كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك٢

المحاضرة : الخامسة/عملي/

مسألة حول الحركة حول نقطة ثابتة :

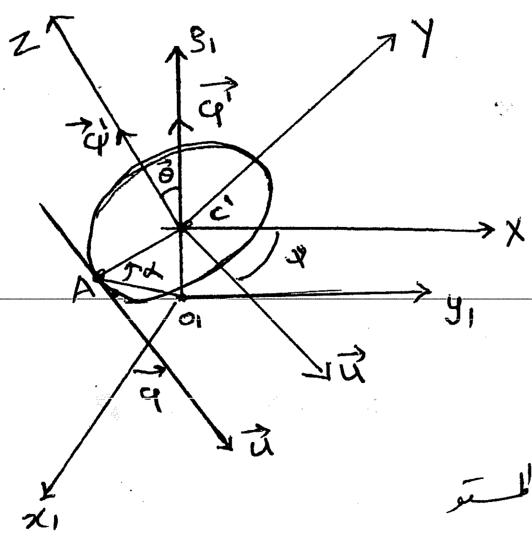
قرص دائري يستطيع الحركة حول مركزه الثابت c' بحيث يبقى مستنداً على مستوٍ ثابت ox_1y_1 حيث النقطة o تقع على الشاقول المار من c' وتبعد عنها مسافة $c < r$ (حيث r نصف قطر القرص) والمستوي x_1oy_1 أفقي :

1 - عين وسطاء الحركة ومتجه الدوران .

2 - أوجد مركبات متجه الدوران على المحاور الثابتة ثم على محاور متماسكة مع القرص .

3 - أوجد العلاقة بين الوسطاء إذا كانت الحركة تدحرج بدون انزلاق

4 - نفرض ان الحركة تدحرج بدون انزلاق وأن طول متجه الدوران ثابت اوجد معادلات الحركة ومعادلات المحور الآني للدوران ومعادلات مخروطي القاعدة والمتدحرج



الحل : إن الحركة هي حركة جسم صلب حول نقطة ثابتة فلها ثلاثة وسطاء θ و φ و ψ ولكن القرص مجبر أن يمس مستوٍ ثابت ox_1y_1 يبعد مركز القرص عنه مسافة $c < r$ (إذاً هنا قيد يلغي أحد الوسطاء فيبقى للحركة وسيطين) ، θ الزاوية بين ناظم المستوي الثابت x_1oy_1 وناظم القرص (وهي تساوي الزاوية بين المستوي x_1oy_1 ومستوي القرص) ولكن هذه الزاوية هي زاوية ثابتة بالفرض حيث :

$\sin\theta = \sin\alpha = \frac{c}{r}$ اي ان $\theta = \alpha$ ثابت

وهذا يعني أنه لا يوجد للجسم حركة تأرجحية .

إذن للحركة وسيطين لنعينهما :

نرسم مماس للقرص في نقطة التماس مع المستوي x_1oy_1 وليكن Au فتكون :

- الزاوية φ هي الزاوية بين Au و ox_1 فيكون $\vec{\varphi'}$ محمولاً على oz_1

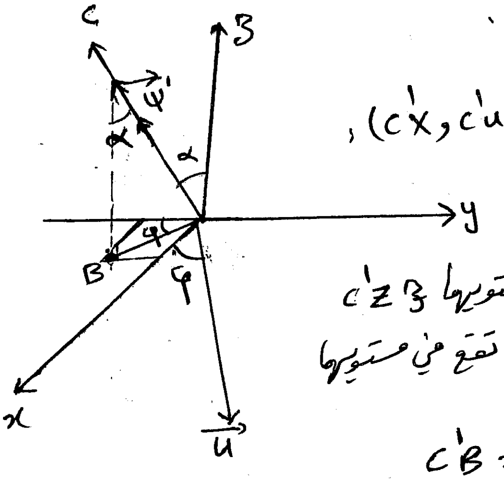
- ولتكن ψ هي الزاوية بين $c'u$ والمحور $c'x$ ($c'u$ هو محور موازي لـ Au ويمر من المركز c') فيكون $\vec{\psi'}$ محمولاً على $c'z$.

ومتجه الدوران $\vec{\omega} = \vec{\theta'} + \vec{\psi'} + \vec{\varphi'}$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\varphi'} + \vec{\psi'} \quad ; \quad \theta' = 0$$

متجه الدوران $\vec{\omega}$ موجود في المستوى $C'Z$ و OZ_1 حيث $\vec{w} = \varphi'\vec{k} + \psi'\vec{K}$

$\boxed{2}$ لنوجد مساقط متجه الدوران على المحاور الثابتة والمتحركة.



لدينا الزاوية بين المحور $C'y$ و $C'B$ هي φ بالتعامد مع $(C'x, C'u)$،

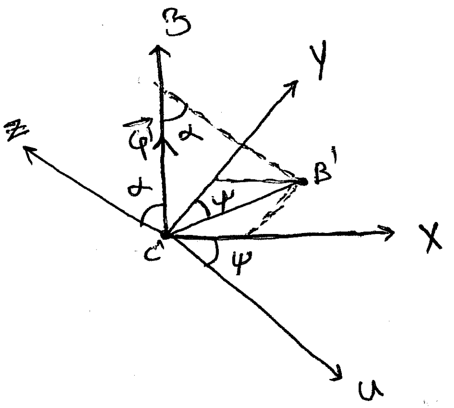
وذلك لأن:

$C'B \perp C'u$

$C'y \perp C'x$

$\begin{cases} C'Z_1 \perp C'\vec{u} \\ C'Z \perp C'\vec{u} \end{cases} \Leftarrow C'\vec{u} \perp$ مستويها $C'ZZ_1$ و $C'B$ تقع في مستويها

بالتالي مسقط $\vec{\psi}'$ على المستوى x_1Oy_1 (xOy) هو $C'B = \psi'\sin\alpha$



ومسقطها على Ox : $\psi'\sin\alpha\sin\varphi$

ومسقطها على Oy : $-\psi'\sin\alpha\cos\varphi$

ومسقطها على OZ : $\psi'\cos\alpha$

بالتالي مساقط $\vec{\omega}$ على المحاور الثابتة

$$\begin{cases} p = \psi'\sin\alpha\sin\varphi \\ q = -\psi'\sin\alpha\cos\varphi \\ r = \varphi' + \psi'\cos\alpha \end{cases}$$

لنوجد المساقط على المحاور المتحركة:

لدينا الزاوية بين $C'B$ و $C'Y$ تساوي ψ بالتعامد لأن:

$C'B' \perp C'u$

$C'Y \perp C'X$

$\begin{cases} C'Z_1 \perp C'\vec{u} \\ C'Z \perp C'\vec{u} \end{cases} \Leftarrow$ $C'u$ عمودي على مستويها و $C'B'$ من هذا المستوي ومنه $C'B' \perp C'u$

وبالتالي مسقط φ' على المستوي $C'XY$ هو $C'B' = \varphi'\sin\alpha$

أما مسقط $\vec{\varphi}'$ على $C'X$ هو $\varphi'\sin\alpha\sin\psi$

ومسقط $\vec{\varphi}'$ على $C'Y$ هو $\varphi'\sin\alpha\cos\psi$

ومسقط $\vec{\varphi}'$ على $C'Z$ هو $\varphi'\cos\alpha$

بالتالي مساقط $\vec{\omega}$ على المحاور المتحركة :

$$P = \varphi' \sin\alpha \sin\psi$$
$$Q = \varphi' \sin\alpha \cos\psi$$
$$R = \psi' + \varphi' \cos\alpha$$

$\boxed{3}$ إذا كانت الحركة تدحرج بدون انزلاق فيجب ان تكون سرعة نقطة التماس بالمستوي معدومة أي ان $\vec{v}(A) = 0$ اي ان A هي نقطة من المحور الاني للدوران .
ونعلم ان المحور الآني للدوران يمر من النقطة الثابتة c' إذا المحور الاني للدوران هو المحور المار من c' و A وهاتان النقطتان تقعان على القرص إذاً المحور الاني للدوران يقع دوماً في مستو القرص .
وبما ان المحور الآني للدوران يوازي متجه الدوران $\vec{\omega}$ إذاً متجه الدوران محمول على المستقيم $c'A$ وبالتالي ناظمي على $c'z$ ⇐ مسقط متجه الدوران على $c'z$ يساوي الصفر ومنه $R = 0$

$$\psi' + \varphi' \cos\alpha = 0 \Rightarrow \psi' = -\varphi' \cos\alpha \Rightarrow \psi = -\varphi \cos\alpha + a$$

في اللحظة $t = 0$ كانت A منطبقة على O اي $\alpha = \frac{\pi}{2}$ و $\psi = 0$ ⇐ $a = 0$

ومنه $\boxed{\psi = -\varphi \cos\alpha}$ وهي العلاقة بين الوسيطين ψ و φ .

$\boxed{4}$

$$\omega^2 = P^2 + Q^2 + R^2 = P^2 + Q^2 = \varphi'^2 \sin^2\alpha = \omega_0^2$$
$$\Rightarrow \varphi' = \frac{\omega_0}{\sin\alpha} \Rightarrow \varphi = \frac{\omega_0}{\sin\alpha} t$$
$$\Rightarrow \psi = -\varphi \cos\alpha = -\frac{\omega_0}{\sin\alpha} \cos\alpha\, t \Rightarrow \boxed{\psi = -\omega_0 t \cdot ctg\alpha}$$

ومعادلات الحركة هي :

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi &= \frac{\omega_0 t}{\sin\alpha} \\ \psi &= -\omega_0\, ctg\alpha \cdot t \end{aligned}}$$

مخروط القاعدة : لتكن I نقطة من المحور الاني للدوران :

$I(x,y,z)$ ، $c'(0,0,c)$ $\qquad \overrightarrow{c'I} \parallel \vec{w}$

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z-c}{r}$$

$$\frac{x}{\psi' \sin\alpha \sin\varphi}=\frac{y}{-\psi' \sin\alpha \cos\varphi}=\frac{z-c}{\varphi'+\psi' \cos\alpha}$$

$$\frac{x^2+y^2}{\psi'^2 \sin^2\alpha}=\frac{(z-c)^2}{(\varphi'+\psi'\cos\alpha)^2}=\frac{(z-c)^2}{(\varphi'-\varphi'\cos^2\alpha)^2}$$

$$\frac{x^2+y^2}{\varphi'^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}=\frac{(z-c)^2}{\varphi'^2(1-\cos^2\alpha)^2} \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{\cos^2\alpha}=\frac{(z-c)^2}{\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=\operatorname{ctg}\alpha\,(z-c)^2$$

معادلة مخروط دوراني محوره oz رأسه $c'(0,0,c)$ ونصف قطر زاويته الرأسية $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ وهو مخروط القاعدة .

مخروط المتدحرج :

$$\frac{X}{P}=\frac{Y}{Q}=\frac{Z}{R}$$

من الفرض $R=0$ اي ان مسقط متجه الدوران على $c'z$ معدوم $\Leftarrow$ متجه الدوران يقع في مستوي القرص إذا محله الهندسي $\boxed{Z=0}$ وهو المتدحرج .