كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي٢

المحاضرة : ٣+٤/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مثال 2: احسب قيمة التكامل: $I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2}$ باستخدام مفهوم راسب الدالة في اللانهاية.

الحل: الدالة $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ لها اربع نقاط شاذة داخل المنطقة $|z| \le 2$ وهي جذور المعادلة $z^4 = -1$ ولدينا الدالة $f(z)$ تمتلك صفر لو ان في الجوار ∞

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{z^4} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^4}} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{12}} - \cdots$$

بالتالي $res\, f(\infty) = -C_{-1} = 0$ وحسب المبرهنة 2 نجد

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \sum_{k=1}^{4} res\, f(z_k) = -2\pi i\, res\, f(\infty) = 0$$

Сканировано с CamScanner

بتطبيق مفهوم الراسب عند النقطة الشاذة $z=\infty$ احسب قيمة التكامل

① $I = \int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z^3}\,dz$

الحل: الدالة $f(z)=\frac{z^2+1}{z^3}$ تملك $z=0$ نقطة شاذة داخل المنطقة $|z|<1$ ولدينا مطلوب $f(z)$ في جوار ∞.

$$f(z)=\frac{z^2+1}{z^3}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z} \Rightarrow \operatorname{res} f(\infty) = -C_{-1} = -1$$

$$I=\int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z^3}\,dz = 2\pi i \operatorname{res} f(0) = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty) = +2\pi i$$

② $II = \int_{|z|=1} z^2 \cdot \sin\frac{1}{z}\,dz$

الدالة $f(z)$ لديها نقطة شاذة أساسية $z=0$ داخل $|z|<1$

$$f(z)=z^2\left(\sin\frac{1}{z}\right)=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}+\cdots\right)$$

$$f(z)=z-\frac{1}{3!}\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^3}+\cdots \quad ; C_{-1}=-\frac{1}{6}$$

$$\int_{|z|=1} z^2 \cdot \sin\frac{1}{z}\,dz = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty) = +\frac{\pi i}{3}$$

تمارين للطالب: باستخدام مفهوم الراسب عند النقطة الشاذة $z=\infty$ احسب قيمة التكامل

1. $\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^{12}} = 0$ ،

2. $\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z-1}\,dz = 2\pi e i$ ،

3. $\int_{|z|=3} \frac{z^9}{z^{10}-1}\,dz = 2\pi i$.

Сканировано с CamScanner

مثال 2: احسب التكامل

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

لدينا الدالة $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$ والتي تطابق الدالة $f(x)$ عندما $z=x$

الدالة $f(z)$ تملك قطب من المرتبة الثالثة $z=i$ يقع في النصف العلوي من المستوى

والراسب للدالة $f(z)$ في النقطة $z=i$

$$\operatorname{res} f(i) = \lim_{z\to i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2}\left(f(z)(z-i)^3\right)$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right) = \lim_{z\to i} \frac{1}{2}\left(\frac{12}{(z+i)^5}\right)$$

$$\operatorname{res} f(i) = \frac{-3}{16} i$$

بالتالي حسب العلاقة (1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum \text{مجموع الراسب في النصف العلوي من المستوى}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i \left(\frac{-3}{16} i\right) = \frac{3\pi}{8}$$

مثال 3: احسب التكامل

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$$

لدينا الدالة $f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+13)^2}$ تطابق الدالة $f(z)$ عندما $z=x$

ولها قطب $z=-2+3i$ يقع في النصف العلوي من المستوى والراسب يعطى من الصيغة الثانية

$$\operatorname{res} f(-2+3i) = \lim_{z\to -2+3i} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz}\left(f(z)(z+2-3i)^2\right)$$

$$= \lim_{z\to -2+3i} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z+2+3i)^2}\right) = \lim_{z\to -2+3i}\left(\frac{-z+2+3i}{(z+2+3i)^3}\right)$$

$$= \frac{+2+3i+2+3i}{(-2+3i+2+3i)^3} = \frac{4}{-i27} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2} = -\frac{8\pi}{27}$$

(22)

Сканировано с CamScanner

امثلة أخرى لطالب:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \stackrel{?}{=} \frac{(2n)!}{(n!)^2} 2^{-2n}\pi$,

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \stackrel{?}{=} \frac{\pi}{ab(a+b)}$,

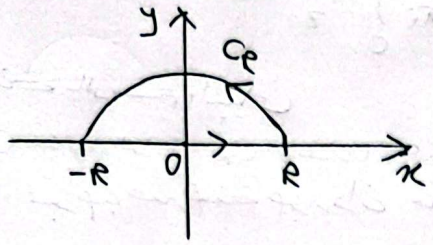
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)^2} \stackrel{?}{=} \frac{\pi}{2(b^2+a^2)}\left(\frac{5b^2-a^2}{b^3}+\frac{b^2-5a^2}{a^3}\right)$,

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} \stackrel{?}{=} \frac{2}{3}\pi$, 5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} \stackrel{?}{=} \frac{\pi}{2}$.

Сканировано с CamScanner

مثال: احسب قيمة التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx$;

الحل لدينا الدالة $f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}$ حيث نأخذ $z=x$ بالتالي



$R(x)=\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}$ تطابق الدالة $Re\,f(z)$

وحيث أن R كبيرة بمقدار كافي بالتالي على المسار C_R

الدالة $g(z)=\frac{z}{z^2-2z+10}$ تحقق المتراجحة $|g(z)|<\frac{R}{R^2-2R+10}$

وبالتالي $g(z)$ تميل للصفر عندما $R\to\infty$ وبالتالي حسب مبرهنة جوردان يكون

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}\,dz=0 \quad \text{-----(1)}$$

ولدينا حسب نظرية الرواسب

$$\int_{-R}^{+R}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\,dx+\int_{C_R}\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}\,dz=2\pi i\,\alpha \quad \text{----(2)}$$

حيث α هي مجموع رواسب الدالة $f(z)$ في النقاط الشاذة الواقعة في النصف العلوي من المستوي وهي $z=1+3i$ وهي قطب بسيط

$$\alpha=\operatorname*{res}_{z=1+3i} f(z)=\lim_{z\to1+3i}\left(\frac{ze^{iz}}{(z-1+3i)}\right)=\frac{(1+3i)}{6i}e^{i-3}$$

وحيث أن $R\to\infty$ وحسب (1) و(2) نجد

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\,dx+0=\frac{(1+3i)\pi}{3}e^{i-3}$$

بمقارنة طرفي المعادلة نأخذ القسم الحقيقي والتخيلي نجد

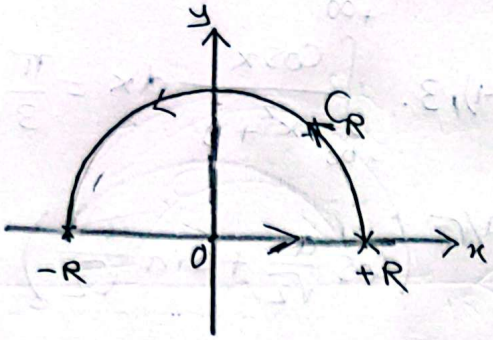
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx=\frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos1-3\sin1)$$

Сканировано с CamScanner

مثال 7:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{a^2+x^2}\,dx; \quad m>0,\ a>0$$

الحل: لدينا الدالة $f(z)=\dfrac{e^{miz}}{a^2+z^2}$ حيث $z=x$ إذا كان



$u(x)=\dfrac{\cos mx}{a^2+x^2}$ تطابق الدالة $\mathrm{Re}\,f(z)$

ومن أجل R كبيرة بقدر كافٍ بالبدء على المحيط C_R

الدالة $g(z)=\dfrac{1}{a^2+z^2}$ تحقق المتراجحة $|g(z)|<\dfrac{1}{R^2+a^2}$ حيث $a>0$

وبالتالي $g(z)\to 0$ عندما $R\to\infty$ وبالتالي حسب مبرهنة جوردان يكون

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{miz}}{a^2+z^2}\,dz=0 \quad ;a>0, m>0 \quad ----(1)$$

ولدينا حسب نظرية الرواسب

$$\int_{-R}^{+R}\frac{e^{ixm}}{x^2+a^2}\,dx+\int_{C_R}\frac{e^{izm}}{z^2+a^2}\,dz=2\pi i\,\alpha \quad ----(2)$$

لدينا $\alpha=\operatorname{res}_{z=ia} f(z)=\lim_{z\to ia}\left(\dfrac{e^{izm}}{(z+ia)(z-ia)}\cdot(z-ia)\right)$

$$\alpha=\lim_{z\to ia}\left(\frac{e^{izm}}{z+ia}\right)=\frac{e^{-am}}{2ia}$$

ومن أجل $R\to\infty$ وحسب (1) و(2) نجد

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixm}\,dx}{x^2+a^2}=2\pi i\left(\frac{e^{-am}}{2ia}\right)=\frac{e^{-am}}{a}\pi$$

* وبما أن الدالة $\dfrac{\cos mx}{a^2+x^2}$ زوجية وتساوي $\mathrm{Re}\,f(z)$ إذا

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{2a}e^{-am}\pi .$$

Сканировано с CamScanner

تمارين لطالب : أوجد قيمة التكاملات:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4x+20}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-4}(\cos 2 + \sin 2)$

2. $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{12}e^{-2}(2e-1)$, 3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}\,dx = \frac{\pi}{3}e^{-3}$

4. $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^4}\,dx\,;(a>0) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-a/\sqrt{2}}\left(\cos\frac{a}{\sqrt{2}} + \sin\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

5. $\int_{0}^{\infty} \frac{3x^2-a^2}{(x^2+b^2)^2}\cos mx\,dx =$; $a>0, m>0, b>0$

$= \frac{\pi}{4b^3}e^{-bm}\left[3b^2-a^2-mb(3b^2+a^2)\right]$.

Сканировано с CamScanner