كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تبولوجيا ٢

المحاضرة : الرابعة /عملي/

تمارين (4)

التمرين الأول:

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً، و $\left(\mathbb{R},\tau_{|.|}\right)$ الفضاء التبولوجي العادي و كان $f:(X,\tau)\to\left(\mathbb{R},\tau_{|.|}\right)$ تابعاً معرفاً بالشكل:

$f(x)=\begin{cases}1\,;x\in A\\0\,;x\notin A\end{cases}\;;A\subset X$ ، و المطلوب: تحقق من صحة العبارة:

يكون التابع f مستمراً على X إذا و فقط إذا كانت المجموعة A مفتوحة و مغلقة في (X,τ) بنفس الوقت.

التمرين الثاني:

لتكن $X=\{1,2,3,4\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا: $\tau=\{X,\emptyset,\{1\},\{1,2\}\}$، و $Y=\{a,b,c\}$ مع التبولوجيا $\tau^{*}=\{Y,\emptyset,\{a\}\}$ و ليكن $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^{*})$ تابعاً معرفاً وفق: $f(1)=f(2)=a\,,f(3)=b,f(4)=c$، هل التابع f مستمر على X، مفتوح، مغلق، هل هو هومومرفيزم؟

التمرين الثالث:

تحقق من صحة او خطأ كل من العبارات الآتية:

1. كل تابع مفتوح هو تابع مغلق.
2. كل تابع مغلق هو تابع مفتوح.
3. إذا كان $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^{*})$ تابعاً ما بحيث أن (X,τ) فضاء قوي، عندئذٍ إن f تابع مفتوح أياً كان المستقر.
4. إذا كان $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^{*})$ تابعاً ما بحيث أن (Y,τ^{*}) فضاء ضعيف، عندئذٍ إن f تابع مفتوح أياً كان المنطلق.
5. إذا كان $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^{*})$ تابعاً ما بحيث أن (X,τ) فضاء قوي، عندئذٍ إن f تابع مستمر أياً كان المستقر.

أ. نوره العسلي

حلول تمارين (4)

التمرين الأول:

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً، و $\left(\mathbb{R},\tau_{|.|}\right)$ الفضاء التبولوجي العادي و كان $f:(X,\tau)\to\left(\mathbb{R},\tau_{|.|}\right)$ تابعاً معرفاً بالشكل:

$;A\subset X$ $\quad f(x)=\begin{cases}1\,;x\in A\\0\,;x\notin A\end{cases}$ ، و المطلوب: تحقق من صحة العبارة:

يكون التابع f مستمراً على X إذا و فقط إذا كانت المجموعة A مفتوحة و مغلقة في (X,τ) بنفس الوقت.

الحل:

$\Leftarrow$: لدينا بالفرض f تابع مستمر على X و لتكن $A\subset X$، لنثبت أنها مفتوحة و مغلقة بآن معاً، لنأخذ المجموعة $T=\left]\frac{1}{2},5\right[$ و هي مفتوحة في $\left(\mathbb{R},\tau_{|.|}\right)$ و بما أن f تابع مستمر على X فإن الصورة العكسية وفقه لأي مجموعة مفتوحة في المستقر عبارة عن مجموعة مفتوحة في المنطلق أي: $f^{-1}(T)\in\tau$ لكن $f^{-1}(T)=A$ بالتالي $A\in\tau$ و منه A مجموعة مفتوحة في (X,τ) .

كما أن $F=\{1\}$ مجموعة مغلقة في $\left(\mathbb{R},\tau_{|.|}\right)$ لأنها منتهية و كون f تابع مستمر على X فإن الصورة العكسية وفقه لأي مجموعة مغلقة في المستقر عبارة عن مجموعة مغلقة في المنطلق أي أن $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في(X,τ) ، لكن $f^{-1}(F)=A$ و منه A مجموعة مغلقة في(X,τ).

$\Longrightarrow$: لدينا بالفرض أن $A\subset X$ مجموعة مفتوحة و مغلقة بآن معاً في(X,τ) لنبرهن أن f تابع مستمر على X ، لتكن $T\in\tau_{|.|}$ مجموعة مفتوحة كيفية و لنبرهن أن $f^{-1}(T)\in\tau$ نناقش الحالات الآتية:

$T=\emptyset$ فإن $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\tau$

$T=\mathbb{R}$ فإن $f^{-1}(\mathbb{R})=X\in\tau$

$1\in T\,\&\,0\notin T$ فإن $f^{-1}(T)=A\in\tau$ لأن A مجموعة مفتوحة فرضاً.

$T \ni 0$ & $1 \notin T$ فإن $f^{-1}(T) = X\backslash A \in \tau$ لأن A مجموعة مغلقة فرضاً فمتممتها مجموعة مفتوحة.

$T \ni 0$ & $1 \in T$ فإن $f^{-1}(T) = A \cup (X\backslash A) = X \in \tau$

$T \not\ni 0$ & $1 \notin T$ فإن $f^{-1}(T) = \emptyset \in \tau$

مما سبق نجد أنه أياً كانت $T \in \tau_{|.|}$ فإن $f^{-1}(T) \in \tau$ و هذا يعني أن f تابع مستمر على X.

التمرين الثاني:

لتكن $X = \{1,2,3,4\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا: $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$، و

$Y = \{a, b, c\}$ مع التبولوجيا $\tau^* = \{Y, \emptyset, \{a\}\}$ و ليكن $f: (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ تابعاً معرفاً وفق: $f(1) = f(2) = a, f(3) = b, f(4) = c$، هل التابع f مستمر على X، مفتوح، مغلق، هل هو هومومرفيزم؟

الحل:

لدينا $f^{-1}(Y) = X \in \tau, f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau, f^{-1}(\{a\}) = \{1,2\} \in \tau$ فالصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في المستقر هي مجموعة مفتوحة في المنطلق، فالتابع مستمر على X.

لدينا

$$f(\emptyset) = \emptyset \in \tau^*, f(X) = Y \in \tau^*$$

$$f(\{1\}) = \{a\} \in \tau^*, f(\{1,2\}) = \{a\} \in \tau^*$$

الصورة المباشرة لكل مجموعة مفتوحة في (X, τ) هي مجموعة مفتوحة في (Y, τ^*) فالتابع f تابع مفتوح.

لدينا

$$f(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{F}^*, f(X) = Y \in \mathcal{F}^*$$

$$f(\{2,3,4\}) = \{a, b, c\} = Y \in \mathcal{F}^*, f(\{3,4\}) = \{b, c\} \in \mathcal{F}^*$$

الصورة المباشرة لكل مجموعة مغلقة في (X, τ) هي مجموعة مغلقة في (Y, τ^*) فالتابع f تابع مغلق.

التابع f ليس هومومرفيزم لأنه ليس تقابل (التابع f ليس متبايناً)

التمرين الثالث:

تحقق من صحة او خطأ كل من العبارات الآتية:

1. كل تابع مفتوح هو تابع مغلق.

قضية خاطئة، مثال:

لتكن $X = \{a, b, c\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا: $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$، و $Y = \{1,2\}$ مع التبولوجيا $\tau^* = \{Y, \emptyset, \{1\}\}$ و ليكن $f: (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ تابعاً معرفاً وفق:

$$f(a) = f(b) = f(c) = 1$$

نلاحظ أن $\mathcal{F} = \{X, \emptyset, \{b, c\}\}$ و $\mathcal{F}^* = \{Y, \emptyset, \{2\}\}$

إن $f(X) = f(\{a\}) = \{1\} \in \tau^* , f(\emptyset) = \emptyset \in \tau^*$ و بالتالي f تابع مفتوح

من جهة ثانية لدينا $f(\{b, c\}) = \{1\} \notin \mathcal{F}^*$ علماً أن $\{b, c\} \in \mathcal{F}$ أي أنه وجدت مجموعة مغلقة في المنطلق بحيث أن الصورة المباشرة لها وفق التابع f ليست مجموعة مغلقة في المستقر فالتابع f ليس تابعاً مغلقاً.

2. كل تابع مغلق هو تابع مفتوح.

قضية خاطئة، مثال:

لتكن $X = \{a, b, c\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا: $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$، و $Y = \{1,2\}$ مع التبولوجيا $\tau^* = \{Y, \emptyset, \{1\}\}$ و ليكن $f: (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ تابعاً معرفاً وفق:

$$f(a) = f(b) = f(c) = 2$$

نلاحظ أن $\mathcal{F} = \{X, \emptyset, \{b, c\}\}$ و $\mathcal{F}^* = \{Y, \emptyset, \{2\}\}$

إن $f(X) = f(\{b, c\}) = \{2\} \in \mathcal{F}^* , f(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{F}^*$ و بالتالي f تابع مغلق

من جهة ثانية لدينا $f(\{a\}) = \{2\} \notin \tau^*$ علماً أن $\{a\} \in \tau$ أي أنه وجدت مجموعة مفتوحة في المنطلق بحيث أن الصورة المباشرة لها وفق التابع f ليست مجموعة مفتوحة في المستقر فالتابع f ليس تابعاً مفتوحاً.

3. إذا كان $f: (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ تابعاً ما بحيث أن (X, τ) فضاء قوي، عندئذٍ إن f تابع مفتوح أياً كان المستقر.

قضية خاطئة، مثال:

لتكن $X = \{a, b, c\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا: $\tau = P(X)$، و $Y = \{1,2\}$ مع التبولوجيا

$\tau^{*}=\{Y,\emptyset,\{1\}\}$ و ليكن $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^{*})$ تابعاً معرفاً وفق:

$f(a)=f(b)=f(c)=2$

لدينا $\{a\}\in\tau$ و $f(\{a\})=\{2\}\notin\tau^{*}$ فالتابع f ليس تابعاً مفتوحاً.

4. إذا كان $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^{*})$ تابعاً ما بحيث أن (Y,τ^{*}) فضاء ضعيف، عندئذٍ إن f تابع مفتوح أياً كان المنطلق.

قضية خاطئة، لتكن $\tau^{*}=\{Y,\emptyset\}$ و $X=\{a,b,c\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا: $\tau=P(X)$ و ليكن $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^{*})$ تابعاً معرفاً وفق:

$f(a)=f(b)=f(c)=2$ لدينا $\{a\}\in\tau$ و $f(\{a\})=\{2\}\notin\tau^{*}$ فالتابع f ليس تابعاً مفتوحاً.

$4'$. إذا كان $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^{*})$ تابعاً ما بحيث أن (Y,τ^{*}) فضاء ضعيف، عندئذٍ إن f تابع مستمر أياً كان المنطلق.

قضية صحيحة، $\tau^{*}=\{Y,\emptyset\}$ لأن $f^{-1}(Y)=X\in\tau\,,f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\tau$ فالصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في المستقر هي مجموعة مفتوحة في المنطلق، فالتابع مستمر على X.

5. إذا كان $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^{*})$ تابعاً ما بحيث أن (X,τ) فضاء قوي، عندئذٍ إن f تابع مستمر أياً كان المستقر.

قضية صحيحة، لأنه:

$\forall\, T^{*}\in\tau^{*}:\ f^{-1}(T^{*})\subseteq X, f^{-1}(T^{*})\in P(X)=\tau$

فالصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في المستقر هي مجموعة مفتوحة في المنطلق، فالتابع مستمر على X.

أ. نوره العسلي