كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تبولوجيا ٢

المحاضرة : السابعة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

الفصل في الفضاءات التبولوجية

تعريف:

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً بحيث أنه من أجل كل نقطتين مختلفتين x, y من نقاطه توجد مجموعة مفتوحة مثل G في (X,τ) بحيث أن إحدى النقطتين x أو y تنتمي إليها دون الأخرى، عندئذٍ يسمى الفضاء (X,τ) فضاء T_0 .

مثال: لتكن $X=\{a,b\}$ و لنعرف عليها التبولوجيتين:

$\tau_1=\{X,\emptyset,\{a\}\}\,,\tau_2=\{X,\emptyset\}$ ، نلاحظ أن الفضاء (X,τ_1) هو فضاء T_0 لأنه من أجل $a,b\in X$, $a\neq b$ توجد $G=\{a\}\in\tau$ بحيث أن: $a\in G\ \&\ b\notin G$

أي أنه من أجل كل نقطتين مختلفتين من X وجدت مجموعة مفتوحة في (X,τ_1) مثل G بحيث أن إحدى النقطتين تنتمي إليها دون الأخرى.

أما الفضاء (X,τ_2) فهو ليس فضاء T_0 لأنه من أجل أي نقطتين مختلفتين من X و أياً كانت المجموعة المفتوحة في (X,τ_2) إما أنهما تنتميان معاً إليها أو كلتا النقطتين لا تنتميان لها.

ملاحظات و نتائج:

1. الفضاء التبولوجي القوي هو فضاء T_0 دوماً لأن كل مجموعة وحيدة العنصر هي مجموعة مفتوحة فيه.
2. الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاء T_0 إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall x,y\in X: x\neq y\,,\exists G\in\tau: x\in G\ \&\ y\notin G \text{ أو } x\notin G\ \&y\in G$$

3. الفضاء التبولوجي (X,τ) ليس فضاء T_0 إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\exists x,y\in X: x\neq y\,,\nexists G\in\tau: x\in G\ \&\ y\notin G \text{ أو } x\notin G\ \&y\in G$$

أو $$\exists x,y\in X: x\neq y: \forall G\in\tau\Longrightarrow\begin{cases}x,y\in G\\ x,y\notin G\end{cases}$$

مبرهنة:

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً، فإن الشروط الآتية متكافئة:

1. (X,τ) فضاء T_0.
2. $\forall x,y\in X: x\neq y$ و $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$
3. $\forall x,y\in X: x\neq y$: إما $x\notin\overline{\{y\}}$ أو $y\notin\overline{\{x\}}$

إثبات:

$(1) \Rightarrow (2)$:

أياً كان $x \neq y$ نقطتين مختلفتين من نقاط الفضاء (X,τ) بحسب الفرض توجد مجموعة مفتوحة G في (X,τ) بحيث $x \in G \,\&\, y \notin G$ و منه $G \cap \{y\} = \emptyset$ لكن $G \in V(x)$، و لذلك فإن $x \notin \overline{\{y\}}$ و بما أن $x \in \overline{\{x\}}$ فإن $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

$(2) \Rightarrow (3)$:

لتكن $x \neq y$ نقطتين مختلفتين كيفيتين كيفي من نقاط الفضاء (X,τ) لدينا بالفرض أن $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ ، نفرض جدلاً أن : $x \in \overline{\{y\}}$ و $y \in \overline{\{x\}}$ و بالتالي نجد : $\{x\} \subseteq \overline{\{y\}}$ و $\{y\} \subseteq \overline{\{x\}}$ و منه $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\overline{\{y\}}} = \overline{\{y\}}$ و $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\overline{\{x\}}} = \overline{\{x\}}$ و هذا يقتضي أن $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ و هو ما يناقض الفرض، فالفرض الجدلي خاطئ و الصحيح أن :

$\forall x, y \in X : x \neq y :$ إما $x \notin \overline{\{y\}}$ أو $y \notin \overline{\{x\}}$

$(3) \Rightarrow (1)$:

أياً كان $x \neq y$ نقطتين مختلفتين من نقاط الفضاء (X,τ) لنفرض أن $x \notin \overline{\{y\}}$ هذا يعني وجود $G \in \tau : x \in G$ بحيث أن $\{y\} \cap G = \emptyset$ و منه: $x \in G \,\&\, y \notin G$ و لذلك فإن الفضاء (X,τ) فضاء T_0.

تعريف:

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً بحيث أنه من أجل كل نقطتين مختلفتين x, y من نقاطه توجد مجموعتان مفتوحتان مثل G_x , G_y في (X,τ) بحيث يكون :

$$x \in G_x \,\&\, y \notin G_x \quad \text{و} \quad x \notin G_y \,\&\, y \in G_y$$

عندئذٍ يسمى الفضاء (X,τ) فضاء T_1 .

نتيجة:

ينتج من التعريف مباشرة أن كل فضاء T_1 هو فضاء T_0، و العكس غير صحيح بالضرورة كما يبين المثال الآتي:

$X = \{a, b\}$ و لنعرف عليها التبولوجيتين:

$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\} , \tau_2 = P(X)$ نلاحظ أن الفضاء (X,τ_2) هو فضاء T_0 و T_1 بينما الفضاء (X,τ_1) هو فضاء T_0 ، لكنه ليس فضاء T_1 لأنه من أجل $a, b \in X , a \neq b$ لا توجد $G_a, G_b \in \tau$ بحيث أن:

$a \in G_a \,\&\, b \notin G_a$ و $a \notin G_b \,\&\, b \in G_b$ ($G_a = \{a\}$ موجودة لكن G_b غير موجودة)

مبرهنة:

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً عندئذٍ يكون الفضاء (X,τ) فضاء T_1 إذا وفقط إذا

تحقق المساواة الآتية من أجل أي مجموعة جزئية من نقاطه A: $A = \bigcap_{\substack{G\in\tau \\ A\subseteq G}} G$.

إثبات:

$\Leftarrow$: لتكن A مجموعة جزئية من نقاط الفضاء (X,τ) و لتكن $\{G_A, G_A \in \tau, A \subseteq G_A\}$ أسرة جميع المجموعات المفتوحة في (X,τ) و التي كل منها تحوي المجموعة A.

بما أن $A \subseteq G_A$ لكل $G_A \in \tau$ فإن $A \subseteq \bigcap_{\substack{G\in\tau \\ A\subseteq G}} G \ldots (1)$

من جهة ثانية لتكن $x \in X\backslash A$ نقطة كيفية بالتالي $x \notin A \Leftrightarrow x \neq a, \forall a \in A$ و بحسب كون الفضاء (X,τ) فضاء T_1 بالفرض فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان مثل G_x , G_a في (X,τ) بحيث يكون :

$x \notin G_a \,\&\, a \in G_a$ و $x \in G_x \,\&\, a \notin G_x$ و ذلك $\forall a \in A$، لنضع $G = \bigcup_{a\in A} G_a$ عندئذٍ نجد أن G مجموعة مفتوحة في (X,τ) لأنها اجتماع لمجموعات مفتوحة فيه، ثم إن:

$x \notin G \,\&\, A \subseteq G$ و منه $x \notin G$ و $G \in \{G_A, G_A \in \tau, A \subseteq G_A\}$ لذلك فإن $x \notin \bigcap_{\substack{G\in\tau \\ A\subseteq G}} G$ و هذا يعني أن $x \in X\backslash \bigcap_{\substack{G\in\tau \\ A\subseteq G}} G$ و بمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة x نجد أن $X\backslash A \subseteq X\backslash \bigcap_{\substack{G\in\tau \\ A\subseteq G}} G$ و هذا يكافئ القول أن $\bigcap_{\substack{G\in\tau \\ A\subseteq G}} G \subseteq A \ldots (2)$ من (1) و (2) نستنتج أن $A = \bigcap_{\substack{G\in\tau \\ A\subseteq G}} G , \forall A \subseteq X$.

$\Longrightarrow$: المساواة الآتية محققة من أجل أي مجموعة جزئية من نقاط الفضاء (X,τ) $A = \bigcap_{\substack{G\in\tau \\ A\subseteq G}} G$ لنبرهن أنه فضاء T_1.

لتكن $x \neq y$ نقطتين مختلفتين كيفيتين من نقاط الفضاء (X,τ) عندئذٍ تكون $\{x\},\{y\}$ مجموعتين من نقاط الفضاء (X,τ) لذلك يكون لدينا بحسب الفرض

$$\{y\} = \bigcap_{\substack{G_y\in\tau \\ \{y\}\subseteq G_y}} G_y = \bigcap_{\substack{G_y\in\tau \\ y\in G_y}} G_y \quad \text{و} \quad \{x\} = \bigcap_{\substack{G_x\in\tau \\ \{x\}\subseteq G_x}} G_x = \bigcap_{\substack{G_x\in\tau \\ x\in G_x}} G_x$$

بما أن $x \neq y$ فإن $\{y\} \neq \{x\}$ بالتالي $\bigcap_{\substack{G_y\in\tau \\ y\in G_y}} G_y \neq \{x\}$ لذلك توجد $G_0 \in \tau$ بحيث أن: $x \notin G_0 \,\&\, y \in G_0$

و كذلك $\bigcap_{\substack{G_x\in\tau \\ x\in G_x}} G_x \neq \{y\}$ لذلك توجد $G_1 \in \tau$ بحيث أن:

$y \notin G_1 \,\&\, x \in G_1$

و بالتالي من أجل النقطتين المختلفتين الكيفيتين x, y من نقاط الفضاء (X,τ) وجدت مجموعتان مفتوحتان مثل G_1 , G_0 في (X,τ) بحيث يكون :

$$x \in G_1 \,\&\, y \notin G_1 \quad \text{و} \quad x \notin G_0 \,\&\, y \in G_0$$

الفضاء (X,τ) فضاء T_1 .

نتيجة (1):

يكون الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاء T_1 إذا وفقط إذا كان من أجل أي نقطة $x \in X$ تتحقق المساواة: $\{x\} = \bigcap_{\substack{G_x \in \tau \\ x \in G_x}} G_x$

نتيجة (2):

يكون الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاء T_1 إذا وفقط إذا كان من أجل أي نقطة $x \in X$ تتحقق المساواة: $\{x\} = \bigcap_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ x \in F}} F$ حيث $\mathcal{F}$ أسرة المجموعات المغلقة في (X,τ).

نتيجة (3):

يكون الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاء T_1 إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة وحيدة العنصر مجموعة مغلقة فيه.

نتيجة (4):

يكون الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاء T_1 إذا وفقط إذا كان $\{\acute{x}\} = \emptyset$ من أجل أي نقطة $x \in X$.

إثبات: لدينا (X,τ) فضاء T_1 فرضاً و لتكن $x \in X$ نقطة كيفية بحسب النتيجة (3) إن $\{x\}$ مجموعة مغلقة في (X,τ) بالتالي $\overline{\{x\}} = \{x\}$ و كون $\{\acute{x}\} \subseteq \overline{\{x\}}$ فإن $\{\acute{x}\} \subseteq \{x\}$ من ناحية ثانية لدينا $X \in V(x)$ و $X \cap \{x\} = \{x\}$ و هذا يعني أن $x \notin \{\acute{x}\}$ بالتالي $\{\acute{x}\} = \emptyset$.

و بالعكس لدينا فرضاً أن مشتقة كل مجموعة وحيدة العنصر هي مجموعة خالية و لنبرهن أن (X,τ) فضاء T_1 ، لنأخذ $x \in X$ نقطة كيفية عندئذٍ إن $\{\acute{x}\} = \emptyset$ و بما أن $\overline{\{x\}} = \{\acute{x}\} \cup \{x\}$ بالتالي $\overline{\{x\}} = \emptyset \cup \{x\} = \{x\}$ و منه إن $\{x\}$ مجموعة مغلقة و بمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة x نجد أن (X,τ) فضاء T_1.

مبرهنة:

يكون الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاء T_1 إذا و فقط إذا كان $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset\,, \forall x \neq y$ حيث $x, y \in X$.

إثبات:

$\Leftarrow$: لدينا بالفرض أن (X,τ) فضاء T_1 و لنأخذ $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ ، نعلم أن كل مجموعة وحيدة العنصر في فضاء T_1 تكون مجموعة مغلقة فيه و بالتالي لدينا: $\overline{\{x\}} = \{x\}$ و $\overline{\{y\}} = \{y\}$ و بما أن $x \neq y$ فإن $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ أي أن $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset$

$\Longrightarrow$: لدينا فرضاً أن $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset$ من أجل كل نقطتين مختلفتين x, y من X، لنبرهن أن (X,τ) فضاء T_1:

من الفرض لدينا $\overline{\{y\}} \subseteq X\backslash\overline{\{x\}}$ ، بملاحظة أن $x \in \overline{\{x\}}\ , x \notin \overline{\{y\}}, y \in \overline{\{y\}}$ نجد أن $T_x = X\backslash\overline{\{y\}}$ مجموعة مفتوحة تحقق $x \in T_x\ \&\ y \notin T_x$ ، و بالمثل نجد أن: $\overline{\{y\}} \subseteq X\backslash\overline{\{x\}}$ ، بملاحظة أن $y \in \overline{\{y\}}\ , y \notin \overline{\{x\}}, x \in \overline{\{x\}}$ نجد أن $T_y = X\backslash\overline{\{x\}}$ مجموعة مفتوحة تحقق $y \in T_y\ \&\ x \notin T_y$

و هذا يعني أن (X,τ) فضاء T_1.

فضاء هاوسدورف (T_2)

تعريف:

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً، عندئذٍ:

يقال عن (X,τ) إنه فضاء T_2 إذا و فقط إذا كان من أجل كل نقطتين مختلفتين x, y من نقاطه توجد مجاورتان $V_x \in V(x)\ \&\ V_y \in V(y)$ بحيث أنهما غير متقاطعتين.

ملاحظات و نتائج:

1. يكون الفضاء (X,τ) فضاء T_2 إذا و فقط إذا كان من أجل كل نقطتين مختلفتين x, y من نقاطه توجد مجموعتان مفتوحتان G_x , G_y في (X,τ) بحيث يكون:

$$x \in G_x\ , y \in G_y\ \&\ G_x \cap G_y = \emptyset$$

مثال: الفضاء الحقيقي العادي $\left(\mathbb{R}, \tau_{|.|}\right)$ هو فضاء T_2:

لنأخذ $x \neq y$ نقطتين مختلفتين من $\mathbb{R}$ عندئذٍ إما $x < y$ أو $x > y$ لنقل مثلاً إن: $x < y$ و لتكن $a, b, c \in \mathbb{R}$ بحيث $a < x < c$ و $c < y < b$ عندئذٍ تكون المجموعتان $T_x =]a, c[\ , T_y =]c, b[$ مجموعتين مفتوحتين في الفضاء $\left(\mathbb{R}, \tau_{|.|}\right)$ تحققان :

$x \in T_x\ , y \in T_y\ \&\ T_x \cap T_y = \emptyset$ ، و بالتالي إن $\left(\mathbb{R}, \tau_{|.|}\right)$ فضاء T_2.

2. الفضاء (X,τ) ليس فضاء T_2 $\Leftrightarrow$ تحقق الشرط:

$$\exists x, y \in X : \forall\, V_x \in V(x)\ , \forall\, V_y \in V(y) :\ V_x \cap V_y \neq \emptyset$$

3. كل فضاء T_2 هو فضاء T_1 لأنه بحسب النتيجة 1 من أجل كل نقطتين مختلفتين x, y من نقاطه توجد مجموعتان مفتوحتان G_x , G_y في (X,τ) بحيث يكون:

$$x \in G_x\ , y \in G_y\ \&\ G_x \cap G_y = \emptyset$$

أي أن $x \in G_x\ \&\ y \notin G_x$ لأن $G_x \cap G_y = \emptyset$ و $y \in G_y\ \&\ x \notin G_y$ لأن $G_x \cap G_y = \emptyset$ و هذا يعني أن (X,τ) فضاء T_1.

و كل فضاء T_2 هو فضاء T_0 لأن كل فضاء T_2 هو فضاء T_1 و كل فضاء T_1 هو فضاء T_0.

العكس غير صحيح بصورة عامة كما يبين المثال الآتي:

لنعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تبولوجيا المتممات المنتهية:

$\tau_{cof} = \left\{T \in P(\mathbb{R}), \text{مجموعة منتهية } \mathbb{R}\backslash T\right\} \cup \{\emptyset\}$ لنبرهن أن $\left(\mathbb{R}, \tau_{cof}\right)$ فضاء T_1 و

ليس فضاء T_2 .

لتكن $x, y \in \mathbb{R}$ نقطتين كيفيتين بحيث أن $x \neq y$ ، عندئذٍ تكون كل من المجموعتين:

$T_x = \mathbb{R}\backslash\{y\}, T_y = \mathbb{R}\backslash\{x\}$ مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ و تحققان:

$x \in T_x$ & $y \notin T_x$ و $y \in T_y$ & $x \notin T_y$ بمراعاة الاختيار الكيفي للنقطتين $x, y \in \mathbb{R}$

نجد أن $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ فضاء T_1.

لنفرض جدلاً أن $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ فضاء T_2 هذا يعني أنه من أجل كل نقطتين مختلفتين x, y من نقاطه توجد مجموعتان مفتوحتان G_x , G_y في $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ بحيث يكون:

$$x \in G_x , y \in G_y \,\&\, G_x \cap G_y = \emptyset$$

بالتالي فإن $G_x \subseteq \mathbb{R}\backslash G_y$ و $G_y \subseteq \mathbb{R}\backslash G_x$ و هذا تناقض لأن:

كل من G_x , G_y مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ فكل منهما مجموعة غير منتهية من جهة ، و من جهة ثانية كل من $\mathbb{R}\backslash G_y$ و $\mathbb{R}\backslash G_x$ مجموعة منتهية ، سبب التناقض هو الفرض الجدلي الخاطئ بأن $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ فضاء T_2، بالتالي $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ ليس فضاء T_2.

انتهت المحاضرة