كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

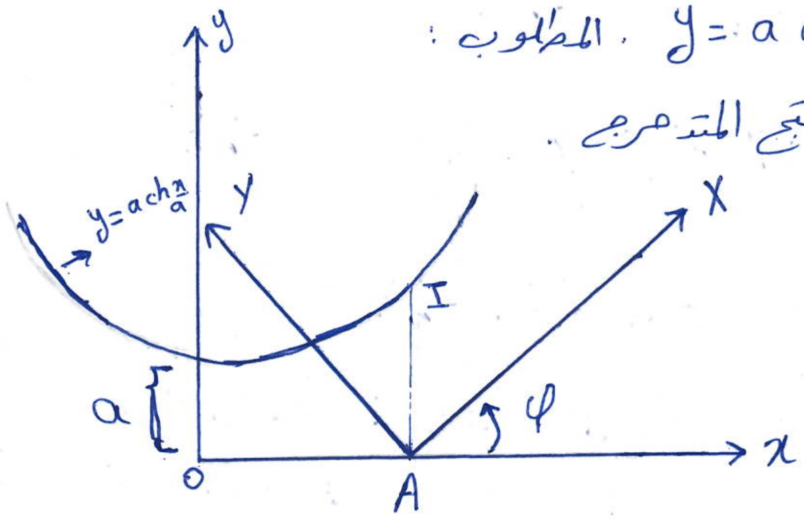
المادة : ميكانيك٢

المحاضرة : السادسة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

السؤال الأول: مستوي يتحرك في المستوي الثابت xoy بحيث أن نقطة من المستوي المتحرك ترسم المحور ox بسرعة ثابتة a ومنحني القاعدة لهذه الحركة هو المنحني $y = a\,ch\frac{x}{a}$. المطلوب: إيجاد معادلات الحركة ثم استنتج المتدحرج.



الحل: $x(A) = at$

$y(A) = 0$

لنوجد $\varphi = \varphi(t)$

لدينا منحني القاعدة $y(I) = a\,ch\frac{x(I)}{a}$

$$x(I) = x(A) - \frac{y'(A)}{\varphi'} = at$$

$$y(I) = y(A) + \frac{x'(A)}{\varphi'} = \frac{a}{\varphi'}$$

نعوض في منحني القاعدة:

$$\frac{a}{\varphi'} = a\,ch\frac{at}{a} \Rightarrow \varphi' = \frac{1}{cht} \quad ; \quad cht = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \int \frac{1}{cht}\,dt = \int \frac{2}{e^{t}+e^{-t}}\,dt = \int \frac{2e^{t}}{e^{2t}+1}\,dt$$

$$= 2\arctan e^{t}$$

معادلات الحركة:

$x(A) = at$

$y(A) = 0$

$\varphi = 2\arctan e^{t}$

لنوجد المتدحرج :

$$X(I) = \frac{x'(A)\sin\varphi - y'(A)\cos\varphi}{\varphi'} = a\sin\varphi \cdot ch t$$

$$= a\sin(2\arctan e^{t}) \cdot ch t$$

$$Y(I) = \frac{x'(A)\cos\varphi + y'(A)\sin\varphi}{\varphi'} = a\cos\varphi \cdot ch t$$

$$= a\cos(2\arctan e^{t}) \cdot ch t$$

وهي احداثيات المركز الآني للدوران في المستوي المتحرك وتمثل المعادلات الوسيطية للمتدحرج .

$$X^2 + Y^2 = a^2 ch^2 t \quad --- \; (*)$$

$$\varphi = 2\arctan e^{t} \Rightarrow \tan\varphi = \tan(2\arctan e^{t})$$

$$= \frac{2\tan(\arctan e^{t})}{1 - [\tan(\arctan e^{t})]^2}$$

$$= \frac{2e^{t}}{1 - e^{2t}}$$

(لدينا : $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ قانون)

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{2e^{t}}{1-e^{2t}}$$

لدينا من $(*)$: $\dfrac{X^2+Y^2}{a^2} = ch^2 t = \left(\dfrac{e^{t} + e^{-t}}{2}\right)^2 \quad --- \; (**)$

$$\tan\varphi = \frac{2e^{t}}{1-e^{2t}} = \frac{X}{Y} \Rightarrow (1 - e^{2t})\frac{X}{Y} = 2e^{t}$$

$$\frac{X}{Y} - \frac{X}{Y} e^{2t} = 2e^{t} \Rightarrow \frac{X}{Y} e^{2t} + 2e^{t} - \frac{X}{Y} = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية بحل :

$$e^{t} = \frac{-2 \mp \sqrt{4 + 4\frac{X^2}{Y^2}}}{2\frac{X}{Y}} = \frac{-Y \mp \sqrt{Y^2 + X^2}}{X}$$

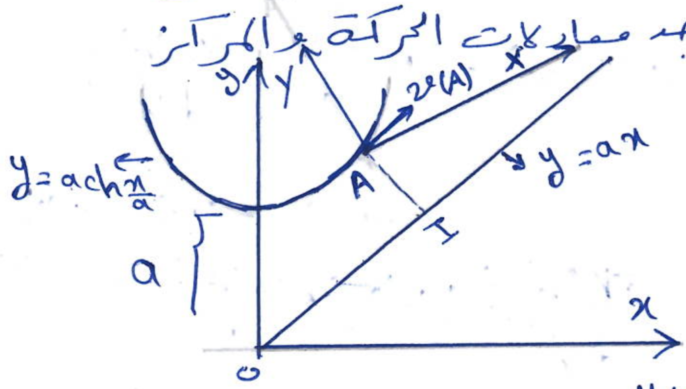
$$\Rightarrow e^{-t} = \frac{X}{-Y \mp \sqrt{Y^2 + X^2}}$$

نعوض في (**)

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{-Y \mp \sqrt{Y^2 - X^2}}{X} + \frac{X}{-Y \mp \sqrt{Y^2 + X^2}}\right)^2$$

وهو منحني المتدحرج .

السؤال الثاني : مستوٍ يتحرك على مستوٍ ثابت xoy بحيث أن القاعدة هي المستقيم $y = ax$ ونقطة من المستوي المتحرك ترسم المنحني $y = a\, ch \frac{x(A)}{a}$ بسرعة ثابتة، أوجد معادلات الحركة والمراكز الآني للدوران .



الحل

$$v(A) = \sqrt{x'^2(A) + y'^2(A)} = b$$

$$\Rightarrow x'^2(A) + y'^2(A) = b^2 \quad \text{---}(1)$$

$$y(A) = a\, ch \frac{x(A)}{a} \Rightarrow y'(A) = x'(A)\, sh \frac{x(A)}{a}$$

$$\Rightarrow x'^2(A)\left(1 + sh^2 \frac{x(A)}{a}\right) = b^2$$

$$x'^2(A)\, ch^2 \frac{x(A)}{a} = b^2$$

$$\Rightarrow x'(A)\, ch \frac{x(A)}{a} = b \Rightarrow \int ch \frac{x(A)}{a}\, dx(A) = \int b\, dt$$

$$\Rightarrow a\, Sh \frac{x(A)}{a} = bt + c \;;\; t = 0 \,,\, x(A) = 0$$ شروط البدء

$$\Rightarrow Sh \frac{x(A)}{a} = \frac{b}{a} t \Rightarrow x(A) = a \operatorname{arc} sh \frac{bt}{a}$$

$$y(A) = a\, ch\left(\operatorname{arc} sh \frac{b}{a} t\right) = a\sqrt{1 + sh^2\left(\operatorname{arc} sh \frac{b}{a} t\right)}$$

$$= a\sqrt{1 + \frac{b^2 t^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow y(A) = a\sqrt{1 + \frac{b^2 t^2}{a^2}}$$

$$x(I) = x(A) - \frac{y'(A)}{\varphi'} \quad , \quad y(I) = y(A) + \frac{x'(A)}{\varphi'}$$

$$y(I) = a\, x(I) \Rightarrow y(A) + \frac{x'(A)}{\varphi'} = a\left(x(A) - \frac{y'(A)}{\varphi'}\right)$$

$$a\, ch \frac{x(A)}{a} + \frac{dx(A)}{d\varphi} = a\left[x(A) - sh \frac{x(A)}{a} \cdot \frac{dx(A)}{d\varphi}\right]$$

بترتيب العلاقة السابقة :

$$a\left(ch \frac{x(A)}{a} - x(A)\right) = -\frac{dx(A)}{d\varphi}\left(1 + a\, sh \frac{x(A)}{a}\right)$$

$$d\varphi = -\frac{1 + a\, sh \frac{x(A)}{a}}{a\left(ch \frac{x(A)}{a} - x(A)\right)}\, dx(A)$$

$$\Rightarrow \varphi = -\int \frac{1 + a\, sh \frac{x(A)}{a}}{a\left[ch \frac{x(A)}{a} - x(A)\right]}\, dx(A)$$

معادلات الحركة :

$$x(A) = a \operatorname{arc\,sh} \frac{b}{a} t$$

$$y(A) = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} t}$$

$$\varphi = -\int \frac{1 + a\,\mathrm{sh}\frac{x(A)}{a}}{a\left[\mathrm{ch}\frac{x(A)}{a} - x(A)\right]}\, dx(A)$$

$$X(I) = \frac{x'(A)\sin\varphi - y'(A)\cos\varphi}{\varphi'} = \frac{dx(A)}{d\varphi}\sin\varphi - \frac{dy(A)}{d\varphi}\cos\varphi$$

$$= \left[\sin\varphi - \mathrm{sh}\frac{x}{a}\cos\varphi\right]\left[\frac{-a\left(\mathrm{ch}\frac{x(A)}{a} - x(A)\right]}{1 + a\,\mathrm{sh}\frac{x(A)}{a}}\right]$$

$$Y(I) = \frac{x'(A)\cos\varphi + y'(A)\sin\varphi}{\varphi'} = \left(\cos\varphi + \mathrm{sh}\frac{x(A)}{a}.\sin\varphi\right)\frac{dx(A)}{d\varphi}$$

$$= \left[\cos\varphi + \mathrm{sh}\frac{x(A)}{a}.\sin\varphi\right]\left[\frac{-a\left(\mathrm{ch}\frac{x(A)}{a} - x(A)\right)}{1 + a\,\mathrm{sh}\frac{x(A)}{a}}\right]$$