كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية القياس

المحاضرة : الخامسة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التمرين الأول: إذا كانت X مجموعة ما غير منتهية أثبت أنّ

F = { A ∈ p(X) ; A منتهية أو $\bar{A}$ منتهية }

هو جبر في X وليس جبر تام في الحالة العامة؟

الحل:

بما أنّ X مجموعة ما غير منتهية أي أنّها تحوي على الأقل عنصراً واحداً

$\{a\} \in p(X) \iff \{a\} \in F \iff F \neq \{\phi\}$

① بما أنّ ϕ منتهية أي أنّ $\phi \in F$ ، X غير منتهية لكن $\bar{X} = \phi$ أي أنّ $X \in F$

② $A \cup B \in F$? $\forall A, B \in F$

نميز الحالات التّالية:

- الحالة الأولى: A منتهية و B منتهية واجتماع مجموعتين منتهيتين هو مجموعة منتهية وبالتالي $A \cup B \in F$
- الحالة الثانية: $\bar{A}$ منتهية و B منتهية عندئذٍ فإنّ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (منتهية / منتهية / منتهية) $\iff A \cup B \in F$
- الحالة الثالثة: A منتهية و $\bar{B}$ منتهية:

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \subset \bar{B}$ ($\bar{B}$ منتهية) $\Rightarrow \overline{A \cup B}$ منتهية $\Rightarrow A \cup B \in F$

- الحالة الرابعة: $\bar{A}$ منتهية و B منتهية:

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \subset A$ (A منتهية) $\Rightarrow \overline{A \cup B}$ منتهية $\Rightarrow A \cup B \in F$

③ $\bar{A} \in F$? $\Rightarrow \forall A \in F$

نميز حالتين:

• A منتهية : $\bar{\bar{A}} = \overline{(\bar{A})} \Rightarrow \bar{A} \in F$ منتهية

• $\bar{A}$ منتهية $\Leftarrow \bar{A} \in F$

بعد مناقشة الشروط ① و ② و ③ نجد أنّ F جبر في X

• F ليس جبراً تاماً في X لأنّه :

ولنأخذ $X=\mathbb{R}$ A_i متتالية منفصلة مثنى مثنى $A_i=\{i\}$ متتالية من عناصر F

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{i\} = \mathbb{N} \notin F$$

$\mathbb{N}$ غير منتهية و $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ غير منتهية

F ليس جبراً تاماً في الحالة العامة.

التمرين الثاني : F جبر تام في X ولنعرّف الصّف $F_1 : \{A \cap B \; ; \; B \in F\}$

أثبت أنّ F_1 جبر تام في A ؟

الحل: • F جبر تام في X بالتّالي $X \in F$ $\Leftarrow (A \cap X = A \in F_1 \Rightarrow F_1 \neq \phi)$

① F جبر تام في X بالتّالي $\phi \in F \Leftarrow A \cap \phi = \phi \in F_1$ ومنه $\phi \in F_1$

② لنأخذ عنصراً c من F_1 حيث : $B \in F$; $c = A \cap B$ $\leftarrow$ من F ولنبرهن أنّ $\bar{c} \in F$

$$\bar{c} = \overline{A \cap B} = A - (A \cap \bar{B}) = \phi \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap \bar{B}$$

بما أنّ $B \in F$ و F جبر تام إذاً $\bar{B} \in F$ ومنه $\bar{c} = A \cap \bar{B} \in F_1$

③ $c_i = \{A \cap B \; ; \; B_i \in F\}$ متتالية من عناصر F_1 منفصلة مثنى مثنى $\{c_i\}$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} c_i = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \in F_1$$

بعد مناقشة الشروط ① و ② و ③ نجد أنّ F_1 جبر تام في A

ملاحظة : • $p(x)$ جبر تام وكل جبر تام هو جبر $\Leftarrow p(x)$ جبر

• $\sigma(H)$ أصغر جبر يحوي H أي دوماً $H \subset \sigma(H)$

$\Leftarrow \sigma(H)$ هو جبر

التمرين الثالث : $X = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ وكانت $H = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{5\}\}$

أسرة جميع المجموعات المؤلفة من عنصر واحد والمطلوب اثبات أنّ $\sigma(H) = p(H)$ ؟

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

البرهان: يجب أن نثبت أنّ ① $\sigma(H) \subseteq p(H)$ و ② $p(x) \subseteq \sigma(H)$

نعلم أنّ $H \subseteq p(x)$ و $H \subseteq \sigma(H)$ حيثُ $p(x)$ جبر تام و $\sigma(H)$ هو أصغر جبر تام يحوي H بالتالي $\sigma(H) \subseteq p(x)$ وهو الاحتواء الأول.

• برهان الاحتواء الآخر:

نأخذ A عنصراً كيفياً من $p(x)$ حيثُ: $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$

من جهة أخرى لدينا أي عنصر من H هو مجموعة وحيدة العنصر $\{x_i\} \in H$

ولكن $H \subseteq \sigma(H)$ أي أنّ $\{x_i\} \in \sigma(H)$ و $\sigma(H)$ أصغر جبر تام يحوي H

وحسب شروط الجبر التام $A = \bigcup \{x_i\} \in \sigma(H)$

$p(x) \subseteq \sigma(H)$ وهو الاحتواء الثاني

من الاحتوائين يتم المطلوب $\sigma(H) = p(x)$.

التمرين الرابع برهن أنّهُ إذا كانت μ قياساً على الفضاء (X, D) فإنّ $\alpha \geq 0$ هو قياس على D ؟

الحل: المعطى: $\mu : D \to \bar{R}^+$ هو قياس

المطلوب: $\alpha\mu$ هو قياس.

① بما أنّ μ قياس $\mu(A) \geq 0 \quad ; \quad \forall A \in D$

خضرب بالعدد $\alpha \geq 0$ بالتالي: $(\alpha\mu)(A) \geq 0$

② بما أنّ μ قياس بالتالي $\mu(\phi) = 0$ نضرب بـ $\alpha \geq 0$ $\Leftarrow \alpha \cdot \mu(\phi) = \alpha \cdot 0 = 0$

③ A_i متتالية من عناصر D المنفصلة مثنى مثنى $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

نضرب بالعدد α حيث $\alpha \geq 0$

$$\Rightarrow \alpha\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

$$(\alpha\mu)\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha\mu(A_i)$$

الخاصة الجمعية التامة محققة

$\Leftarrow \alpha\mu$ دالة قياس.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التمرين الخامس: إذا كانت μ_1 و μ_2 دالتي قياس على D برهن أنّ $\mu_1+\mu_2$ قياس على D ؟

الحل: ① μ_1 قياس $\Rightarrow \forall A\in D \quad \mu_1(A)\geq 0$ } بالجمع $\Rightarrow (\mu_1+\mu_2)(A)\geq 0$

μ_2 قياس $\Rightarrow \mu_2(A)\geq 0$

② بما أنّ μ_1 و μ_2 قياس

$\mu_1(\phi)=0$ } $\Rightarrow (\mu_1+\mu_2)(\phi)=0+0=0$

$\mu_2(\phi)=0$

③ إذا كانت (A_i) متتالية من عناصر D منفصلة مثنى مثنى

$\mu_1(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_1(A_i)$ } $\Rightarrow \mu_1(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)+\mu_2(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=$

$\mu_2(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_2(A_i)$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_1(A_i)+\sum_{i=1}^{\infty}\mu_2(A_i)=$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}[\mu_1(A_i)+\mu_2(A_i)]=\sum_{i=1}^{\infty}(\mu_1+\mu_2)A_i$$

بعد مناقشة الشروط ① و ② و ③ نجد أنّ $\mu_1+\mu_2$ قياس

التمرين السادس: μ قياس على الفضاء (X,D) و $D_0\subset D$ و D_0 جبر تام فإنّ $N_0:D_0\longrightarrow \overline{R}^+$ هو قياس ؟

الحل:

① μ دالة قياس بالفرض $\forall A\in D_0 \quad ; \mu_0(A)=\mu(A)\geq 0$

② لدينا μ قياس $\mu_0(\phi)=\mu(\phi)=0$

③ A_i متتالية من العناصر D_0 المنفصلة مثنى مثنى وسوف نبرهن أنّ:

$$\mu_0(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_0(A_i)$$

لدينا: $\mu_0(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_0(A_i)$

$$\Rightarrow \mu_0(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_0(A_i)$$

الخاصة محققة وبالتالي μ_0 دالة قياس على D_0.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التمرين السابع: إذا كانت $X=\mathbb{N}$ وكانت μ دالة حيث: $\mu: 2^{\mathbb{N}} \to \overline{\mathbb{R}}^+$

$$\mu(A)=\begin{cases}0 & ; \quad A=\emptyset \\ 1 & ; \quad A\neq\emptyset\end{cases} \qquad A\subseteq\mathbb{N}$$

بيّن فيما إذا كان μ تابع قياس على $\mathbb{N}$ أم لا ؟

الحل:

① واضح من تعريف μ أنّ $\mu(A)\geq 0$ أي أنّ μ دالة غير سالبة

$\forall A\in 2^{\mathbb{N}}$ يوجد $A=\emptyset \Rightarrow \mu(A)=\mu(\emptyset)=0$

② إذا أخذنا $A_1=\{1\}$ و $A_2=\{2\}$ متتالية من عناصر $2^{\mathbb{N}}$ منفصلة مثنى

مثنى: $A_1\cap A_2=\emptyset$

$A_1\cup A_2=\{1,2\}$

$\mu(\cup A_i)=\mu(A_1\cup A_2)=\mu(\{1,2\})=1$ (مدّعى ليست صالحة حسب تعريف μ)

$\mu(A_1)=\mu(\{1\})=1$

$\mu(A_2)=\mu(\{2\})=1$

$\mu(A_1\cup A_2)=1 \neq \mu_1(A)+\mu_2(A_2)=1+1=2$

وبالتالي μ لا تحقق الخاصة الجمعية التامة

وبالتالي μ ليس قياس.

التمرين الثامن وظيفة

$\mu: 2^{x} \to [0,+\infty] \subseteq \overline{\mathbb{R}}^+$

$\mu(A)=\sqrt{|A|}$

حيث $|A|$ عدد عناصر المجموعة A وليس قيمة مطلقة

هل μ قياس على 2^x أم لا ؟

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة