كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تبولوجيا ٢

المحاضرة : الثالثة /عملي/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

تمارين (3)

التمرين الأول:

لتكن $X = \{1,2,3, \dots \dots ,10\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau = \mathrm{P}(X)$، تحقق أن الأسرة $\beta = \{\{1\},\{2\}, \dots \dots ,\{10\}\}$ تشكل قاعدة للتبولوجيا τ.

التمرين الثاني:

لتكن $X = \{a,b,c,d\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau = \{X, \emptyset, \{\{c\},\{d\},\{c,d\}\}\}$، و لنأخذ $S = \{\{c\},\{d\}\}$، تحقق من كون الأسرة S تشكل قاعدة، قاعدة جزئية للتبولوجيا τ أم لا.

التمرين الثالث:

لتكن $X = \{1,2,3,4,5\}$ و لنأخذ الأسرة $S = \{\{1,3\},\{2,3\},X\}$ تحقق من كون الأسرة S تشكل قاعدة، قاعدة جزئية لتبولوجيا ما معرفة على X.

التمرين الرابع:

إذا كان $f: (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ تابعاً غامراً و مستمراً على X، تحقق أن الصورة المباشرة وفقه لأي مجموعة كثيفة في كل مكان في (X,τ) هي مجموعة كثيفة في كل مكان في (Y,τ^*).

التمرين الخامس:

إذا كان $f: (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ تابعاً ثابتاً، أثبت أن f تابع مستمر على X.

أ. نوره العسلي

حلول تمارين (3)

التمرين الأول:

لتكن $X = \{1,2,3, \dots \dots ,10\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau = P(X)$، تحقق أن الأسرة $\beta = \{\{1\},\{2\}, \dots \dots ,\{10\}\}$ تشكل قاعدة للتبولوجيا τ.

الحل:

كل عنصر من الأسرة β هو مجموعة جزئية من X، أي أن:

$$\forall B \in \beta: B \in P(X) \implies \beta \subseteq \tau$$

و بملاحظة أن الأسرة β هي أسرة كل المجموعات وحيدة العنصر في X نجد أن:

$\forall T \in \tau: T = \bigcup_{x \in T}\{x\}$ و بما أن كل مجموعة وحيدة العنصر هي عنصر من الأسرة β

فإن كل مجموعة مفتوحة تكتب على شكل اجتماع لعناصر من الأسرة β

و بالتالي الأسرة β تشكل قاعدة للتبولوجيا τ.

التمرين الثاني:

لتكن $X = \{a,b,c,d\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau = \{X,\emptyset,\{c\},\{d\},\{c,d\}\}$، و لنأخذ $S = \{\{c\},\{d\}\}$، تحقق من كون الأسرة S تشكل قاعدة، قاعدة جزئية للتبولوجيا τ أم لا.

الحل:

لدينا $S = \{\{c\},\{d\}\}$ حيث $\{c\} \in \tau$ و $\{d\} \in \tau$ أي أن: $S \subseteq \tau$ لكن X لا تكتب على شكل اجتماع لعناصر من S فهي لا تشكل قاعدة للتبولوجيا τ .

نشكل أسرة التقاطعات المنتهية للأسرة S :

$$\varphi(S) = \{X,\emptyset,\{c\},\{d\}\}$$

نلاحظ أن $\varphi(S) \subseteq \tau$ كما أن:

$X = \bigcap_{i \in \emptyset} S_i, S_i \in S$ و

$$X = \cup X \,, \emptyset = \cup \emptyset \,, \{c\} = \cup \{c\} \,, \{d\} = \cup \{d\} \,, \{c,d\} = \{c\} \cup \{d\}$$

وهذا يعني أن $\varphi(S)$ تشكل قاعدة للتبولوجيا τ و بالتالي فإن S تشكل قاعدة جزئية للتبولوجيا τ

التمرين الثالث:

لتكن $X = \{1,2,3,4,5\}$ و لنأخذ الأسرة $S = \{\{1,3\},\{2,3\},X\}$ تحقق من كون الأسرة S تشكل قاعدة، قاعدة جزئية لتبولوجيا ما معرفة على X.

الحل:

نلاحظ أن: $\{1,3\} \cap \{2,3\} = \{3\}$ لا تكتب على شكل اجتماع لعناصر من S فهي لا تشكل قاعدة لتبولوجيا ما معرفة على X.

نشكل أسرة التقاطعات المنتهية للأسرة S :

$$\varphi(S) = \{X,\{1,3\},\{2,3\},\{3\}\}$$

نلاحظ اولاً $X = \cup X$ أي أن X تكتب على شكل اجتماع لعناصر من $\varphi(S)$

من جهة ثانية:

$$\{3\} \cap X = \{3\} = \cup_{\{3\}\in\varphi(S)}\{3\}$$

$$\{2,3\} \cap X = \{2,3\} \cap \{2,3\} = \{2,3\} = \cup_{\{2,3\}\in\varphi(S)}\{2,,3\}$$

$$\{1,3\} \cap X = \{1,3\} \cap \{1,3\} = \{1,3\} = \cup_{\{1,3\}\in\varphi(S)}\{1,,3\}$$

$$X \cap X = X = \cup X$$

أي أن تقاطع أي عنصرين من $\varphi(S)$ هو اجتماع لعناصر منها و بالتالي فإن $\varphi(S)$ تشكل قاعدة لتبولوجيا ما معرفة على X و هذا يعني أن S تشكل قاعدة جزئية لتبولوجيا ما معرفة على X.

التمرين الرابع:

إذا كان $f: (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ تابعاً غامراً و مستمراً على X، تحقق أن الصورة المباشرة وفقه لأي مجموعة كثيفة في كل مكان في (X,τ) هي مجموعة كثيفة في كل مكان في (Y,τ^*).

الحل:

لتكن A مجموعة كيفية من X بحيث أنها كثيفة في كل مكان في (X,τ) هذا يعني أن $\bar{A} = X$

و منه $f(\bar{A}) = f(X)$ و كون f تابع غامر فرضاً فإن $f(X) = Y$ و بالتالي $f(\bar{A}) = Y$

و باعتبار التابع f مستمر على X فرضاً فالاحتواء الآتي يكون محققاً:

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}, \forall A \subseteq X$$

نعوض $f(\bar{A}) = Y$ في الاحتواء السابق نجد: $Y \subseteq \overline{f(A)}$

و لدينا $\overline{f(A)} \subseteq Y$ محقق دوماً بالتالي $\overline{f(A)} = Y$ و هذا يعني أن $f(A)$ مجموعة كثيفة في كل مكان في (Y,τ^*).

التمرين الخامس:

إذا كان $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ تابعاً ثابتاً، أثبت أن f تابع مستمر على X.

الحل:

أياً كانت $x\in X$ و أياً كانت $V^*\in V(b)$ حيث $b=f(x)$ في الفضاء (Y,τ^*) عندئذٍ:

$$b=f(x)\in V^*\Longrightarrow f^{-1}(\{b\})\subseteq f^{-1}(V^*)\subseteq X$$

و بما أن f تابع ثابت أي $f(x)=b$ فإن $f^{-1}(\{b\})=X$ و منه أصبح لدينا:

$X=f^{-1}(\{b\})\subseteq f^{-1}(V^*)\subseteq X$ وبالتالي: $f^{-1}(V^*)=X$ و نعلم أن

$X\in V(x),\forall x\in X$ فالصورة العكسية لكل مجاورة للنقطة $f(x)$ في الفضاء (Y,τ^*)

هي مجاورة للنقطة x في الفضاء (X,τ) فالتابع f تابع مستمر عند النقطة x و بمراعاة

الاختيار الكيفي للنقطة x نجد أن f تابع مستمر على X.

أ. نوره العسلي