كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تبولوجيا ٢

المحاضرة : مهم١ /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

المرشحة:

لتكن $X \neq \phi$ مجموعة كيفية من العناصر ولتكن $\mathcal{M} \subseteq P(X)$ أسرة جزئية تحقق:

① $\mathcal{M} \neq \{\}$ ($\mathcal{M}$ ليست أسرة خالية) و $\phi \notin \mathcal{M}$

② من أجل كل M و N من $\mathcal{M}$ فإن $N \cap M \in \mathcal{M}$

③ إذا كان A عنصراً كيفياً من $P(X)$ بحيث يوجد عنصر $M_0 \in \mathcal{M}$ يحقق $M_0 \subseteq A$ عندئذٍ يكون $A \in \mathcal{M}$

ندعو $\mathcal{M}$ مرشحة معرفة على X

أمثلة: لتكن $X = \{1, 2, 3\}$ ولنعرف الأسر الآتية:

1. $\mathcal{M}_1 = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, X\}$

* من تعريف $\mathcal{M}_1$ نجد $\phi \notin \mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_1 \neq \{\}$
* لدينا

$\{1\} = \{1\} \cap \{1\} = \{1\} \cap \{1,2\} = \{1\} \cap \{1,3\} = \{1,2\} \cap \{1,3\}$
$= \{1\} \cap X$

$\{1,2\} = \{1,2\} \cap \{1,2\} = \{1,2\} \cap X$

$\{1,3\} = \{1,3\} \cap \{1,3\} = \{1,3\} \cap X$, $X \cap X = X$

أي أن تقاطع أي عنصرين من $\mathcal{M}_1$ هو عنصر فيها

* $P(X) = \{\underline{\underline{X}}, \phi, \underline{\underline{\{1\}}}, \{2\}, \{3\}, \underline{\underline{\{1,2\}}}, \underline{\underline{\{1,3\}}}, \{2,3\}\}$

أياً كان العنصر $A \in P(X)$ بحيث يحوي أحد عناصر $\mathcal{M}_1$ فإنه عنصر منها

$\mathcal{M}_1$ تعرف مرشحة على X.

2. $\mathcal{M}_2 = \{X, \{1,2\}, \{1,3\}\}$

نلاحظ أن $\{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\}$, $\{1\} \notin \mathcal{M}_2$ فالشرط الثاني من تعريف المرشحة غير محقق

$\mathcal{M}_2$ لا تعرف مرشحة على X

3. $\mathcal{M}_3 = \{\{2\}, \{2,3\}, X\}$

نلاحظ أن $A = \{1,2\} \in P(X)$ وتحقق $\{2\} \subseteq \{1,2\} = A$

لكن $\{1,2\} \notin \mathcal{M}_3$ فالشرط الثالث غير محقق

$\mathcal{M}_3$ لا تعرف مرشحة على X

4. $\mathcal{M}_4 = \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

نلاحظ أن $X \in P(X)$, X تحوي أي مجموعة جزئية منها بشكل بديهي

فهي عنصر بديهي من أي أسرة تعرف مرشحة على X

وبما أن $X \notin \mathcal{M}_4$ فإن $\mathcal{M}_4$ لا تعرف مرشحة على X

* مرشحة فريشيه :

لتكن X مجموعة غير منتهية نعرف عليها الأسرة $\mathcal{M}$ بالشكل

$$\mathcal{M} = \{M \in P(X) : X \setminus M \text{ مجموعة منتهية}\}$$

الأسرة $\mathcal{M}$ تعرف مرشحة على X ندعوها مرشحة فريشيه

* تعريف :

لتكن $\mathcal{M}$ مرشحة معرفة على X و τ تبولوجيا معرفة على X ولنأخذ $x \in X$ نقطة كيفية

1. يقال إن x نقطة تقارب للمرشحة $\mathcal{M}$ في الفضاء (X, τ) إذا كان $V(x) \subseteq \mathcal{M}$ أي أن كل مجاوره لـ x هي عنصر من المرشحة

2. يقال إن x نقطة لاصقة بالمرشحة ونكتب $x \in \overline{\mathcal{M}}$ إذا كان: $x \in \overline{M}$ لكل $M \in \mathcal{M}$

$\forall v \in V(x) : v \cap M \neq \phi$
$\forall M \in \mathcal{M}$

ملاحظة: كل نقطة تقارب لمرشحة $\mathcal{M}$ هي نقطة لاصقة بها ، العكس غير صحيح بالضرورة

بفرض $x \in X$ نقطة تقارب للمرشحة $\mathcal{M}$ $\Leftarrow$ $V(x) \subseteq \mathcal{M}$

$\forall v \in V(x) : v \in \mathcal{M} \ , \ \forall M \in \mathcal{M} \Rightarrow v \cap M \in \mathcal{M}$ حسب الشرط الثاني من تعريف المرشحة

ولأن $\phi \notin \mathcal{M}$ فإن $v \cap M \neq \phi$ وهذا يعني أنّ $x \in \overline{M}, \forall M \in \mathcal{M}$ حيث v مجاوره كيفية لها

ومنه $x \in \overline{\mathcal{M}}$

لكن المثال الآتي يبين أنه توجد نقطة لاصقة بمرشحة دون أن تكون نقطة تقارب لها

لنأخذ $X = \{1,2,3\}$ مع $\tau = \{X, \phi, \{1\}\}$ والمرشحة $\mathcal{M} = \{X\}$

$$V(1) = \{X, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$$

واضح أن $V(1) \not\subseteq \mathcal{M}$ لذلك فإن $x = 1$ ليست نقطة تقارب لها لكنها نقطة لاصقة بـ $\mathcal{M}$ لأن:

$$\forall v \in V(1) : v \cap X = v \quad (v \subseteq X)$$

وكون $1 \in v$ فإن $v \neq \phi$ $\Leftarrow$ $v \cap X \neq \phi$ لكل $v \in V(1)$

$$x = 1 \in \overline{X} \Rightarrow 1 \in \overline{\mathcal{M}}$$

تمرين: ادرس تقارب المرشحة فرشية في فضاء المتممات المنتهية على X

$\tau_{cof} = \{T \in P(X) : X \setminus T \text{ منتهية}\} \cup \{\phi\}$ ، و $\mathcal{M} = \{M \in P(X) : X \setminus M \text{ منتهية}\}$ فرشية

لنأخذ $x \in X$ نقطة كيفية ولتكن v مجاورة كيفية لها ، بحسب تعريف المجاوره

توجد $T \in \tau_{cof}$ بحيث $x \in T \subseteq v$ $\Leftarrow$ $X \setminus v \subseteq X \setminus T$ ، لكن $X \setminus T$ منتهية

لأن $T \in \tau_{cof}$ فكل مجموعة جزئية منها هي منتهية $\Leftarrow$ $X \setminus v$ مجموعة منتهية، $v \in P(X)$

وبالتالي v تحقق تعريف مرشحة فرشية إذن $v \in \mathcal{M}$ وحيث أن v كيفية فإن

$V(x) \subseteq \mathcal{M}$ وهذا يعني أن x نقطة تقارب لمرشحة فرشية في الفضاء (X, τ_{cof})

وبمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة x نجد أن مرشحة فرشية تتقارب

إلى كل نقطة في الفضاء (X, τ_{cof}) .

تعريف: قاعدة المرشحة $\mathcal{M}$

$\mathcal{M}$ مرشحة معرفة على X ولتكن $\beta \subseteq P(X)$ أسرة ما، يقال β قاعدة للمرشحة $\mathcal{M}$ $\Leftrightarrow$

① $\beta \subseteq \mathcal{M}$

② $\forall M \in \mathcal{M}, \exists B \in \beta : B \subseteq M$

مثال: لتكن $X = \{a,b,c\}$ مع $\mathcal{M} = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\}$

$\beta_1 = \{\{a\}, \{a,b\}\}$ و $\beta_2 = \{\{a,b\}, X\}$

الشرط ① محقق $\beta_1 \subseteq \mathcal{M}$

$\forall \{a\}, X, \{a,b\}, \{a,c\} \in \mathcal{M}$

$\exists \{a\} \in \beta_1 :$

$\{a\} \subseteq \{a\}$, $\{a\} \subseteq \{a,b\}$

$\{a\} \subseteq \{a,c\}$, $\{a\} \subseteq X$

الشرط ② محقق β_1 قاعدة المرشحة $\mathcal{M}$

الشرط ① محقق $\beta_2 \subseteq \mathcal{M}$

$\exists \{a\} \in \mathcal{M} : \forall B \in \beta_2$

$B \nsubseteq \{a\}$

$\{a,b\} \nsubseteq \{a\}$ و $X \nsubseteq \{a\}$

الشرط الثاني غير محقق

β_2 ليست قاعدة المرشحة $\mathcal{M}$

تعريف: قاعدة لمرشحة ما

لـ $X \neq \phi$ مجموعة ما ولـ $\beta \subseteq P(X)$ أسرة ما

β تشكل قاعدة لمرشحة ما معرفة على X $\Leftrightarrow$ ① $\beta \neq \{\}$, $\phi \notin \mathcal{M}$

② $\forall B, C \in \beta : \exists D \in \beta$

حيث $D \subseteq B \cap C$

تمرين: لتكن $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية ولنعرف الأسرة

$$\mathcal{M} = \{M_n = \{n, n+1, n+2, \dots\} : n = 1, 2, 3, \dots, n < \infty\}$$

تحقق فيما إذا كانت $\mathcal{M}$ مرشحة على $\mathbb{N}$، قاعدة لمرشحة ما على $\mathbb{N}$

1 $\mathcal{M}$ لا تعرف مرشحة على $\mathbb{N}$ لأن:

مثلا $M_7 = \{7, 8, 9, 10, \dots\} \in \mathcal{M}$ و $A = \{1, 7, 8, 9, 10, \dots\}$

إن $A \in P(\mathbb{N})$ و $M_7 \subseteq A$ لكن $A \notin \mathcal{M}$

2 أولاً: $n < \infty \Leftarrow M_\infty = \phi \notin \mathcal{M}$ وبوضع $n=1$ نجد

$M_1 = \mathbb{N} \in \mathcal{M}$

$\mathcal{M} \neq \{\}$

ثانياً: أياً كان $M_n, M_m \in \mathcal{M}$

$M_n = \{n, n+1, \dots\}$

$M_m = \{m, m+1, \dots\}$

نضع $r = \max(n,m)$

$$M_n \cap M_m = M_r = \{r, r+1, r+2, \dots\} \in \mathcal{M}$$

نضع $D = M_r \in \mathcal{M}$ فنجد أنه كيفما $D \subseteq M_n \cap M_m$ لأجل أي عنصرين M_m, M_n

$\mathcal{M}$ قاعدة لمرشحة ما على $\mathbb{N}$

(عملي) موضوعات الفصل
في الفضاءات التبولوجية

تمرين $\boxed{1}$ إذا كانت τ تبولوجيا معرفة على $\mathbb{R}$ على الشكل الآتي :

$$\tau = \{ T \in P(\mathbb{R}) : 1 \in T \} \cup \{\phi\}$$

تحقق من كون الفضاء $(\mathbb{R}, \tau)$ فضاء T_0, T_1, T_2 أم لا .

* التحقق من كون $(\mathbb{R}, \tau)$ فضاء T_0

لتكن x, y نقطتين مختلفتين كيفيتين ، نناقش الحالتين الآتيتين :

(a) إحدى النقطتين هي 1 ولتكن x مثلاً $(x = 1)$ بما أن $y \neq x$ فإن $y \neq 1$ عندئذ توجد المجموعة المفتوحة $\{1\} \in \tau$ تحقق : $x \in \{1\}$ و $y \notin \{1\}$ للنقطتين x و y نجد أن ~~[illegible]~~ شرط الفضاء T_0 محقق في هذه الحالة براعاة الاختيار الكيفي

(b) كلتا النقطتين مختلفة عن 1 أي $x \neq 1$ و $y \neq 1$ $(x \neq y)$ عندئذ توجد المجموعة المفتوحة $G = \{1, x\} \in \tau$ تحقق $x \in G$ و $y \notin G$ (حيث x, y نقطتين كيفيتين مختلفتين)

وفي هذه الحالة تحقق شرط الفضاء T_0

في كلتا الحالتين (a) و (b) وجدنا مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}, \tau)$ تضم إحدى النقطتين دون الأخرى $\Leftarrow$ $(\mathbb{R}, \tau)$ فضاء T_0 ✓

* التحقق من كون الفضاء $(\mathbb{R}, \tau)$ فضاء T_1

ليأخذ $1 \in \mathbb{R}$ و $x \in \mathbb{R}$ كيفية بحيث $x \neq 1$ عندئذ إن أي مجموعة ~~تضم~~ مفتوحة تضم x سوف تضم 1 أيضاً بحسب تعريف الأسرة τ وبالتالي لا توجد مجموعة مفتوحة تحوي x ولا تحوي 1 من أجل النقطتين x و 1 $(x \neq 1)$ لم يتحقق شرط الفضاء T_1 بوجود مجموعتين مفتوحتين كل منهما تضم إحدى النقطتين دون الأخرى

$(\mathbb{R}, \tau)$ ليس فضاء T_1 وبالتالي ليس T_2 لأن كل T_2 يكون T_1

نقطة ما $a \in X$

تمرين $\boxed{2}$ لتكن X مجموعة كيفية ، أوج تبولوجيا معرفة على X بالشكل :

$$\tau = \{T \in p(X) : a \notin T\} \cup \{X\}$$

تحقق من كون الفضاء (X, τ) فضاء T_0 ، T_1 ، T_2

* لتكن $x, y \in X$ نقطتين مختلفتين $(x \neq y)$ كيفيتين
نفرض أن إحداهما على الأقل مختلفة عن a ولتكن y $(y \neq a)$
عندئذ تكون المجموعة $G = \{y\} \in \tau$ لأن $a \notin G$
وتحقق $x \notin G$ و $y \in G$ $\Leftarrow$ (X, τ) فضاء T_0
لأن $(x \neq y)$

* لتكن $x, y \in X$ نقطتين كيفيتين مختلفتين $x \neq y$
عندما $x = a$ و $y \neq a$ نلاحظ أن المجموعة المفتوحة الوحيدة في (X, τ) والتي تضم a هي X $(a \in X \in \tau)$ لكن $y \in X$
إذن لا يوجد مجموعة مفتوحة تضم a دون y فالفضاء ليس T_1
وبالتالي ليس T_2 لأن كل T_2 يكون T_1

تمرين $\boxed{3}$ إذا كان (X, τ) فضاء T_0 فتحقق من هذه العبارة :
(X, τ) فضاء T_0 $\Leftarrow$ يوجد على الأكثر نقطة عامة x_0 أي نقطة تحقق $\overline{\{x_0\}} = X$

الحل : نفرض وجود نقطتين مختلفتين $x \neq y$ بحيث $\overline{\{x\}} = X$ و $\overline{\{y\}} = X$
بالتالي $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ ، وهذا تناقض مع المبرهنة :
" (X, τ) فضاء T_0 $\Longleftrightarrow$ $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$; $\forall x, y \in X ; x \neq y$
ما يعني بالتالي الفرض الكبلي خاطئ والفضاء يحوي نقطة عامة واحدة على الأكثر

تمرين $\boxed{4}$ إذا كان (X, τ) فضاء T_1 و A مجموعة منتهية $\Leftarrow$ $A' = \phi$
A مجموعة منتهية $\Leftarrow$ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ أو $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\}$

$$\Rightarrow A' = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\}\right)' = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\}' = \bigcup_{i=1}^{n} \phi = \phi \left(\begin{array}{c} (X, \tau) \text{ فضاء } T_1 \\ \Longleftrightarrow \\ \{x\}' = \phi , \forall x \in X \end{array} \right)$$