كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي٢

المحاضرة :**الخامسة**/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

• تطبيقات نظرية الرواسب لحساب تكاملات معيّنة:

3 - التكاملات التي تحوي على دالة أسيّة:

مثال: احسب تكامل فرينل $I_1 = \int_0^\infty \cos x^2\,dx$, $I_2 = \int_0^\infty \sin x^2\,dx$

مع معرفة أنّ $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ و $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ و $\int_0^\infty e^{-(ax)^2}dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{|a|}$

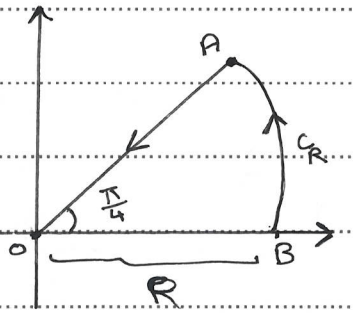
الحل:

نحسب التكاملات السابقة I_1 و I_2 بمساعدة الدالة $f(z) = e^{iz^2}$ والمحيط $oABo$

حيث $oA = oB = R$ ، $\hat{BoA} = \frac{\pi}{4}$ داخل هذه المنطقة

الدالة تحليلية $f(z) = e^{iz^2}$ وبالتالي حسب مبرهنة كوشي:

$$\int_{oB} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{Ao} f(z)\,dz = 0 \quad \dots (1)$$



• على المجال oB:

لدينا $z = x$ و $0 \le x \le R$

$$\int_{oB} f(z)\,dz = \int_{oB} e^{iz^2}\,dz = \int_0^R e^{ix^2}\,dx \quad \dots (2)$$

• على المجال C_R: نفرض $z^2 = \varphi$ بالتالي:

$$z = \sqrt{\varphi} \quad \text{ومنه:} \quad dz = \frac{d\varphi}{2\sqrt{\varphi}}$$

$$\int_{C_R} e^{iz^2}\,dz = \int_{\Gamma_{R^2}} \frac{e^{i\varphi}}{2\sqrt{\varphi}}\,d\varphi$$

حيث:

Γ_{R^2} هي ربع دائرة التي نصف قطرها R^2 ، نلاحظ أنّ الدالة $\frac{e^{i\varphi}}{2\sqrt{\varphi}}$ تحقّق شرط مبرهنة جوردان بالتالي:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_{R^2}} \frac{e^{i\varphi}}{2\sqrt{\varphi}}\,d\varphi = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_{R^2}} e^{iz^2}\,dz = 0 \quad \dots (3)$$

على المجال Ao : لدينا $z = x\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ حيث $0 \le x \le R$

$$\int_{Ao} f(z)\,dz = \int_{R}^{o} e^{ix^2} e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\,dx = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{o}^{R} e^{-x^2}\,dx \quad (4)$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) فنجد حيث $R \to \infty$

$$\int_{o}^{\infty} e^{ix^2}\,dx + o + e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\infty}^{o} e^{-x^2}\,dx = o$$

$$\int_{o}^{\infty} e^{ix^2}\,dx = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int_{o}^{\infty} \cos x^2\,dx + i\int_{o}^{\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_1 = \int_{o}^{\infty} \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_2 = \int_{o}^{\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

مثال: احسب قيمة التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1+e^x}$ حيث $(0<a<1,\ 0<b<1)$

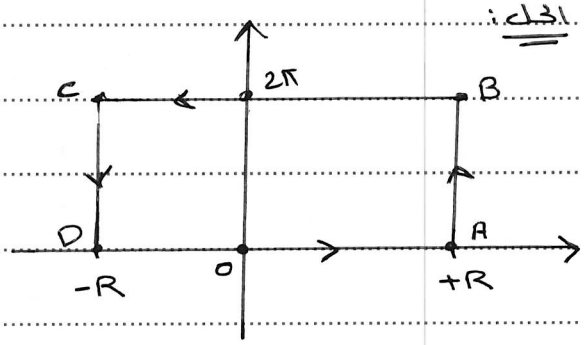
توضيح: اختر الدالة:

$F(z) = \frac{e^{az} - e^{bz}}{1+e^z}$ على محيط المستطيل الذي بُعديه $(2R, 2\pi)$ ؟

الحل:

$e^z = -1 = \cos\pi = e^{i\pi} \Rightarrow z = i\pi$

الدالة $f(z)$ خلفية داخل المستطيل ABcD باستثناء النقطة $z = i\pi$ وهي قطب بسيط



$$\begin{cases} \varphi(z) = e^{az} - e^{bz} \ ; \ f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} \\ \psi(z) = \psi(i\pi) = o \\ \psi'(i\pi) = e^z\Big|_{i\pi} = e^{i\pi} = -1 \neq o \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{res} F(i\pi) = \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}$$

$$\operatorname{res} F(i\pi) = \frac{e^{az} - e^{bz}}{(1+e^z)'}\Big|_{z=i\pi} = e^{-ai\pi} + e^{bi\pi}$$

حسب نظرية كوشي للرواسب:

$$\int_{DA} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{Bc} f(z)\,dz + \int_{cD} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res} F(\pi i)$$

$$= 2\pi i\,(e^{bi\pi} - e^{ai\pi}) \quad (1)$$

على المجال DA : لدينا $z = x$ حيث $-R \le x \le +R$

$$\int_{DA} \frac{e^{az} - e^{bz}}{1+e^z}\,dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1+e^x}\,dx \quad (2)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

على المجال AB: لدينا $Z=R+iy$ حيث $0\le y\le 2\pi$

$$1+e^{z}=1+e^{R}.e^{iy}=1+e^{R}\cos y+ie^{R}\sin y$$

$$|1+e^{z}|=\sqrt{(1+e^{R}\cos y)^2+(e^{2R}.\sin^2 y)}=\sqrt{1+2e^{R}\cos y+e^{2R}.\cos^2 y+e^{2R}.\sin^2 y}$$

; $0\le y\le 2\pi$

$$|1+e^{z}|^2=1+2e^{R}.\cos y+e^{2R}>1-2e^{R}+e^{2R}=(1-e^{R})^2$$

$$|1+e^{z}|^2>1-e^{R}\Rightarrow\frac{1}{1+e^{z}}<\frac{1}{1-e^{R}}$$

$$\left|\int_{AB}f(z).dz\right|\le\int_{AB}|f(z)|.|dz|\le\int_{0}^{R}\frac{e^{aR}-e^{bR}}{1-e^{R}}.dy=2\pi\frac{e^{aR}-e^{bR}}{1-e^{R}}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

; $|dz|=|1.dy|$

أي $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{AB}f(z).dz=0$ ..... (3)

بالمثل على المجال CD: نجد $Z=-R+iy$ و $0\le y\le 2\pi$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{CD}f(z).dz=0 \quad ..... (4)$$

على المجال Bc: لدينا $Z=x+i2\pi$ $-\infty\le x\le+\infty$

$$\int_{Bc}f(z).dz=-\int_{-R}^{+R}\frac{e^{ax+2\pi ai}-e^{bx+2\pi bi}}{1+e^{x}.e^{i2\pi}} \quad ..... (5)$$

نعوض في (1) مع $R\to\infty$ فنجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{1+e^{x}}.dx=\pi\left(\frac{1}{\sin a\pi}-\frac{1}{\sin b\pi}\right)$$

4. تكاملات من الشكل: (1) $I=\int_{0}^{2\pi}R(\cos x,\sin x).dx$ حيث R دالة كسرية تابعة لـ cosx و sinx.

من أجل إيجاد قيمة هذه التكاملات نفرض $Z=e^{ix}$ بالتالي:

$$dx=\frac{dz}{iz},\quad \sin z=\frac{z^2-1}{2iz},\quad \cos z=\frac{z^2+1}{2z}$$

لدينا $|z|=1$ و $0\le x\le 2\pi$ التكامل (1) يصبح:

$$I=\int_{c}f(z)\,dz \quad ..... (2)$$

حيث c هي دائرة الوحدة مع المركز في مبدأ الإحداثيات بحسب نظرية كوشي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

للحواسب فإنّ التكامل (2) حيثُ $I = \int_c f(z).dz = 2\pi i\,\sigma$ مجموع الحواسب للدالة $f(z)$ في نقاطها الشاذة الواقعة داخل c

مثال: $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x\,.dx}{1-2p\cdot\sin x+p^2}$.

نعوّض $z = e^{ix}$ بالتالي $dx = \frac{dz}{iz}$ و $\cos x = \frac{z^2+1}{2z}$ و $\sin z = \frac{z^2-1}{2iz}$

$$I = \int_c \frac{z^2+1}{2z}\cdot\frac{1}{1-2p\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)+p^2}\cdot\frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{1}{2}\int_c \frac{z^2+1}{z\left(-pz^3+(i+p^2i)z+p\right)}\,.dz = \frac{1}{2}\int_c \frac{(z^2+1).dz}{z(-pz+i)(z-pi)}$$

النقاط الشاذة هي $z_1 = 0$ و $z_2 = pi$ ($z = \frac{i}{p}$) ليست ضمن المجال

الدالة $F(z) = \frac{(z^2+1)\,dz}{z(-pz+i)(z-pi)}$ تحليلية داخل دائرة الوحدة c باستثناء النقاط $z_1 = 0$ و $z_2 = pi$ وهي أقطاب بسيطة للدالة $f(z)$.

$$res(0) = \lim_{z\to 0}(F(z)\cdot z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{(-pz+i)(z-pi)} = \frac{1}{i(-pi)} = \frac{1}{p}$$

$$res(pi) = \lim_{z\to pi}(F(z).(z-pi)) = \frac{-p^2+1}{pi(-p^2i+i)}$$

$$\Rightarrow I = \int_c F(z).dz = \int_0^{2\pi}\frac{\cos x\,.dx}{1-2p.\sin x+p^2} = 2\pi i\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\right) = 0$$

; $0 < p < 1$

مثال وظيفة: $\int_0^{\pi} c.\,Tg(x-a).dx$; $Im\,a > 0$

$c\,Tg = \frac{\cos}{\sin}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z