كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي ٢

المحاضرة :الرابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

■ تطبيقات نظرية الرواسب في حساب بعض التكاملات:

1- تكامل دالة كسرية: لتكن $F(x)$ دالة كسرية $F(x)=\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ حيث Q_n و P_n كثيرات حدود.

إذا كانت $F(x)$ مستمرة على كامل المجال الحقيقي $(Q_n(x)\neq 0)$ و $n\geq m+2$ أي $x=0$ ليست نقطة شاذة ، أي قوة المقام أكبر من قوة البسط بوحدتين على الأقل بالتالي: $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = 2\pi i\,\sigma$ ... (1) حيث σ جميع الرواسب للدالة $F(z)=\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ في كل أقطابها الموجودة في النصف العلوي من المستوي $Im(z)>0$

مثال: $I=\int_0^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$; $(a>0)$

الحل:

الدالة $f(x)=\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$ دالة زوجية

$$I=\int_0^{\infty}F(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\,dx$$

لدينا الدالة $F(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$ والتي تطابق الدالة $F(x)$ من أجل $z=x$

تمتلك الدالة $F(z)$ نقطة شاذة $z=+ai$ في النصف العلوي من المستوي العقدي:

$c=ai$ قطب من المرتبة الثانية وراسب الدالة $F(z)$ في هذه النقطة

$$res\,f(ia)=\frac{1}{2}\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left(F(z)\cdot(z-ia)^2\right)=\lim_{z\to ia}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right)=$$

$$\lim_{z\to ia}\frac{2aiz}{(z+ai)^3}=\frac{1}{4ai}$$

وبحسب (1) يكون لدينا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=2\pi i\,\sigma=2\pi i\;res\,f(ia)=2\pi i\left(\frac{1}{4ai}\right)=\frac{\pi}{2a}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4a}$$

2- التكامل من الشكل:

$\int_0^{\infty} R(x).\cos \lambda x.dx$ و $\int_0^{\infty} R(x).\sin \lambda x.dx$ حيث $R(x)$ دالة كسرية

λ عدد حقيقي كيفي

• لحساب مثل هذه التكاملات نستخدم المبرهنة التالية:

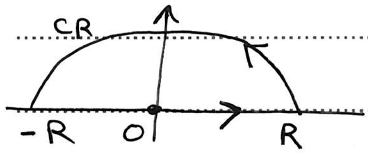
مبرهنة جوردان: لتكن $g(z)$ دالة تحليلية في النصف العلوي من المستوي

$0 < \arg z < \pi$ باستثناء عدد محدود من النقاط الشاذة وتميل إلى الصفر في

نصف المستوي عندما $|z| \to \infty$ لتكن $\lambda > 0$ عندئذٍ يكون:

$\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z).e^{i\lambda z}\,dz = 0$ ... (2) حيث C_R عبارة عن نصف دائرة في النصف العلوي

من المستوي مع مركز عند النقطة 0 ونصف القطر يساوي R



مثال: احسب قيمة التكامل $I = \int_0^{\infty} \frac{x.\sin ax}{x^2+k^2}\,dx$ حيث $a > 0$ & $k > 0$ ؟

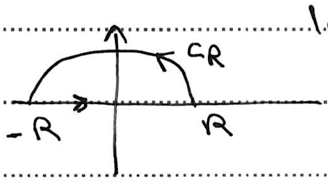
الحل:

لدينا الدالة $F(z) = \frac{z.e^{iaz}}{z^2+k^2}$ ليس من الصعب ملاحظة أنه إذا كانت $z = x$

بالتالي $Im\, f(x)$ تطابق الدالة $\varphi(x) = \frac{x.\sin ax}{x^2+k^2}$ ومن أجل R كبير بمقدار

كافي بالتالي على المحيط C_R الدالة $g(z) = \frac{z}{z^2+k^2}$

$$|g(z)| = \frac{|z|}{|z^2+k^2|} < \frac{R}{R^2-k^2}$$



واضح أنه $|g(z)| \to 0$ عندما $|z| \to \infty$

$$|z^2+k^2| = |(r\cos\theta + ir\sin\theta)^2 + k^2| = \sqrt{(Re(z^2+k^2))^2 + (Im(z^2+k^2))^2}$$

$$> R^2 - k^2$$

$g(z)$ تميل إلى الصفر عندما $R \to \infty$ بالتالي حسب مبرهنة جوردان

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z.e^{iaz}}{z^2+k^2} = 0 \quad \dots (*)$$

حسب نظرية كوشي حيث $F(z)$ تملك نقطة شاذة قطب $z = ki$ من المرتبة الأولى:

$$\int_{-R}^{R} F(z)\,dz + \int_{C_R} F(z)\,dz = 2\pi i\,\sigma = 2\pi i \operatorname{res} F(x_i)$$

حسب (*)

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} F(z)\,dz + 0 = \lim_{R\to\infty} 2\pi i \operatorname{res} F(x_i)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\,e^{iaz}}{z^2+k^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{res}F(x_i) = 2\pi i\left(\lim_{z\to ki}\frac{z\,e^{iaz}}{z+ik}\right) =$$

$$2\pi i\left(\frac{1}{2}\,e^{-ak}\right) = \pi i\,e^{-ak}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\cos az}{z^2+k^2}\,dz + i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\,\sin az}{z^2+k^2}\,dz = \pi i\,e^{-ak}$$

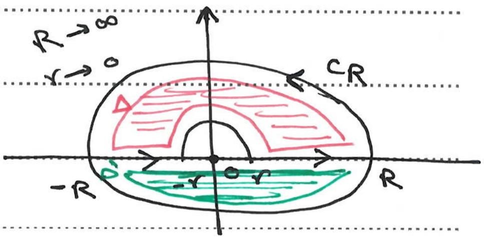
$z = x$ بالمطابقة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos ax}{x^2+k^2}\,dx = 0 \quad \& \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\sin ax}{x^2+k^2}\,dx = \pi\,e^{-ax}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\sin ax}{x^2+k^2}\,dx = \frac{\pi e^{-ax}}{2}$$

■ أوجد التمثيل التكاملي لدالة الوحدة:

$$F(t) = \begin{cases} 1 & ; \ t>0 \\ 0 & ; \ t<0 \end{cases}$$



$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{izt}}{z}\,dz$$

من أجل $t>0$ في النصف العلوي من المستوي

لدينا حسب جوردن (*) : $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{izt}}{z}\,dz = 0$

حسب كوشي $\displaystyle\int_{C_R} F(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res} F(0) = 2\pi i\,(c_{-1})$

$= 2\pi i \quad ; \quad c_{-1} = 1$

منشور لوران لدالة $\dfrac{e^{izt}}{z}$:

$$\frac{e^{izt}}{z} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{izt}{1!} + \frac{(izt)^2}{2!} + \dots\right) = \underbrace{\frac{1}{z}}_{c_{-1}} + \frac{it}{1} + \dots$$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{izt}}{z}\,dz = \begin{cases} 1 & ; \ t>0 \\ 0 & ; \ t<0 \end{cases}$$

$$\frac{e^{izt}}{z} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{izt}{1!}+\frac{(izt)^2}{2!}+\dots\right)$$

من أجل $t<0$ بما أنّ الدالة تحليلية على منطقة مغلقة بالتالي حسب كوشي

$$\int_{C_R} F(z)\,dz = 0 \Rightarrow F(t)=0$$

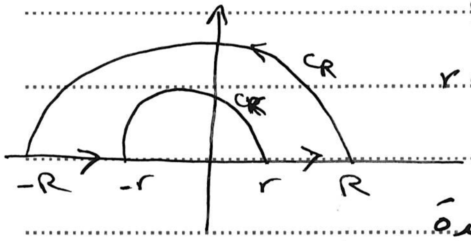
مثال: احسب قيمة التكامل $I=\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx$ حيث $a>0$ & $b>0$ ؟

الحل:

لدينا الدالة $F(z)=\frac{e^{azi}}{z(z^2+b^2)}$ عندما $z=x$ فإنّ $Im\,F(z)$ تتطابق مع الدالة

$$f(x)=\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}$$

الدالة $F(z)$ تمتلك نقاط شاذة على المحور الحقيقي $\vec{ox}$ وهي $z=0$ وهي قطب بسيط لذلك نختار المحيط (المجال) كما في الرسم البياني



حيث النقطة $z=0$ داخل نصف الدائرة C_r وتحقق $r<b$

ونصف الدائرة C_R نختارها بحيث $b<R$

عندئذٍ داخل المحيط المغلق يوجد فقط نقطة شاذة واحدة للدالة $F(z)$ هي $z=bi$ وحسب نظرية كوشي للرواسب:

$$\int_{-R}^{r} f(z)\,dz + \int_{C_r} f(z)\,dz + \int_{r}^{R} F(z)\,dz + \int_{C_R} F(z)\,dz = 2\pi i\,res\,F(ib) \quad \dots(1)$$

$$res\,F(ib) = \lim_{z\to ib}\big(F(z)(z-ib)\big) = \frac{-e^{-ab}}{2b^2} \quad \dots(2)$$

لدينا التكاملين الأول والثالث

$$\int_{-R}^{r}\frac{e^{-iax}}{x(x^2+b^2)}\,dx + \int_{r}^{R}\frac{e^{+iax}}{x(x^2+b^2)}\,dx = \int_{r}^{R}\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{x(x^2+b^2)}\,dx =$$

$$2i\int_{r}^{R}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx \quad \dots(3)$$

لدينا أيضاً $\lim_{z\to 0}\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}=\frac{1}{b^2}$

$$\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)} = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{z}+\frac{\psi(z)}{z} \ ; \ \psi(z)\underset{z\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\int_{C_r} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}\,dz = \frac{1}{b^2}\int_{C_r} \frac{dz}{z} + \int_{C_r} \frac{\varphi(z)}{z}\,dz$$

$$= -i\frac{\pi}{b^2} + i\int_{\pi}^{0} \varphi(r.e^{i\theta})\,d\theta \quad \ldots (4)$$

وعندما $r \to 0$ فإنّ $\lim\limits_{r\to 0}\int_{\pi}^{0} \varphi(r e^{i\theta})\,d\theta = 0$

وأخيراً التكامل الرابع في العلاقة (1) حسب مبرهنة جوردان يحيل للصفر عندما $R \to \infty$ حيث الدالة $g(z) = \frac{1}{z(z^2+b^2)}$ تسعى للصفر عندما $|z| \to \infty$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}\,dz = 0 \quad \ldots (6)$$

بالتالي عندما $\left\{ \begin{array}{l} R \to \infty \\ r \to 0 \end{array} \right.$ في العلاقة (1) بعد تعويض العلاقات (2) و (3) و (4) و (6) نجد:

$$2i\int_0^\infty \frac{\sin ax}{2(x^2+b^2)}\,dx - i\frac{\pi}{b^2} = -\pi i\,\frac{e^{-ab}}{b^2} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx = \frac{\pi}{2b^2}\left(1 - e^{-ab}\right).$$

انتهت المحاضرة