كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : نظرية البيان

المحاضرة : **الخامسة**/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

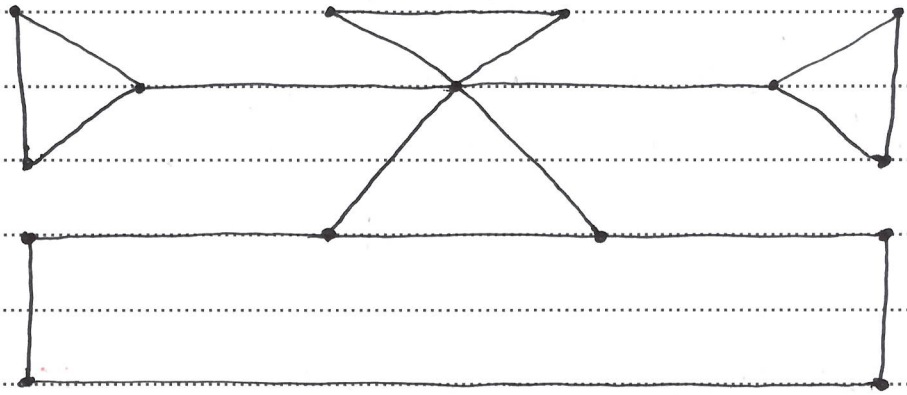
2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مثال وظيفي:

حلل البيان الموجود إلى الأشكال المكونة له:



الأشجار:

الشجرة: هي بيان مترابط خالٍ من الحلقات، البيان المترابط الذي لا يحوي حلقات يدعى غابة.

مبرهنة:

ليكن $(P, q) T$ بياناً عندئذٍ العبارات التالية متكافئة:

1. T شجرة.
2. بين كل رأسين في T مسار وحيد.
3. T مترابط وكل ضلع فيه جسر.
4. T مترابط وعدد أضلاعه $P-1$
5. عدد أضلاع T هو $P-1$ ولا يحوي حلقات

(6) T لا يحوي حلقات لكن إذا وصلنا بين أي رأسين غير متجاورين ينتج لدينا بيان يحوي حلقة واحدة فقط

البرهان:

(1) ⇐ (2) بفرض أن u, v رأسين في T بحيث كون T مترابط يوجد مسار واحد على الأقل بين u, v.

لنفرض أنّ p_1, p_2 مساران مختلفان بين u, v عندئذٍ هناك ضلع من أحدهما لا ينتمي إلى الآخر ولكن xy وبالتالي يوجد بين x و y مسار p: لا يحوي الضلع xy إذاً $p \cup xy$ يشكل حلقة وهذا يناقض كون T شجرة إذاً p_1 ينطبق تماماً على p_2.

(2) ⇐ (3) T مترابط وصغرياً، بفرض أن الضلع e = uv ضلع كيفي في شجرة T عندئذٍ: $T_1 = T - e$ غير مترابط وإلا لكان هناك في T مساراً آخر بين u, v إذاً e حر.

ملاحظة: أحياناً يرمز لضلع بحرف كاسم يمثل e وأحياناً بثنائية الرؤوس المشكلة له مثل (x,y) وأحياناً يذكر الرؤوس المشكلة له مباشرة xy.

(3) ⇐ (4) نبرهن بطريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس p

إذا كان $p = 1$ عندئذٍ $q = 0$ والخرمنية محققة في هذه الحالة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لتكن الفرضية صحيحة من أجل أي بيان مترابط بسيط عدد رؤوسه أقل من p، إن T بيان مترابط وكل ضلع فيه هو جسر فإننا عندنا ضلع كيفي من T نحصل على مركبتين هما T_1, T_2 بعدد رؤوس هي p_1, p_2 على الترتيب إننا:

$p_1 < p$ و $p_2 < p$ إذا عدد أضلاع T_1 هو $q_1 = p_1 - 1$

وعدد أضلاع T_2 هو $q_2 = p_2 - 1$ إذاً:

$$q = q_1 + q_2 + 1 = p_1 - 1 + p_2 - 1 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$

$$\Rightarrow q = p - 1$$

[4] ⇐ [5] إن عدد أضلاع T هو $p-1$ بفرض أن T يحوي حلقة و e ضلع من هذه الحلقة إذا حذف e يبقى البيان مترابط أي $T_1 = T - e$ مترابط وعدد أضلاعه هو $q' = p - 2$ ولكن عدد الرؤوس في $T-e$ هو p إذاً:

$$p - 1 < q' = p - 2$$

وهذا متناقض

[5] ⇐ [6] لنفرض أن T هو بيان بسيط عدد رؤوسه هو p وعدد أضلاعه هو $q = p - 1$ ولا يحوي حلقات ونفرض أن عدد مركبات T هو k والمركبات هي $T_1, T_2, \dots, T_k$ كل مركبة T_i لها p_i رأس إذاً T_i هو بيان مترابط ولا يحوي حلقات إذاً T_i شجرة وبالتالي فإن الاقتراحات السابقة صحيحة من [1] إلى [4] وبالتالي عدد أضلاع T_i هو $p_i - 1$ من أجل كل $1 \le i \le k$ إذاً عدد أضلاع

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

T هو $p-k = \sum_{i=1}^{k} p_i - 1$ إذاً: $p-k = p-1$ إذاً $k=1$

والبيان مترابط و بالتالي T شجرة و بالتالي لكل رأسين كيفيين u, v غير متجاورين يوجد بينهما بار وحيد بإضافة ضلع بين u و v نشكل حلقة وحيدة.

(6) $\Leftarrow$ (1) بفرض أن T غير مترابط فإذا أضفنا ضلعاً بين مركبتين مختلفتين لن نشكل حلقة و هذا يناقض بند (6) إذا T مترابط و لا يحوي حلقة و بالتالي T شجرة.

انتهت المحاضرة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z