كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي٢

المحاضرة :السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الباقي اللوغاريتمي ومبدأ الشعة:

تعريف: الشعة اللوغاريتمي لدالة $f(z)$ ونرمز له الدالة $\varphi(z)$ وهي مشتق لوغاريتم الدالة $F(z)$:

$$\varphi(z) = [\ln(F(z))]' = \frac{F'(z)}{F(z)} \quad \dots (1)$$

- النقاط الشاذة لدالة $\varphi(z)$ يمكن أن تكون أصفار الدالة $F(z)$ أو نقاطها الشاذة.

ويكون الباقي (الراسب) للشعة اللوغاريتمية لدالة $F(z)$ بالنسبة إلى نقطة هي أصفر لدالة $F(z)$ يساوي رتبة الصفر وبالنسبة إلى نقطة هي قطب لدالة $F(z)$ يساوي رتبة القطب مضروباً بإشارة سالب. يعني أنه إذا كانت z_0 صفر من المرتبة m لدالة $F(z)$ بالتالي الراسب للشعة اللوغاريتمية عند z_0:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \varphi(z) = m$$

وإذا كانت z_1 قطب من المرتبة n لدالة $F(z)$ بالتالي الراسب للشعة اللوغاريتمية

$$\operatorname{res}_{z=z_1} \varphi(z) = -n$$

مثال: أوجد راسب الشعة اللوغاريتمية لدالة $F(z) = \frac{\sin z}{z+1}$ بالنسبة لأصفارها وأقطابها؟

الحل: أصفار الدالة $F(z)$ هو حل المعادلة $F(z)=0 \Leftarrow \sin z = 0$

$$z_k = k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

وجميعها أصفار بسيطة $\operatorname{res}_{z=z_k} \varphi(z) = 1 \quad ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

أقطاب الدالة $F(z)$ هي حل المعادلة $z+1=0$

$$\Rightarrow z = -1$$

وهو قطب من المرتبة الأولى

بالتالي: $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ ؛ $\operatorname{res}_{z=z_k} \varphi(z) = -1$

تعريف لتكن الدالة $f(z)\neq 0$ تحليلية عند جميع نقاط المحيط المغلق c . نسمّي القيمة

الباقي اللوغاريتمي $\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ ... (2)

للدالة $f(z)$ بالنسبة

للمحيط المغلق c

• **نظرية الباقي اللوغاريتمي:** لتكن الدالة $f(z)$ تحليلية في المجال المغلق D باستثناء عدد

محدود من الأقطاب وعلى حدود هذا المجال c لا يوجد لها أقطاب ولا أصفار

عندئذٍ يكون الفرق بين عدد الأصفار والأقطاب لدالة $f(z)$ في D محسوباً مع رتبتها،

مساوياً للباقي اللوغاريتمي للدالة $f(z)$ بالنسبة للمحيط المغلق c

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P \quad \dots (3)$$

N هي عدد الأصفار $f(z)$ في D محسوبة مع رتبتها

P هي عدد الأقطاب $f(z)$ في D محسوبة مع رتبتها.

مثال: أوجد الباقي اللوغاريتمي لدالة $f(z)=\frac{ch z}{e^{iz}-1}$ بالنسبة لـ $c: |z|=8$

الحل: • أصفار الدالة $f(z)$ هي حلول المعادلة $f(z)=0 \Leftarrow ch z=0$

$$e^z+e^{-z}=0 \Rightarrow e^{-z}(e^{2z}+1)=0 \Rightarrow e^{2z}=-1=e^{(2m+1)\pi i}$$

$$\Rightarrow 2z=(2m+1)\pi i \Rightarrow z_m=\frac{2m+1}{2}\pi i \quad ; \quad m=0,\pm 1,\pm 2$$

جميعها أصفار بسيطة

• الأقطاب هي حل المعادلة $e^{iz}=1$ حيث : $e^{iz}=1$

$$e^{iz}=1 \Rightarrow e^{2k\pi i} \Rightarrow iz=2k\pi i \quad ; \quad k\in \mathbb{Z}$$

$z_k=2k\pi \quad ; \quad k=0,\pm 1,\pm 2,\dots$ وهي أقطاب بسيطة

داخل القرص $D: |z|\le 8$ لدينا:

$m=0 \; ; \; z_0=\frac{\pi}{2}i\in D$ ، $m=1 \; ; \; z_1=\frac{3}{2}\pi i\in D$

$m=2 \; ; \; z_2=\frac{5}{2}\pi i\in D$ ، $m=3$ و $z_3=\frac{7}{2}\pi i\notin D$

$m=-1$ و $z_{-1}=-\frac{1}{2}\pi i\in D$ ، $m=-2$ ، $z_{-2}=-\frac{3}{2}\pi i\in D$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$m=-3 \quad , \quad z_3 = -\frac{5}{2}\pi i \in D \quad \Rightarrow N=6$

$z_m = \frac{2m+1}{2}\pi i \quad ; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

عدد الأقطاب p داخل D : $|z| \leq 8$

$z_k = 2k\pi \quad ; \quad k = (0, \pm 1) \quad \Rightarrow p = 3$

وعنه حسب نظرية الباقي اللوغاريتمي نجد $\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - p = 6-3 = 3$

مثال: أوجد الباقي اللوغاريتمي للدالة $f(z) = \frac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$; $c: |z| = \pi$

الحل:

نوجد أصفار الدالة $f(z)$: $z^2+1=0 \Rightarrow z^2 = i^2 \Rightarrow z = \pm i \in z \leq \pi$

$\Rightarrow N = 2$

أقطاب الدالة $1-\cos 2\pi z = 0$

$\Rightarrow \cos 2\pi z = 1 \Rightarrow 2\pi z = 2\pi k \Rightarrow z = k \quad ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$z = k \quad ; \quad k = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$

أقطاب داخل $|z| < \pi \Leftarrow p = 7$

$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - p = 2 - 7 = -5$

مثال: أوجد الباقي اللوغاريتمي للدالة $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$ حيث $c: |z| = 2$

الحل:

أصفار الدالة $f(z)$: صفر بسيط

$z = 0 \in |z| < 2 \Rightarrow N = 1$

أقطاب الدالة $f(z)$: $1+z^3 = 0 \Rightarrow z^3 = -1 = e^{(2k+1)\pi i}$

$z_k = e^{\frac{(2k+1)}{3}\pi i} \quad ; \quad k = 0, 1, 2$

$k=0 \quad , \quad z_0 = e^{\frac{\pi}{3}i} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in |z| = 2$

$k=1 \quad , \quad z_1 = e^{\pi i} = -1 \in |z| = 2$

$k=2 \quad , \quad z_2 = e^{\frac{5}{3}\pi i} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \in |z| = 2$

أقطاب بسيطة بالتالي $p = 3$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N-P = 1-3 = -2$$

ليكن لـ $f(z)$ ثلاث أقطاب z_1 من المرتبة n ، z_2 من المرتبة m ، z_3 من المرتبة k ونفس الشيء للأصفار $P = n+m+k$

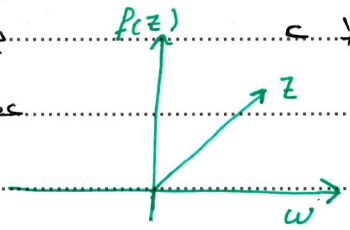
• مبدأ السّعة: الباقي اللوغاريتمي للدالة $f(z)$ بالنّسبة للمحيط المغلق c يساوي تغيّر السّعة لدالة $f(z)$ عند الدوران على المحيط c مقسوماً على 2π

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_c \operatorname{Arg} f(z) \quad \dots (3)$$

يعني أنّ الفرق بين عدد الأصفار وعدد الأقطاب للدالة $f(z)$ الواقعة داخل D محسوبة مع رتبتها تساوي:

$$N-P = \frac{1}{2\pi}\Delta_c \operatorname{Arg} f(z) \quad \dots (4)$$

بعبارة أخرى الفرق $(N-P)$ يساوي عدد الدورات التي يقوم بها المتّجه $w=f(z)$ في المستوي ، يبدأ من المنقطة $w=0$ إلى النقطة $w=f(z)$ ، عندما النقطة z ترسم المحيط c يعتبر عدد الدورات موجباً إذا دار المتّجه عكس اتّجاه عقارب الساعة وسالب في الحالة المعاكسة



• في حالة الدالة $w=f(z)$ تحليلية في المنطقة D وعلى محيطها c والتي لاتنعدم على c الباقي اللوغاريتمي لدالة $f(z)$ بالنسبة لـ c تساوي N ـ عدد الأصفار $f(z)$ محسوبة مع رتبتها والتي تساوي التغير $\Delta_c \operatorname{Arg} f(z)$ عند الدوران على المحيط c مقسوماً على 2π أي:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_c \operatorname{Arg} f(z) = N \quad \dots (5)$$

مثال: كثيرة الحدود $Q_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

مثال: أوجد عدد الأصفار في نصف المستوي اليميني $\operatorname{Re}(z) > 0$ لكثيرة الحدود

$$Q_5(z) = z^5 + z^4 + 2z^3 - 8z - 1 = 0$$

الحل: حسب مبدأ السّعة لدينا عدد الأصفار داخل المحيط c (حيث c لايقع عليه أي صفر لـ الدالة $f(z)$)

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_c \operatorname{Arg} Q_5(z) \quad \dots (1)$$

حيث يكون المحيط c من نصف دائرة $|z| = R$ ؛ $\operatorname{Re} z > 0$ وقطرها

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

على المحور التخيلي R كبير جداً حيث تقع جميع أصفار كثيرة الحدود $Q_5(z)$ الموجودة في نصف المستوي اليميني داخل نصف الدائرة: $C_R : |z| = R \; ; \; Re\, z > 0$

$$Arg\, Q_5(z) = Arg(z^5 + z^4 + 2z^3 - 8z - 1) =$$

$$Arg\left[z^5\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right)\right]$$

$$= Arg\, z^5 + Arg\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right)$$

$$= 5\, Arg\, z^5 + Arg\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right) \quad \ldots (2)$$

$$\Delta_{CR} Arg\, Q_5(z) = 5\, \Delta_{CR} Arg\, z + \Delta_{CR} Arg\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^3} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right)$$

نأخذ نهاية الطرفين $R \to \infty$

$$\lim_{R\to\infty} \Delta_{CR} Arg\, Q_5(z) = 5\pi + 0 = 5\pi$$

$$\lim_{R\to\infty} \Delta_{CR} \cdot Arg\, Q_5(z) = 5\pi$$

الآن نجعل z تتحول على المحور التخيلي أي من $z = -iR$ إلى $z = iR$ لنضع $z = it$ حيث $-R \le t \le +R$ بالتالي:

$$Q_5(it) = t^4 - 1 + i(t^5 - 2t^3 - 8t)$$

$$Q_5(it) = u + iv = t^4 - 1 + i(t^5 - 2t^3 - 8t)$$

$$\left.\begin{aligned} u &= t^4 - 1 \\ v &= t^5 - 2t^3 - 8t \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$$

هذه المعادلات هي الخط الذي تصفه (ترسمه) النقطة $w = Q_5(z)$ في المستوي (u, v) عندما تتحرك z على المحور التخيلي من الأعلى إلى الأسفل لإنشاء هذا الخط نجد نقاط تقاطعه مع المحورين الإحداثيين $\vec{ou}$ ، $\vec{ov}$ بمساواة كل من u ، v بالصفر

$$t^4 - 1 = 0 \Rightarrow t = \pm 1 \quad \ldots (2)$$

$$0 = t^5 - 2t^3 - 8t \Rightarrow t = \pm 2, \; t = 0 \quad \ldots (3)$$

لاحظ أنّ المعادلتين لا تتمثلان جذور مشتركة لذا فإنّ كثيرة الحدود $Q_5(z)$ لا تحتوي أصفاراً على المحور التخيلي وبالتالي يكون تطبيق مبدأ السّعة على الخط صحيحاً

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نرتّب جذور (2) و (3) تنازلياً أي ترتيب دورانها حول الخط ونوجد القيم المقابلة

$t_1 = -2$, $u_1 = 15$, $v_1 = 0$

$t_2 = -1$ $u_2 = 0$, $v_2 = -5$

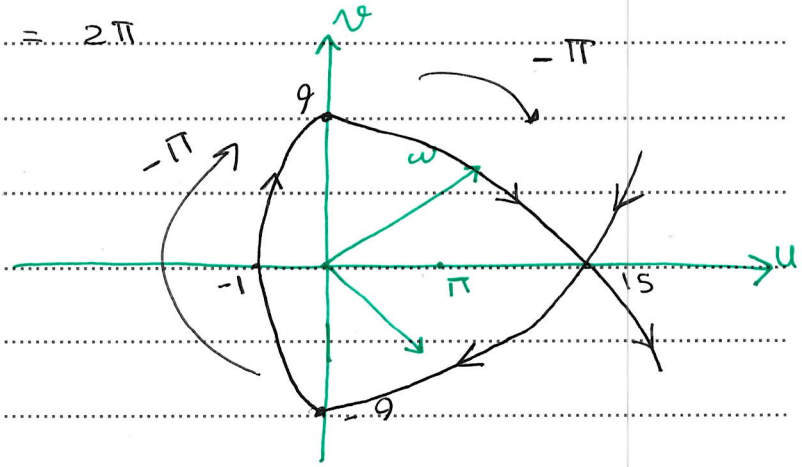
$t_3 = 0$ $u_3 = -1$, $v_3 = 0$

$t_4 = 1$, $u_4 = 0$, $v_4 = 9$

$t_5 = 2$ $u_5 = 15$, $v_5 = 0$

$\Delta \operatorname{Arg} Q_5(z) = 5\pi - 3\pi = 2\pi$

$N = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1$



انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z