إن عدد المجموعات الجزئية من X و التي كل منها يتألف من r عنصر حيث $0 \leq r \leq n$ يوافق عدد طرق اختيار r عنصر من n عنصر، أي هو: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!.(n-r)!}$ بالتالي العدد الكلي للمجموعات الجزئية هو: $\sum_{r=0}^{r=n}\binom{n}{r} = |\mathcal{P}(X)|$

نعلم أن $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^r b^{n-r}$ ، بوضع $a = b = 1$ نجد:

$(1+1)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}$ و منه $\sum_{r=0}^{r=n}\binom{n}{r} = |\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

ملاحظات:

1. نقول عن مجموعتين A, B إنهما متكافئتان في القدرة و نرمز لذلك $A \sim B$ إذا وفقط إذا وجد بينهما تقابل واحد لواحد (أي إذا وجد تطبيق غامر و متباين من إحدى المجموعتين في الأخرى.
2. نقول عن مجموعة A إنها منتهية إذا و فقط إذا كانت $A = \emptyset$ أو يوجد عدد طبيعي مثل n_0 بحيث يكون $A \sim \{1, 2, \dots \dots, n_0\}$.
3. نقول عن مجموعة A إنها قابلة للعد إذا وفقط إذا كانت $A \sim \mathbb{N}$.
4. نقول عن مجموعة A إنها قابلة للعد على الأكثر إذا و فقط إذا كانت منتهية أو قابلة للعد.
5. كل مجموعة غير منتهية تحوي مجموعة جزئية قابلة للعد.
6. الاجتماع القابل للعد لمجموعات قابلة للعد هو مجموعة قابلة للعد.

2.جبر المجموعات:

تعريف: تقاطع مجموعتين

نعرف تقاطع المجموعتين A, B بأنه مجموعة العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين و نكتب: $A \cap B = \{x, x \in A \wedge x \in B\}$

تعريف: اجتماع مجموعتين

نعرف اجتماع المجموعتين A, B بأنه مجموعة العناصر المشتركة و غير المشتركة بين هاتين المجموعتين و نكتب: $A \cup B = \{x, x \in A \vee x \in B\}$

تعريف : فرق مجموعتين

نعرف فرق المجموعة A عن المجموعة B بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي للمجموعة A و لا تنتمي للمجموعة B و نكتب $A \backslash B = \{x \in A \ \wedge x \notin B\}$

إذا كانت $A = X$ حيث X المجموعة الشاملة نحصل على متممة المجموعة B و يرمز لها $X \backslash B = B^c$

ملاحظة :

المتمم هو حالة خاصة من الفرق فالمتمم عملية فرق بين مجموعتين إحداهما محتواة في الأخرى بينما الفرق فلا يشترط أن إحدى المجموعتين محتواة في الأخرى.

تعريف:

لتكن X مجموعة ما، و A, B مجموعتين جزئيتين من X، نقول إن A, B مجموعتان منفصلتان إذا كانت $A \cap B = \emptyset$.

تعريف:

لتكن X مجموعة ما، و µ أسرة جزئية غير خالية من $\mathcal{P}(X) \backslash \{\emptyset\}$ ، تسمى µ تجزئة للمجموعة X إذا تحقق الشرطان الآتيان:

1. عناصر الأسرة µ مجموعات منفصلة مثنى مثنى.
2. $X = \bigcup_{A \in \mu} A$

بكلام آخر: إن عناصر الأسرة µ مجموعات منفصلة و اجتماعها يساوي X و كل عنصر من المجموعة X سينتمي إلى أحد عناصر الأسرة µ فقط.

قوانين جبر المجموعات

لتكن A,B,C مجموعات جزئية من المجموعة X، و لتكن $\{A_i, i\in I\}$ أسرة من المجموعات الجزئية من X عندئذٍ الخواص الآتية محققة:

1. **خواص العنصر $\emptyset$:** $A\cup\emptyset = A$ $\quad$ $A\cap\emptyset=\emptyset$
2. **خواص الجمود:** $A\cup A = A$ $\quad$ $A\cap A = A$
3. **خواص إضافية:** $A\cup A^c = X$ $\quad$ $A\cap A^c=\emptyset$

$A\cup X = X$ $\quad$ $A\cap X = A$ ، $\quad$ $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B = B \wedge A\cap B = A$

4. **الخواص التبديلية:** $A\cup B = B\cup A$ $\quad$ $A\cap B = B\cap A$
5. **خواص التجميع:** $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

6. **خواص التوزيع:**

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

ملاحظة: إذا كانت $I=\emptyset$ فإن:

$\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in\emptyset}A_i=\emptyset$ و $\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcap_{i\in\emptyset}A_i=X$

7. **خواص المتممات**

$A^c = X\backslash A$ ، $(A^c)^c = A$ و $A\subseteq B\Leftrightarrow X\backslash B\subseteq X\backslash A$

قانوني دومرغان:

$X\backslash(A\cup B)=(X\backslash A)\cap(X\backslash B)$ و بالتعميم $X\backslash(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcap_{i\in I}(X\backslash A_i)$

$X\backslash(A\cap B)=(X\backslash A)\cup(X\backslash B)$ و بالتعميم $X\backslash(\bigcap_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}(X\backslash A_i)$

8. **خواص الفرق**

$A\backslash B = A\cap(X\backslash B)=A\cap B^C$
$A\backslash(A\backslash B)=A\cap B$
$(A\backslash B)\cup B = A\cup B$
$(A\backslash B)\cup(A\cap B)=A$
$(A\backslash B)\cap(A\cap B)=\emptyset$
$B\subseteq A\Leftrightarrow(A\backslash B)\cup B = A$
$(A\backslash B)\cup C\supseteq(A\cup C)\backslash(B\cup C)$

$(A\backslash B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$
$(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$
$(A \cap B)\backslash C = (A\backslash C) \cap (B\backslash C)$
$A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$
$A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$

3. جبر التوابع:

تعريف:

لتكن X, Y مجموعتين غير خاليتين و f علاقة ما من X إلى Y، نسمي f تطبيق من X في Y إذا تحقق الشرطان الآتيان:

1. من أجل كل x من X فإن $f(x)$ يكون عنصراً من Y.
2. من أجل كل عنصرين x_1, x_2 من X، إذا كان $x_1 = x_2$ فإنَ $f(x_1) = f(x_2)$.

الشرط الأول يعني أن كل عنصر من X ستستقر صورته في Y ، و الشرط الثاني يعني ارتباط العنصر x بعنصر واحد فقط من Y.

تعريف: المساواة بين تطبيقين

يقال عن التطبيقين f, g إنهما متساويان و نكتب $f = g$ إذا تحقق الشرطان:

1. لكل من g و f نفس المنطلق X و نفس المستقر Y .
2. من أجل كل $x \in X$ يكون $f(x) = g(x)$.

<u>تطبيقات خاصة:</u>

1. ***تطبيق الاحتواء***

إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من X $(A \subset X)$ فإنه يوجد دوماً تطبيق $A \xrightarrow{i} X$ معرف بالشكل: $i(a) = a \,, \quad \forall a \in A$ و الذي نسميه تطبيق الاحتواء و هو تطبيق متباين دوماً.

2. ***التطبيق المطابق***

إذا كانت $A = X$ في تعريف تطبيق الاحتواء فإن التطبيق الناتج ندعوه التطبيق المطابق $X \xrightarrow{id} X$ و هو تطبيق تقابلي دوماً و يعرف بالمساواة: $id(x) = x \,, \quad \forall x \in X$.

3. ***التطبيق الثابت***

إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق بحيث أن جميع عناصر X لها نفس الصورة $b \in Y$ أي: $f(x) = b \,, \forall x \in X$ فإننا نقول عن التطبيق f إنه تطبيق ثابت.

الصورة المباشرة و الصورة العكسية:

ليكن $f: X \to Y$ تطبيقاً ما، و $\emptyset \neq A \subseteq X$ و $\emptyset \neq B \subseteq Y$

نسمي مجموعة صور عناصر A الصورة المباشرة للمجموعة A وفق f و نرمز لها $f(A)$:

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$

نسمي مجموعة العناصر من المنطلق و التي صورتها تنتمي للمجموعة B الصورة العكسية للمجموعة B وفق التطبيق f و نرمز لها $f^{-1}(B)$:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

ملاحظة:

1. عندما $A = X$ فإن $f(X)$ يرمز لها $Im(f)$ و تسمى صورة التطبيق f.
2. التطبيق f غامر $\Longleftrightarrow Im(f) = Y$.

خواص الصورة المباشرة و الصورة العكسية

ليكن $f: X \to Y$ تطبيقاً ما، و $A_1, A_2, A \subseteq X$ و $B, B_1, B_2 \subseteq Y$ عندئذٍ لدينا:

1. $f(\emptyset) = \emptyset, f(X) \subseteq Y$
2. $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$
3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

و بالتعميم: $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

4. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

إثبات:

$$A_1 \cap A_2 \subseteq A_1 \,\&\, A_1 \cap A_2 \subseteq A_2 \;\Longrightarrow f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \,\&\, f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_2)$$

و منه: $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

و بالتعميم $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

الاحتواء المعاكس غير محقق بصورة عامة.

5. f تطبيق متباين $\Longleftrightarrow$ $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ أياً كانت $A_1, A_2 \subseteq X$
6. f تطبيق غامر $\Longleftrightarrow$ $Y \backslash f(A) \subseteq f(X \backslash A)$ من أجل أي مجموعة A جزئية من X
7. ليكن $f: X \to Y$ تطبيقاً غامراً، عندئذٍ:

f تطبيق متباين $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{Y \backslash f(A) = f(X \backslash A)}$ من أجل أي مجموعة A جزئية من X.

مثال 1:

لتكن $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ و $Y=\{a,b,c,d,e,g\}$ و ليكن $f:X\to Y$ تطبيقاً معرفاً بالشكل: $f(1)=a\,,f(2)=b\,,f(3)=f(5)=d\,,f(4)=f(6)=c$

عندئذٍ بوضع $A=\{1,3,6\}$ نجد : $f(A)=\{a,c,d\}$ و $f(X\backslash A)=\{b,c,d\}$

و $Y\backslash f(A)=\{b,e,g\}$ و $f(X)=\{a,b,c,d\}$ و $f(X)\backslash f(A)=\{b\}$

منه إن:

$$f(X\backslash A)\neq Y\backslash f(A)\neq f(X)\backslash f(A)$$

بوضع $B=\{1,4,5\}$ نجد $f(B)=\{a,c,d\}$ نلاحظ أن

$f(A)\cap f(B)=\{a,c,d\}$ بينما $A\cap B=\{1\}$ و $f(A\cap B)=\{a\}$

إن: $f(A)\cap f(B)\nsubseteq f(A\cap B)$

خواص الصورة العكسية:

1. $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset, f^{-1}(Y)=X$
2. $B_1\subseteq B_2\Longrightarrow f^{-1}(B_1)\subseteq f^{-1}(B_2)$
3. $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$

و بالتعميم: $f^{-1}(\bigcup_{i\in I}B_i)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$

4. $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$

و بالتعميم $f^{-1}(\bigcap_{i\in I}B_i)\subseteq\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i)$.

5. $f^{-1}(Y\backslash B)=X\backslash f^{-1}(B)$

ملاحظات: ليكن $f:X\to Y$ تطبيقاً ما عندئذٍ:

1. من أجل أي مجموعة جزئية A من المنطلق يتحقق الاحتواء الآتي دوماً $A\subseteq f^{-1}(f(A))$ و عندما يكون f متبايناً فإن $A=f^{-1}(f(A))$.
2. من أجل أي مجموعة جزئية B من المستقر يتحقق الاحتواء الآتي دوماً $f(f^{-1}(B))\subseteq B$ و عندما يكون f غامراً فإن $f(f^{-1}(B))=B$.

مثال 2:

لتكن $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ و $Y=\{a,b,c,d,e,g\}$ و ليكن $f:Y\to X$ تطبيقاً معرفاً بالشكل: $f(a)=f(b)=f(c)=1$ و $f(d)=f(e)=2$ و $f(g)=3$

لنضع $A=\{a,b,c\}\,,B=\{a,b,d\}\,,G=\{1,4\}$ نجد:

$$f^{-1}(\{1,4\})=\{a,b,c\}\,,\qquad f(f^{-1}(\{1,4\}))=\{1\}\subseteq\{1,4\}$$

إذاً $f(f^{-1}(G))\subseteq G$

$f(B)=\{1,2\}\,,f^{-1}(f(B))=\{a,b,c,d,e\}$ نلاحظ أن $B\subseteq f^{-1}(f(B))$.