كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : الهندسة التفاضلية

المحاضرة : الرابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

1) ليكن السطح المعطى بالتمثيل:

$\vec{x} = (u+v)\vec{e_1} + (u-v)\vec{e_2} + (uv)\vec{e_3}$

أوجد الزاوية الكائنة بين المنحنيات ذات الوسيط u و المنحنيات ذات الوسيط v في النقطة $u=1$ و $v=1$.

الحل

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

$$E = \vec{x_u}\,\vec{x_u}$$

$$F = \vec{x_u}\,\vec{x_v}$$

$$G = \vec{x_v}\,\vec{x_v}$$

$$\vec{x_u} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + v\,\vec{e_3}$$

$$\vec{x_v} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + u\,\vec{e_3}$$

$$E = 2 + v^2\Big|_{\substack{u=1\\v=1}} = 3$$

$$F = uv\Big|_{\substack{u=1\\v=1}} = 1$$

$$G = 2 + u^2\Big|_{\substack{u=1\\v=1}} = 3$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3\times 3}} = \frac{1}{3}$$

ومنه $\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

2) ليكن السطح $y^2 + z^2 = x$ و المطلوب:

أوجد الشكل التربيعي الأول له.

الحل

$$I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

نفرض $y = u$, $z = v$ ومنه $x = u^2 + v^2$

أصبح لدينا:

$$\vec{r} = (u^2 + v^2 , u , v)$$

$$\vec{r_u} = (2u , 1 , 0)$$

$$\vec{r_v} = (2v , 0 , 1)$$

$$E = \vec{r_u}^{\,2} = 4u^2 + 1$$

$$F = \vec{r_u}\,\vec{r_v} = 4uv$$

$$G = \vec{r_v}^{\,2} = 4v^2 + 1$$

$$I = (4u^2+1)\,du^2 + 8uv\,du\,dv + (4v^2+1)\,dv^2$$

3 أثبت أن السطح:

$$\vec{r}(u,v) = (u+v , u-v , uv)$$

هو سطح بسيط وأوجد الناظم والمستوي المماس له في النقطة $(1,2)$.

الحل الناظم:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r_u} \wedge \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \wedge \vec{r_v}|}$$

$$\vec{r_u} = (1,1,v)\Big|_{(1,2)} = (1,1,2)$$

$$\vec{r_v} = (1,-1,u)\Big|_{(1,2)} = (1,-1,1)$$

$$\vec{r_u} \wedge \vec{r_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3,1,-2)$$

$|\vec{r_u} \wedge \vec{r_v}| = \sqrt{14}$

ومنه $\vec{n} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$

المستوي المماس:

$(x - x_0)\, x_{\vec{n}} + (y - y_0)\, y_{\vec{n}} + (z - z_0)\, z_{\vec{n}} = 0$

$\vec{r}(1,2) = (x_0, y_0, z_0) = (3, -1, 2)$

$(x-3)\frac{3}{\sqrt{14}} + (y+1)\frac{1}{\sqrt{14}} + (z-2)\frac{-2}{\sqrt{14}} = 0$

$3x + y - 2z - 4 = 0$

يكون السطح بسيط إذا كان: $\vec{r_u} \wedge \vec{r_v} \neq \vec{0}$

$$\vec{r_u} \wedge \vec{r_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & v \\ 1 & -1 & u \end{vmatrix} = (u+v, v-u, -2) \neq (0,0,0)$$

4) أوجد معادلة المستوي المماس للسطح $xy^2 + z^2 = 8$ في النقطة $(1, 2, 2)$.

الحل

$(x - x_0) F_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) F_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) F_z(x_0, y_0, z_0) = 0$

$F_x = y^2 \Big|_{(1,2,2)} = 4$ $\qquad F_y = 2yx \Big|_{(1,2,2)} = 4$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$F_z = 2z\Big|_{(1,2,2)} = 4$$

$$(x-1)4 + (y-2)4 + (z-2)4 = 0$$

$$4x + 4y + 4z - 20 = 0$$

معادلة المستوي المماس: $x + y + z - 5 = 0$

انتهت المحاضرة

مكتبة A to Z