كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : الهندسة التفاضلية

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

الشكل التربيعي الأول للسطح

من حيث التعريف هو دالة ثنائية الخطية من فضاء متجهي إلى حقل الأعداد الحقيقية أو العقدية k أي $\mathbb{C}$ أو $\mathbb{R}$

$$\varphi : V \longrightarrow k$$
$$x \longrightarrow \varphi(x, x)$$

فإذا كانت $e_1, e_2, \ldots, e_n$ قاعدة في V فإن $x \in V$ يكتب بالشكل:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

والشكل التربيعي يكتب بالشكل:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

مثال: إذا كان x متجه ثنائي البعد $x = (x_1, x_2)$

الشكل التربيعي: $a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$

وهو يقابل المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

إذا كان المتجه $x = (x_1, x_2, x_3)$ ثلاثي البعد

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\, x_i\, x_j = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2$$

والآن: الشكل التربيعي الأول للسطح

ليكن $r = r(u,v)$ سطحاً نظامياً حيث: $dr = r_u\,du + r_v\,dv$

$$dr\,dr = (r_u\,du + r_v\,dv)(r_u\,du + r_v\,dv)$$
$$= r_u^2\,du^2 + 2\,r_u\,r_v\,du\,dv + r_v^2\,dv^2$$

$$E = r_u^2 \qquad F = r_u\,r_v \qquad G = r_v^2 \qquad I = dr^2$$

$$\boxed{I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

ملاحظات: ① $I > 0$ دوماً

② $I \neq 0$ لأنه إذا فرضنا أن $I = 0$

$$I = dr\,dr = 0 \Longrightarrow dr = 0$$
$$\vec{r_u}\,du + \vec{r_v}\,dv = 0$$

$\vec{r_u}, \vec{r_v} = 0$ ومنه $\vec{r_u} \wedge \vec{r_v} = 0$ وهذا تناقض

لأنه سطح نظامي

وبحالة $\vec{r_u}\,du = -\vec{r_v}\,dv$ واقعان في مستوٍ واحد

③ بما أن $I \neq 0$ ، $I > 0$ ، $\Delta < 0$

$$\Delta = 4F^2 - 4EG < 0$$
$$F^2 - EG < 0 \Longrightarrow EG - F^2 > 0$$

تطبيقات على الشكل التربيعي الأول للسطح

① طول منحنٍ على سطح

ليكن $r(u,v)$ سطح نظامي، إذا أمذنا في w (جزء من السطح) منحنٍ نظامي $u(t)$ ، $v(t)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$r(t) = r(u(t), v(t))$

لحساب طول المنحني على هذا السطح: $S = \int_a^b |r'(t)|\, dt$

$r'(t) = r_u\, u_t + r_v\, v_t$

$|r'(t)| = \sqrt{(r_u u_t + r_v v_t)(r_u u_t + r_v v_t)}$

$= \sqrt{r_u^2 u_t^2 + 2 r_u r_v u_t v_t + r_v^2 v_t^2} = \sqrt{E u_t^2 + 2F u_t v_t + G v_t^2} = \sqrt{I}$

$$S = \int_a^b \sqrt{I}\, dt$$

حيث $r'(t) \cdot r'(t) = |r'(t)|^2 \Rightarrow |r'(t)| = \sqrt{r'(t)\, r'(t)}$

نلاحظ أن $ds = \sqrt{I}$ المسافة أي $ds^2 = I$

ds عنصر المسافة (الشكل التربيعي الأول يعين مسافة)

الشكل التربيعي الأول I يعين الهندسة الداخلية للسطح

② إيجاد الزاوية بين منحنيين متقاطعين على السطح

إذا كان لدينا منحنيان متقاطعان على سطح من نقطة فالزاوية بينهما هي الزاوية بين مماسي لكل منهما في هذه النقطة

بفرض لدينا المنحنيان $r = r(u(t), v(t))$

$r_1 = r_1(u_1(t), v_1(t))$

واقعين على سطح نظامي S ومتقاطعان بنقطة $p(u, v)$

$$\cos\theta = \frac{r'(t) \cdot r_1'(t)}{|r'(t)| \cdot |r_1'(t)|}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$r_t = r_u\, u_t + r_v\, v_t$$

$$r_{1t} = r_u\, u_{1t} + r_v\, v_{1t}$$

$$|r_t| = \sqrt{r_u^2\, u_t^2 + 2\, r_u\, r_v\, u_t\, v_t + r_v^2\, v_t^2}$$

$$|r_{1t}| = \sqrt{r_u^2\, u_{1t}^2 + 2\, r_u\, r_v\, u_{1t}\, v_{1t} + r_v^2\, v_{1t}^2}$$

$$r_t\, r_{1t} = r_u^2\, u_t\, u_{1t} + r_u\, r_v\,(u_t\, v_{1t} + v_t\, u_{1t}) + r_v^2\, v_t\, v_{1t}$$

$$|r_t| = \sqrt{E\, u_t^2 + 2F\, v_t\, u_t + G\, v_t^2} = \sqrt{dr\, dr}$$

$$|r_{1t}| = \sqrt{E\, u_{1t}^2 + 2F\, u_{1t}\, v_{1t} + G\, v_{1t}^2} = \sqrt{\delta r\, \delta r}$$

$$r_t\, r_{1t} = E\,(u_t\, u_{1t}) + F\,(u_t\, v_{1t} + v_t\, u_{1t}) + G\,(v_t\, v_{1t})$$

$$dr = r_u\, du + r_v\, dv \qquad \delta r = r_u\, \delta u_1 + r_v\, \delta v_1$$

$$\cos\theta = \frac{E\, du\, \delta u_1 + F(du\, \delta v_1 + \delta u_1\, dv) + G(dv\, \delta v_1)}{\sqrt{I(d)}\ \sqrt{I(\delta)}}$$

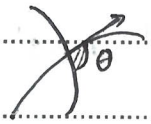
$$\boxed{\cos\theta = \frac{I(d,\delta)}{\sqrt{I(d)}\ \sqrt{I(\delta)}}}$$

أمثلة هامة :

أوجد الزاوية θ بين المنحنيات ذات الوسيط u و المنحنيات ذات الوسيط v

θ هي الزاوية بين متجه المماس للمنحني ذي الوسيط u و متجه

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة



المماس للمنحني ذي الوسيط v

أي الزاوية بين المتجهين r_u , r_v

$$\cos\theta = \frac{r_u r_v}{|r_u|\,|r_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

حيث $E = r_u^2$, $|r_u| = \sqrt{E}$

$G = r_v^2$, $|r_v| = \sqrt{G}$

ويكونا متعامدان إذا كان $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\cos\theta = 0 \Longrightarrow F = 0$

③ إيجاد مساحة جزء من سطح S معطى بالتمثيل $r(u,v)$

$$R = \iint_S \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

حالة خاصة:

عندما $x = u$, $y = v$, $z = z(u,v)$

$r(u,v) = (u, v, z(u,v))$

$r_u = (1, 0, z_u) \Longrightarrow E = r_u^2 = r_u r_u = 1 + z_u^2$

$r_v = (0, 1, z_v) \Longrightarrow G = r_v^2 = r_v r_v = 1 + z_v^2$

$F = r_u r_v = z_u z_v$

$$R = \iint_S \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

$$= \iint_S \sqrt{(1+z_u)^2(1+z_v)^2 - z_u^2 z_v^2}\, du\, dv$$

$$R = \iint_S \sqrt{z_u^2 + z_v^2 + 1}\, du\, dv$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: أوجد الشكل التربيعي الأول للسطح المعرف بـ (مستوي)

$x = u \quad , \quad y = v \quad , \quad z = 0$

$r(u, v) = (u, v, 0)$

$r_u = (1, 0, 0)$

$r_v = (0, 1, 0)$

$E = r_u^2 = 1 \qquad G = r_v^2 = 1 \qquad F = r_u r_v = 0$

$$I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$I = du^2 + dv^2$$

وظيفة: أوجد الشكل التربيعي الأول للسطح:

$r(u, v) = (R\cos u, R\sin u, v)$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z