كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية القياس

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

• خاصية الاستمرار من الأدنى (خاصية استمرار الاجتماع):

إذا كانت (X, D, μ) فضاء القياس μ وإذا كانت

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \dots \;;\; A_i \in D \;;\; i=1,2,\dots$

متتالية متزايدة من المجموعات المتوسطة من عناصر D عندئذٍ فإنّ:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

البرهان: لدينا:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i - A_{i-1})$$

وبفرض أنّ $A_0 = \phi$ وبالتالي فإنّنا نلاحظ أنّ $(A_i - A_{i-1})_{i \geq 1}$ متتالية من المجموعات المنفصلة مثنى مثنى وغير المتقاطعة (لأنّ $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$) وهي من D بالتالي فإنّ $\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i - A_{i-1}) \in D$ لأنّ D جبر تام

ويكون لدينا:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i - A_{i-1})\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i - A_{i-1})$$

حسب خاصة الجمعية التامة لـ μ.

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i - A_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\mu(A_i) - \mu(A_{i-1})\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\mu(A_1) - \mu(A_0) + \mu(A_2) - \mu(A_1) + \dots + \mu(A_{n-1}) + \mu(A_n)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

• خاصية الاستمرار من الأعلى (خاصية استمرار التقاطع):

إذا كانت (X, D, μ) فضاء القياس μ وإذا كانت $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots A_{i-1} \supseteq A_i \supseteq \dots$

حيث $A_i \in D \;,\; i=1,2,\dots$ متتالية متناقصة من عناصر D وبالتالي فإنّ:

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

ملاحظة هامة: ندعو المتتاليات المتزايدة والمتتاليات المتناقصة من المجموعات بمتتاليات مطّردة:

• نظرية الوحدانية: إذا كانت D حلقة (أو جبر) من أجزاء مجموعة ما غير خالية X وكان μ_1 و μ_2 قياسين σ- منتهيين ومعرفين على $\sigma(D)$ ومتساويين على D عندئذٍ فإنّ $\mu_1 = \mu_2$ على $\sigma(D)$

النظرية السابقة تعني أنّهُ إذا تساوت دالتا قياس على حلقة أو جبر فإنّهما تتساويان على الـ σ الجبر الأصغري الذي يحوي هذه الحلقة أو الجبر بشرط أن تكون الدالتين σ منتهيتين

• القياس التّام والمجموعات المهملة:

تعريف: ليكن (X, D, μ) فضاء القياس μ أو فضاء قياس و A مجموعة جزئية من X أي $A \subseteq X$. ندعو المجموعة A مجموعة مهملة بالنسبة للقياس μ أو اختصاراً A مجموعة μ مهملة إذا كانت محتواة بأكملها في مجموعة قيوسة وقياسها معدوم بالنّسبة لـ μ وبشكل رياضي:

A مجموعة μ مهملة إذا وفقط إذا

$$\exists B \in D \;;\; A \subseteq B \;;\; \mu(B) = 0$$

ينتج من التعريف السّابق: 1- كل مجموعة جزئية من مجموعة μ مهملة هي مجموعة μ مهملة أيضاً (لماذا؟)

أي إذا كانت A مجموعة μ مهملة و $C \subseteq A$ حيث C أي مجموعة كيفية جزئية من A عندئذٍ فإنّ C مجموعة μ مهملة لأنّ B مجموعة μ مهملة $\Leftarrow$

$$\exists B \in D \;;\; A \subseteq B \;;\; \mu(B) = 0$$

وبما أنّ $C \subseteq A$ وبالتّالي: $C \subseteq A \subseteq B \;\wedge\; B \in D \;\&\; \mu(B) = 0$

$\Rightarrow$ C مجموعة μ مهملة.

2- إذا كانت $A_1, A_2, \ldots$ مجموعات μ مهملة في فضاء القياس (X, D, μ) عندئذٍ فإنّ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة μ مهملة (أي الاجتماع العدود لمجموعات μ مهملة

هو مجموعة μ مهمولة)

البرهان: بما أنّ $A_1, A_2, \ldots$ مجموعات μ مهمولة وبالتّالي:

$$\left.\begin{array}{l} \exists G_1 \in D ;\ A_1 \subseteq G \ \&\ \mu(G_1)=0 \\ \exists G_2 \in D ;\ A_2 \subseteq G \ \&\ \mu(G_2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \subseteq G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \ldots \\ \text{أي: } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \end{array}$$

ولكن $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \in D$ لأنّ D جبر تام.

بقي علينا أن نبرهن أنّ $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right)=0$

لدينا $0 \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) = 0$

μ تحقق خاصة الجمعية التّامة $\Longrightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right)=0$

وبالتّالي $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة μ مهمولة.

3 - المجموعة المهمولة بالنّسبة لقياس مفروض ليس من الضروري أن تكون مجموعة مقيوسة بشكل عام للتّأكيد عليها سنأخذ مثال نوضّح من خلاله (3).

مثال: إذا كانت $\{X, \phi\}$ جبر تام في X وكانت μ_0 القياس الصّفري (أي قياس أي مجموعة مقيوسة وفقه تساوي الصّفر) المعرّف على هذا الجبر عندئذٍ فإنّ أي مجموعة جزئية A من X $(A \subseteq X)$ هي مجموعة μ_0 مهمولة لأنّه:

$$\exists X \in \{X, \phi\} ;\ A \subseteq X \ \&\ \mu_0(X)=0$$

ولكن A مجموعة ليست μ_0 مقيوسة لأنّ X , ϕ هما المجموعتان الوحيدتان المقيوستان بالنسبة لـ μ_0 في هذا الجبر التّام أي أنّ $A \notin D = \{X, \phi\}$

تذكرة: تعريف ممدد ومقصور دالة مجموعة:

إذا كانت φ دالة مجموعة معرفة بالشكل $\varphi : H_1 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$

$$A \longrightarrow \varphi(A) \quad ; \ \forall A \in H_1$$

وكانت $H_1 \subseteq H_2$ حيث H_1 و H_2 صفوف من أجزاء مجموعة ما غير خالية X عندئذٍ ندعو دالة المجموعة γ المعرّفة بالشكل التّالي: $\gamma : H_2 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$

$$A \longrightarrow \gamma(A) \quad ; \quad \forall A \in H_2$$

بمعدد الدالة φ من الصّف H_1 إلى الصف H_2 إذا كان : ; $\gamma(A) = \varphi(A)$
$\forall A \in H_1$

وندعو الدالة φ مقصور الدالة γ من الصّف H_2 إلى الصّف H_1.

ملاحظة: إنّ عملية تعريف جمدّد دالة تعني توسيع منطقة تعريفها وعملية تعريف مقصور دالة تعني تضييق منطقة تعريفها.

• تعريف القياس التّام: ليكن (X, D, μ) فضاء قياس نقول عن القياس μ أنّهُ قياساً تاماً إذا كانت كل مجموعة μ همولة هي مجموعة μ - قيوسة وبشكل رياضي نكتب:

μ قياس تام $\Leftrightarrow$ B مجموعة μ - قيوسة $\Leftarrow$ B مجموعة μ همولة $\forall$

ملاحظة هامة: عندما يكون القياس μ هو قياس تام عندئذٍ فإنّ مجموعة μ همولة هي مجموعة μ قيوسة وقياسها معدوم

والسؤال الذي يطرح نفسه بما أنّ القياسات نوعان قياسات تامة وقياسات غير تامة هل يمكن الحصول من قياس ما مفروض على قياس تام ؟

تعريف عملية تتميم قياس: وهو اجراء يتم من خلاله الحصول على قياس تام من قياس مفروض غير تام.

انتهت المحاضرة