كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : احصاء رياضي

المحاضرة :الثامنة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

TV_2 الأنحدار الخطي

أولاً: المفهوم العام إن مفهوم الأنحدار الخطي هو دراسة طبيعة العلاقة بين المتغيرين x و y كما وجدناها في الأرتباط الخطي لكن هنا يتم تحديد أيهما المؤثر بالآخر التابع أم المتغير في سبيل معرفة ذلك يمكن استخدام طريقة أخرى لدراسة العلاقة الأرتباطية بين المتغيرين وتسمى بطريقة الأنحدار:

"Regression"

في طريقة الأنحدار هذه نقوم بتمثيل العلاقات الأرتباطية بين المتغيرين بواسطة معادلة المستقيم ونفرض أن النقاط المتقابلة تنتشر على خط مستقيم أو حوله

x_i المتغير المستقل

y_i المتغير المفسر

وإن علاقة الأنحدار تعطى بالعلاقة

$$y = \alpha + \beta x$$

أما تقدير هذه العلاقة تعطى بالشكل

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$$

((تقدير علاقة الأنحدار))

$\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$ نواتج تقدير لـ α β لإيجاد $\hat{y}$ لدينا أكثر من طريقة

الطريقة الأولى: مربعات المربعات الصغرى: تعتمد هذه الطريقة على تصغير مجموع مربعات المربعات بين القيم المقابلة والمحددة والتي تؤول إلى حل معادلتين المعادلتين التاليتين:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \alpha n + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

نقوم بحل المعادلتين معاً معتمدين على معادلة التمثيل المقدرة

مثال: أوجد معادلة المستقيم لتمثيل العلاقة بين المتغير Y وهو عدد الطلاب X خلال ما أيام والمبينة بالجدول الآتي:

الأيام	x_i عدد الطلاب	y_i الربح	$x_i y_i$	x_i^2
1	5	4	20	25
2	9	5	45	81
3	6	8	48	36
4	8	13	104	64
5	10	15	180	100
6	11	13	143	121
7	12	12	144	144
8	7	9	63	49
9	4	6	24	16
10	3	8	24	9
Sum	75	93	765	645

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المعادلتين :

$$\begin{cases} 93 = \alpha 10 + \beta 75 \\ 765 = \alpha 75 + \beta 645 \end{cases}$$

بالحل المشترك

$$\alpha = 3.1 \qquad \beta = 0.8$$

وبالتالي تكون معادلة التقيل هي عبارة عن :

$$\hat{y}_i = 3.1 + 0.8 x_i$$

الطريقة الثانية : إيجاد معادلات $\hat{\beta}, \hat{\alpha}$ بأستخدام معامل بيرسون c

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \beta \bar{x}$$

$$\hat{\beta} = C \frac{S_y}{S_x}$$ (تباين مجهول)

$$\beta = C \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$ (تباين معلوم)

والمعادلة :

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X$$

تعريف : أوجد معادلة التقيل لمعدل طبيب مع عدد المرضى :

مثال : أوجد العلاقة بين تأثير الاستثمار العائد إذا وجدنا أن حجم الاستثمار وحجم الناتج هي علاقة خطية وكانت البيانات موضحة بالجدول :

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عدد الاستثمار	X حجم	Y حجم العائد	$\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})^2$
1	5	20	136	16	1156
2	7	40	28	4	196
3	8	55	-1	1	1
4	10	70	16	1	256
5	15	65	186	36	961
sum	45	270	365	58	2570

$$\bar{X} = 9$$

$$\bar{Y} = 54$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{58}{5}}$$

$$= \sqrt{11.6} = 3.4$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{2570}{5}}$$

$$= \sqrt{5.4} = 22.6$$

$$c = \frac{365}{5(3.4)(22.6)} = 0.95$$

$$\Rightarrow \beta = c\,\frac{S_y}{S_x}$$

$$= 0.95 \times \frac{22.6}{3.4} = 6.31$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\alpha = 5.4 - (6.31)(.9)$$

$$= -2.79$$

← علاقة التقدير

$$\hat{y} = 6.31x - 2.79$$

ثانياً: تفسير معادلة الانحدار وأستخداماتها مع ذكر طريقة حساب المعادلة:

$$y = \alpha + \beta x$$

على حسب طبيعة الارتباط بين المتغيرين لذلك نقوم بالخطوات التالية

1. نقسم الانحراف الكلي $(y - \bar{y})$ الى قسمين

a: القسم الأول:

$y_1 = \hat{y} - \bar{y}$ يمثل الانحراف المفسر

المقدرة — المتوسط

b: القسم الثاني

$y_2 = y - \hat{y}$ الانحراف الغير المفسر

2. نوضح التباين الكلي

$$\sum (y - \bar{y})^2 = \sum (\hat{y} - \bar{y})^2 + \sum (y - \hat{y})^2$$

التباين الكلي — التباين المفسر — التباين غير المفسر

3. يعطى معامل التحديد بالشكل:

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{y} - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2} = \frac{\text{المفسر}}{\text{الكلي}}$$

ولدينا الحالات التالية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

1) R^2 قريبة جدا من الواحد يمكن تفسير العلاقة الخطية والباقي غير مفسر

مثلاً: $R^2 = 90\%$ نقول عن علاقة الأعمار أنها جيدة (90% يمكن تفسيره)

$R^2 = 10\%$ يعني جدا بسيط (10% يمكن تفسيره)

2) كلما كان الباقي صغير كان عامل التحديد جيد جدا مع المتابعة مع عين المفسر.

ثالثا: التنبؤ النقطي والتنبؤ المجالي.

بعد معرفة شدة العلاقة بين X, Y وكمية أو مقدار التنبؤ

ويقسم التنبؤ إلى قسمين:

1) تنبؤ نقطي: من العلاقة $\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$

كل قيم x نعطينا قيم التنبؤ $\hat{Y}$

← بالعودة إلى معادلة حجم الاستثمار

$\hat{y} = 6.3x - 2.7$

نفرض $x = 20$ عن السنة

$\Rightarrow \hat{y} = 123.3$

وهكذا

2) تنبؤ المجالي: في مجال الثقة

$\hat{Y} - E < Y < \bar{Y} + E$

* E الخطأ في تقدير Y نعطى بالشكل:

$$E = T_{\frac{\alpha}{2}} \cdot Se \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{n(x_0 - \bar{x})^2}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حيث x_0 أصغر قيم x المثالية

$$Se = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n-2}}$$

* وتعطى معامل التحديد:

$$R^2 = 1 - \frac{S_e^2}{\sigma_y^2}$$

حيث S_e^2 مقدرة جيدة

كلما كان معامل التحديد قريب من الواحد كان تمثيل المعادلة الخطية جيد.

مثال: لدراسة جودة تمثيل المعادلة $\hat{y} = 0.786x + 3.716$ نقوم بإيجاد القيم المقدرة لـ $\hat{y}_i$ من معادلة التمثيل الحسوبة ثم نقوم بحساب مجموع مربعات الانحرافات القيم المقدرة $\hat{y}_i$ عن القيم المقيسة المقابلة y_i من الجدول:

I	1	2	3	4	5	6	7	Σ	
القيم المقيسة y_i	5	7	9	10	11	13	15	70	معطى
القيم المقدرة من المعادلة $\bar{y}_i = 0.786x_i + 3.716$	5.29	6.86	8.43	10	11.57	13.14	14.71	70	
$y_i - \bar{y}_i$	-0.29	0.14	0.57	0	0.57	-0.14	0.29	0	حسب
$(y_i - \bar{y}_i)^2$	0.0841	0.0196	0.325	0	0.325	0.0196	0.0841	0.8574	

من نتائج حسابات هذا الجدول نجد أن تباين المقيس (التباين غير مفسر) يساوي:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$S_e^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y}_i)^2}{n-2} = \frac{0.8574}{5} = 0.171$$

وبفرض أن التباين الكلي لـ Y يساوي $\sigma_y^2 = 10$

وبذلك يكون أن قيمة معامل التحديد R^2 ستساوي

$$R^2 = 1 - \frac{S^2}{\sigma_y^2} = 1 - \frac{0.171}{10} = 0.982$$

وهي قيمة قريبة جداً من الواحد وهي تدل على أن جودة تمثيل المعادلة للعلاقة بين X و Y هو تمثيل جيد جداً وهو يعني أن تغيرات X تفسر 98.29 % من تغيرات Y وأن الباقي يتم بسبب تغيرات المتغيرات الأخرى غير الداخلة في معادلة التمثيل.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z