كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : الهندسة التفاضلية

المحاضرة : **السادسة**/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

تعريف: نقول عن سطحين نظاميين أنهما متقايسان (إيزومتريان) إذا وجد بينهما تقابل يحافظ على أطوال المنحنيات، أي إذا كان للمنحني C_1 على السطح S_1 والصورة C_2 على السطح S_2 الطول ذاته.

برهنة: ليكن S_1 و S_2 سطحين نظاميين يوجد بينهما تقابل، عندئذ يكون السطحان متقايسان إذا وفقط إذا أمكن تمثيلهما وسيطياً بحيث يتطابق الشكل التربيعي الأول للسطح الأول مع الشكل التربيعي الأول للسطح الثاني.

مثال: ليكن المستوي المعين بـ: $x = u \quad y = v \quad z = 0$

$$r(u,v) = (u, v, 0)$$

$$r_u = (1, 0, 0) \qquad r_v = (0, 1, 0)$$

$$E = r_u^2 = 1 \qquad F = r_u r_v = 0 \qquad G = r_v^2 = 1$$

الشكل التربيعي الأول:

$$I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = du^2 + dv^2$$

ولنأخذ الأسطوانة الدائرية: $x = R\cos u \quad y = R\sin u \quad z = v$

$$r(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v)$$

$$r_u = (-R\sin u, R\cos u, 0) \qquad r_v = (0, 0, 1)$$

$E = r_u^2 = R^2 \qquad F = r_u r_v = 0 \qquad G = r_v^2 = 1$

الشكل التربيعي الأول :

$$I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = R^2\,du^2 + dv^2$$

إذا فرضنا أن $u_1 = R\,u$ وسيط الاسطوانة

$du_1 = R\,du$ u وسيط المستوي

و السطحان متقايسان $u_1 = R\,u \qquad v_1 = v$

استنتج مساحة الكرة ذات الشكل التربيعي :

$$I = R^2 \cos^2 v\,du^2 + 4R^2\,dv^2$$

$$E = R^2\cos^2 v \qquad F = 0 \qquad G = 4R^2$$

$$\sigma = \iint_w \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \iint_w \sqrt{4R^4\cos^2 v}\,du\,dv$$

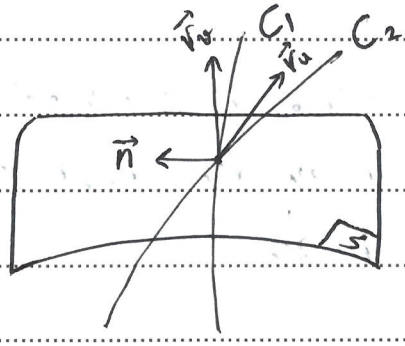
$$= 2R^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v\,du\,dv \qquad 0 \le u \le 2\pi \quad 0 \le v \le \frac{\pi}{2}$$

$$= 2R^2\,[u]_0^{2\pi}\,[\sin v]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2R^2(2\pi)(1)$$

$$= 4\pi R^2$$

الشكل التربيعي الثاني للسطح

ليكن لدينا السطح النظامي S ومعادلته المتجهية $r(u,v)$ في كل نقطة من نقاط هذا السطح توجد القاعدة المتحركة $\vec{r_u}, \vec{r_v}, \vec{n}$



يتجه واحدة الناظم: $\vec{n} = \dfrac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|}$

$\vec{n} \cdot \vec{r_u} = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{r_v} = 0$

$n^2 = 1 \Longrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$

لنأخذ الجداء الداخلي $\mathrm{II} = dr\, dn$

$dr = r_u\, du + r_v\, dv$

$dn = n_u\, du + n_v\, dv$

$$\text{(*)}\quad dr\, dn = (r_u \cdot n_u)\, du^2 + (r_u \cdot n_v + r_v \cdot n_u)\, du\, dv + (r_v \cdot n_v)\, dv^2$$

نسمي $\mathrm{II} = -d\vec{r}\, d\vec{n}$ الشكل التربيعي الثاني

يمكن كتابة هذه العلاقة بالشكل:

② $n\, r_v = 0$ ① $n\, r_u = 0$

نشتق العبارة ① بالنسبة لـ u و v:

بالنسبة لـ u: $n_u r_u + n\, r_{uu} = 0 \Longrightarrow \boxed{n\, r_{uu} = -n_u r_u}$

بالنسبة لـ v: $n_v r_u + n\, r_{uv} = 0 \Longrightarrow \boxed{n\, r_{uv} = -n_v r_u}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نشتق العبارة ② بالنسبة لـ u و v :

بالنسبة لـ u : $n_u r_v + n r_{vu} = 0 \Rightarrow \boxed{n r_{uv} = -n_u r_v}$

بالنسبة لـ v : $n_v r_v + n r_{vv} = 0 \Rightarrow \boxed{n r_{vv} = -n_v r_v}$

نعوض في العلاقة ⊛

$$II = -dr\,dn = -(-r_{uu}\,n\,du^2 - 2 r_{uv}\,n\,du\,dv - r_{vv}\,n\,dv^2)$$
$$= r_{uu}\,n\,du^2 + 2 r_{uv}\,n\,du\,dv + r_{vv}\,n\,dv^2$$

نرمز لـ : $L = r_{uu}\,n \quad M = r_{uv}\,n \quad N = r_{vv}\,n$

$$\boxed{II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}$$

إيجاد صيغة كساك لـ L و M و N :

$$L = r_{uu}\,n = r_{uu}\,\frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{(r_{uu}, r_u, r_v)}{|r_u \times r_v|}$$

$$= \frac{1}{|r_u \times r_v|}\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$M = r_{uv}\,n = r_{uv}\,\frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{(r_{uv}, r_u, r_v)}{|r_u \times r_v|}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \frac{1}{|r_u \times r_v|} \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$N = -r_{vv}\, n = r_{vv}\, \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{(r_{vv}, r_u, r_v)}{|r_u \times r_v|}$$

$$= \frac{1}{|r_u \times r_v|} \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

ويمكن تعويض :

$$|r_u \times r_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

مثال احسب الشكل التربيعي الثاني للأسطوانة :

$$x = R\cos u \qquad y = R\sin u \qquad z = v$$

الحل

$$r(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v)$$

$$r_u = (-R\sin u, R\cos u, 0)$$

$$r_v = (0, 0, 1)$$

$$r_{uu} = (-R\cos u, -R\sin u, 0)$$

$$r_{vv} = (0, 0, 0)$$

$$r_{uv} = (0, 0, 0)$$

$$E = r_u^2 = R^2 \qquad F = r_u r_v = 0 \qquad G = r_v^2 = 1$$

$$|r_u \times r_v| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{R^2 - 0} = R$$

$$\text{II} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

$$L = \frac{(r_{uu}, r_u, r_v)}{|r_u \times r_v|} = \frac{-R^2}{R} = -R$$

مبسط

$$(r_{uu}, r_u, r_v) = \begin{vmatrix} -R\cos u & -R\sin u & 0 \\ -R\sin u & R\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -R^2$$

$M = 0$ لأن $r_{uv} = (0,0,0)$

$N = 0$ لأن $r_{vv} = (0,0,0)$

ومنه $\text{II} = -R\,du^2$

وظيفة : احسب الشكل التربيعي الثاني للكرة :

$$r(u,v) = (R\cos u \sin v, R\sin u \sin v, R\cos v)$$

الحل الزائي :

$$\text{II} = R\sin^2 v\,du^2 + R\,dv^2$$

(6)

احسب مساحة سطح الطارة :

$$r(u,v) = ((b + a\cos v)\cos u, (b + a\cos v)\sin u, a\sin v)$$

$$\sigma = \iint_{\mathcal{U}} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv \qquad 0 \le u, v \le 2\pi$$

$$r_u = (-(b + a\cos v)\sin u, (b + a\cos v)\cos u, 0)$$

$$E = r_u^2 = (b + a\cos v)^2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$r_v = (-a \sin v \cos u, -a \sin v \sin u, a \cos v)$

$F = r_u \, r_v = 0$

$G = r_v^2 = a^2 \sin^2 v + a^2 \cos^2 v = a^2$

$$\sigma = \iint_R \sqrt{a^2 (b + a \cos v)^2} \, du \, dv$$

$$= a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (b + a \cos v) \, du \, dv$$

$$= 4ab\pi^2$$

تمرين للحل: أثبت أن المنحني:

$u = \ln t \qquad v = 2 \arctan t \qquad , t > 0$

الواقع على الكرة:

$r(u, v) = (\cos u . \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$

يقطع المنحنيات الإحداثية بزاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مراجعة

$r(t)$ متجه الموضع

$r'(t)$ متجه المماس

t وسيط عادي

s وسيط طبيعي وهو طول القوس $s = \int_0^t |r'(t)|\, dt$

$$\frac{ds}{dt} = |r'(t)|$$

بالنسبة للوسيط العادي:

متجه وحدة المماس: $T = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$

متجه وحدة تناظر الناظم: $B = \frac{r'(t) \times r''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|}$

متجه وحدة الناظم الأساسي: $N = B \times T$

بالنسبة للوسيط الطبيعي:

متجه وحدة المماس: $T = r'$

متجه وحدة الناظم الأساسي: $N = \frac{r''}{|r''|}$

متجه وحدة تناظر الناظم: $B = T \times N$

نستنتج: $T' = r'' \Rightarrow N = \frac{T'}{|T'|}$

$$T' = \frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \frac{T'}{\frac{ds}{dt}} = \frac{T'}{|r'(t)|}$$

$$N = \frac{T'}{|T'|} = \frac{\frac{T'}{|r'|}}{\left|\frac{T'}{|r'|}\right|} = \frac{T'}{|T'|}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$N^{\cdot} = \frac{N'}{|r'(t)|} \longrightarrow N' = N^{\cdot}\,|r'|$$

$$B^{\cdot} = \frac{B'}{|r'(t)|}$$

علاقات فرنيه :

① $T^{\cdot} = kN$ ② $N^{\cdot} = -kT + \tau B$ ③ $B^{\cdot} = -\tau N$

علاقات التقوس : من ①

$$|T^{\cdot}| = k\,|N| = k(1)$$
$$k = |T^{\cdot}| = |r^{\cdot\cdot}|$$

$$k = \frac{r' \times r''}{|r'|^3} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{|x'^2 + y'^2|^{\frac{3}{2}}} = \frac{y''_x}{(1 + y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}$$

علاقات الالتفاف : من ③

$$|B^{\cdot}| = \tau\,|N| = \tau(1)$$
$$\tau = |B^{\cdot}|$$

$$\tau = \frac{(r^{\cdot}, r^{\cdot\cdot}, r^{\cdot\cdot\cdot})}{|r^{\cdot\cdot}|^2} = \frac{(r', r'', r''')}{|r' \times r''|^2}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة