كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك٢

المحاضرة :الرابعة/عملي/

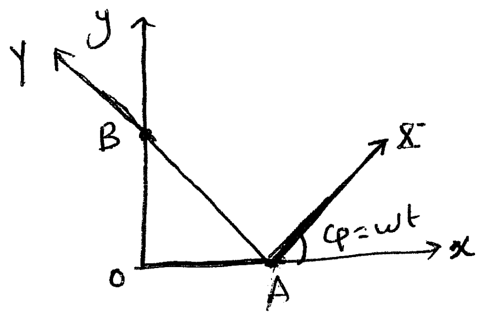
{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

المسألة الأولى: AB قضيب طوله l والنقطة B تتحرك على المحور الشاقولي Oy والنقطة A تتحرك على المحور الأفقي Ox ويدور القضيب بسرعة زاوية ثابتة أوجد معادلات الحركة وإحداثيات المركز الآني للدوران ومحليه الهندسيين وبرهن أن المحل الهندسي للتسارع هو دائرتين.

الحل: معادلات الحركة

$$\varphi = \omega t$$
$$x(A) = l \sin \omega t$$
$$y(A) = 0$$



إحداثيات المركز الآني للدوران في المستوي الثابت

$$x(I) = x(A) + \frac{y'(A)}{\varphi'} = l \sin \omega t$$
$$y(I) = y(A) + \frac{x'(A)}{\varphi'} = l \cos \omega t$$

المحل الهندسي $x^2 + y^2 = l^2$ وهي دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها l وهي تمثل منحني القاعدة.

أما إحداثيات المركز الآني في المستوي المتحرك

$$X(I) = \frac{x'(A) \sin \varphi - y'(A) \cos \varphi}{\varphi'} = l \cos \omega t \sin \omega t = \frac{l}{2} \sin 2\omega t$$

$$Y(I) = \frac{x'(A) \cos \varphi + y'(A) \sin \varphi}{\varphi'} = l \cos^2 \omega t = \frac{l}{2}(1 + \cos 2\omega t)$$

والمحل الهندسي $X^2 + (Y - \frac{l}{2})^2 = (\frac{l}{2})^2$ وهي دائرة مركزها $(0, \frac{l}{2})$ ونصف قطرها $\frac{l}{2}$ وهي تمثل منحني المتدحرج.

مركز التسارع:

$$\vec{\Gamma}(A) + \varphi'' \wedge \vec{AC} - \varphi'^2 \vec{AC} = 0$$
$$\Rightarrow \vec{AC} = \frac{\vec{\Gamma}(A)}{\varphi'^2} = \frac{\vec{\Gamma}(A)}{\omega^2}$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \frac{\vec{\Gamma}(A)}{w^2}$$

بالإسقاط على oxy

$$x(c) = l\sin wt - l\sin(wt) = 0$$
$$y(c) = 0$$

المركز الآني للتسارع في المستو الثابت هو $x(c)=0$ و $y(c)=0$ وهو مبدأ الإحداثيات إذاً المحل الهندسي في المستو الثابت هو نقطة (دائرة مركزها o ونصف قطرها 0)

$$X(c) = \frac{\ddot{x}_A\cos\varphi + \ddot{y}_A\sin\varphi}{\varphi'^2} = l\sin wt\cos wt = \frac{l}{2}\sin 2wt$$

$$Y(c) = \frac{-\ddot{x}(A)\sin\varphi + \ddot{y}(A)\cos\varphi}{\varphi'^2} = l\sin wt\sin wt = \frac{l}{2}(1-\cos 2wt)$$

والمحل الهندسي:

$$X^2 + \left(Y - \frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

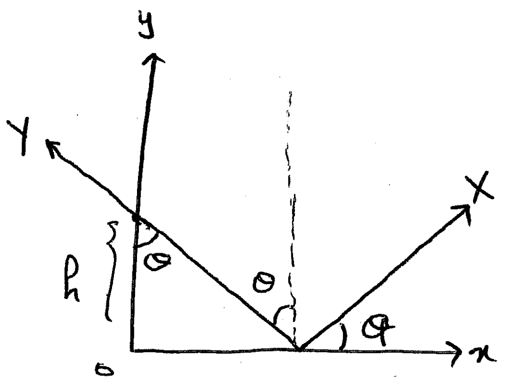
وهي دائرة مركزها $(0, \frac{l}{2})$ ونصف قطرها $\frac{l}{2}$.

المسألة الثانية:

AB سلم طوله l طرفه A ينزلق على المحور الأفقي ox بسرعة ثابتة v بحيث يبقى السلم مستنداً على حافة طاولة ارتفاعها h والمطلوب:

① - أوجد معادلات الحركة وإحداثيات المركز الآني للدوران في المستويين الثابت والمتحرك

② - أوجد باستخدام المركز الآني للدوران سرعة النقطة B و النقطة ذات السرعة الأصغرية من السلم



معادلات الحركة

$$x'(A) = v \Rightarrow x(A) = vt$$
$$y(A) = 0$$

$$tg\,\theta = \frac{x(A)}{h} = \frac{vt}{h}$$

إحداثيات المركز الآني للدوران:

$$x(I) = x(A) - \frac{y'(A)}{\varphi'} = vt = h\,tg\theta$$

$$y(I) = y(A) + \frac{x'(A)}{\varphi'} = \frac{v}{\theta'}$$

لنوجد θ'

$$tg\theta = \frac{vt}{h} \Rightarrow (1+tg^2\theta)\theta' = \frac{v}{h}$$

$$\Rightarrow \theta' = \frac{v}{h}/(1+tg^2\theta) = \frac{v}{h}\cos^2\theta$$

بالتعويض عن احداثيات المركز الآني للدوران في المستوي الثابت

$$x(I) = h\,tg\theta$$

$$y(I) = \frac{h}{\cos^2\theta} = h(1+tg^2\theta)$$

لايجاد المحل الهندسي

$$tg\theta = \frac{x}{h} \Rightarrow y = h\left(1+\frac{x^2}{h^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{h} = \frac{h^2+x^2}{h^2} \Rightarrow hy - h^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = h(y-h)$$

وهو المحل الهندسي للمركز الآني وهو قطع مكافئ محوره oy مركزه $(0,h)$

ووسيطه $\frac{h}{2}$ وهو يمثل منحني القاعدة.

* المركز الآني للدوران في المستوي المتحرك:

$$X(I) = \frac{x'_A\sin\theta - y'(A)\cos\theta}{\theta'} = \frac{v\sin\theta}{v/h\,\cos^2\theta} = h(1+tg^2\theta)\sin\theta$$

$$Y(I) = \frac{x'_A\cos\theta + y'(A)\sin\theta}{\theta'} = \frac{v\cos\theta}{v/h\,\cos^2\theta} = h(1+t^2g\theta)\cos\theta$$

$$\frac{X}{Y} = tg\theta \Rightarrow Y = h\left(1+\frac{X^2}{Y^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{X^2}{Y^2}}}$$

$$\Rightarrow Y\sqrt{1+\frac{X^2}{Y^2}} = h\left(1+\frac{X^2}{Y^2}\right) \Rightarrow Y^2 = h^2\left(1+\frac{X^2}{Y^2}\right)$$

$$\Rightarrow Y^4 = h^2(Y^2+X^2)$$

وهي معادلة المتدحرج

② - إن سرع النقاط تتوزع كما لو كانت المسارات دوائر مركزها I

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{IM} \Rightarrow v(M) = \theta' IM$$

$$v = IA \cdot \theta' \quad \circledast \quad IA = \frac{AP}{\cos\theta},\ \overline{AP} = \frac{h}{\cos\theta} \Rightarrow v = \frac{h}{\cos^2\theta}\,\theta'$$

$$\theta' = \frac{v\cos^2\theta}{h}$$

$$\Rightarrow v(P) = IP \cdot \theta' \Rightarrow IP = IA\sin\theta = \frac{h}{\cos\theta}\cdot\sin\theta$$

$$\Rightarrow v(B) = IB \cdot \theta' \ * \quad \overline{IB}^2 = \overline{BP}^2 + PI^2$$

$$BP = AB - PA = l - \frac{h}{\cos\theta}$$

$$\left.\begin{array}{l} BP = l - \frac{h}{\cos\theta} \\ PI^2 = IA^2 - PA^2 = \left(\frac{h}{\cos\theta}\right)^2 - \frac{h}{\cos^2\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow IB^2 = \left(l - \frac{h}{\cos\theta}\right)^2 + \frac{h^2}{\cos^4\theta} - \frac{h^2}{\cos^2\theta}$$

$$IB^2 = l^2 - \frac{2lh}{\cos\theta} + \frac{h^2}{\cos^4\theta}$$