كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية٢

المحاضرة : السادسة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

1) $\begin{cases} 2tx' + ty' - x - y = 1 \\ tx' + ty' + 2x - y = t \end{cases}$

لحلها نفرض $t = e^z$ عندها يكون:

$tx' = x'_z$

$ty' = y'_z$

نعوض نجد أن:

$2x'_z + y'_z - x - y = 1$

$x'_z + y'_z + 2x - y = e^z$

$(2D-1)x + (D-1)y = 1$

$(D+2)x + (D-1)y = e^z$

$A = \begin{vmatrix} 2D-1 & D-1 \\ D+2 & D-1 \end{vmatrix} = (2D-1)(D-1) - (D-1)(D+2)$

$A = (D-1)(2D-1-D-2) = (D-1)(D-3)$

$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & D-1 \\ e^z & D-1 \end{vmatrix} = -1 - e^z + e^z = -1$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2D-1 & 1 \\ D+2 & e^{x} \end{vmatrix} = 2e^{x} - e^{x} - 2 = e^{x} - 2$$

$$A=0 \Rightarrow D_1 = 1 \quad , \quad D_2 = 3$$

$$x_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}$$
$$y_h = b_1 e^{x} + b_2 e^{3x}$$

$$x_p = \frac{-1}{(D-1)(D-3)} = \frac{-1}{3}$$

$$y_p = \frac{1}{(D-1)(D-3)}(e^{x} - 2) = \frac{1}{(D-1)(D-3)} e^{x} - \frac{2}{3}$$

$$y_p = \frac{1}{(D-1)} \cdot \frac{e^{x}}{-2} - \frac{2}{3} = \frac{-x e^{x}}{2} - \frac{2}{3}$$

$$x(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{3}$$

$$y(x) = b_1 e^{x} + b_2 e^{3x} - \frac{x e^{x}}{2} - \frac{2}{3}$$

$$x' = c_1 e^{x} + 3c_2 e^{3x}$$
$$y' = b_1 e^{x} + 3b_2 e^{3x} - \frac{e^{x}}{2} - \frac{x e^{x}}{2}$$

$$2c_1 e^{x} + 6c_2 e^{3x} + b_1 e^{x} + 3b_2 e^{3x} - \frac{e^{x}}{2} - \frac{x e^{x}}{2} - c_1 e^{x}$$
$$- c_2 e^{3x} + \frac{1}{3} - b_1 e^{x} - b_2 e^{3x} + \frac{x e^{x}}{2} + \frac{2}{3} = 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بالمطابقة نجد أنّ:

$$2C_1 + b_1 - \frac{1}{2} - C_1 - b_1 = 0$$

$$\boxed{C_1 = \frac{1}{2}}$$

$$6C_2 + 3b_2 - C_2 - b_2 = 0$$

$$\boxed{b_2 = -\frac{5}{2}C_2}$$

$$C_1 e^x + 3C_2 e^{3x} + b_1 e^x + 3b_2 e^{3x} - e^x - \frac{xe^3}{2} + 2C_1 e^x + 2C_2 e^{3x} - \frac{2}{3} - b_1 e^x - b_2 e^{3x} + \frac{xe^x}{2} + \frac{2}{3} = e^x$$

بالمطابقة نجد أنّ:

$$C_1 + b_1 + 2C_1 - b_1 = \frac{3}{2}$$

$$3C_2 + 3b_2 + 2C_2 - b_2 = 0$$

$$3C_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{b_2 = -\frac{5}{2}C_2}$$

فتكون الحلول هي:

$$\begin{cases} x(x) = \frac{e^x}{2} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{3} \\ y(x) = b_1 e^x - \frac{5}{2}C_2 e^{3x} - \frac{xe^x}{2} - \frac{2}{3} \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$x(t) = \frac{t}{2} + C_2 t^3 - \frac{1}{3}$$

$$y(t) = b_1 t - \frac{5}{2} C_2 t^3 - \frac{t \ln t}{2} - \frac{2}{3}$$

2 تحقق من شرط الحل ثمّ أوجد الحل العام للمعادلات التالية:

1) $(y+3z)dx + (x+2z)dy + (3x+2y)dz = 0$ (A)

$$\Delta = \begin{vmatrix} y+3z & x+2z & 3x+2y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+3z & x+2z & 3x+2y \end{vmatrix} =$$

$$\Delta = (y+3z)(2-2) - (x+2z)(3-3) + (3x+2y)(1-1) = 0$$

والمعادلة قابلة للحل.

نفرض $z = 0 \Leftarrow dz = 0$

$$(y+3z)dx + (x+2z)dy = 0$$

$$xy + 3zx + 2zy = \phi(z)$$

نفاضل الطرفين بـ أنّ:

$$x\,dy + y\,dx + 3z\,dx + 3x\,dz + 2z\,dy + 2y\,dz = d\phi(z)$$

بالمقارنة بـ المعادلة (A)

$$d\phi(z) = 0 \Rightarrow \phi(z) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{xy + 3zx + 2zy = 0}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② $x\,dx + y\,dy + (x^2+y^2+z^2+1)z\,dz = 0$ (*)

الحل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & (x^2+y^2+z^2+1)z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & (x^2+y^2+z^2+1)z \end{vmatrix}$$

$$\Delta = x(2y-0) - y(2x-0) + z(x^2+y^2+z^2+1)(0-0)$$

$$\Delta = 2xy - 2xy = 0$$

المعادلة قابلة للحل

نفرض $z = C \Rightarrow dz = 0$

$$x\,dx + y\,dy = d\Phi(z)$$

نعوض في المعادلة (*) فنجد أنّ:

$$d\Phi + z(2\Phi + z^2 + 1)\,dz = 0$$

$$\frac{d\Phi}{dz} = -z(2\Phi + z^2 + 1)$$

$$\frac{d\Phi}{dz} + 2z\Phi = -z^3 - z$$

$$\mu = e^{\int 2z\,dz} = e^{z^2}$$

$$e^{z^2}\,d\Phi + 2z\,e^{z^2}\Phi\,dz = -e^{z^2}(z^3+z)\,dz$$

$$\Phi e^{z^2} = -\left[\int z^3 e^{z^2}\,dz + \frac{1}{2}e^{z^2}\right] + C$$

$$\int z^3 e^{z^2}\,dz = \frac{1}{2}\int z^2 e^{z^2}(2z\,dz)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نعوض في أنّ: $t = y^2 \Leftarrow dt = 2y\,dy$ نعوض

$$\int y^3 e^{y^2} dy = \frac{1}{2}\int t e^t dt$$

نكامل بالتجزئة:

$$\int y^3 e^{y^2} dy = \frac{1}{2}\left[t e^t - \int e^t dt\right]$$

$$\int y^3 e^{y^2} dy = \frac{t e^t}{2} - \frac{e^t}{2}$$

$$\int y^3 e^{y^2} dy = \frac{y^2 e^{y^2}}{2} - \frac{e^{y^2}}{2}$$

$$\phi e^{y^2} = -\left[\frac{y^2 e^{y^2}}{2} - \frac{e^{y^2}}{2} + \frac{e^{y^2}}{2}\right] + C$$

$$\phi e^{y^2} = -\frac{y^2 e^{y^2}}{2} + C$$

$$\Rightarrow \phi(y) = \frac{-y^2}{2} + C e^{-y^2}$$

$$\phi(y) = C e^{-y^2} + \frac{y^2}{2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = C e^{-z^2}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3) تحقق من كون المعادلات التالية تامة ثم حلها:

① $(y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 1$$

المعادلة تامة

$$(y\,dx + x\,dy) + (z\,dx + x\,dz) + (z\,dy + y\,dz) = 0$$

$$\boxed{xy + xz + yz = C}$$

② $(x-y)\,dx - x\,dy - z\,dz = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \& \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

المعادلة تامة

$$x\,dx + (-y\,dx - x\,dy) - z\,dz = 0$$

$$\boxed{\frac{x^2}{2} - xy - \frac{z^2}{2} = C}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(4) $y(y+z)\,dx + z(x-z)\,dy - y(x+y)\,dz = 0$ [4]

هل المعادلة تامة أو لا؟ ولماذا.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y + z \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = z$$

المعادلة غير تامة ، نلاحظ أن المعادلة متجانسة .

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{xP + yQ + zR}$$

$$\sigma = \frac{1}{xy^2 + xyz + xyz - yz^2 - xyz - zy^2}$$

$$\sigma = \frac{1}{xy^2 + xyz - yz^2 - zy^2}$$

$$\sigma = \frac{1}{xy(y+z) - yz(z+y)}$$

$$\sigma = \frac{1}{(y+z)(xy - yz)} = \frac{1}{y(y+z)(x-z)}$$

نضرب المعادلة بـ σ فنجد أن :

$$\frac{y(y+z)}{y(y+z)(x-z)}dx + \frac{z(x-z)}{y(y+z)(x-z)}dy - \frac{y(x+y)}{y(y+z)(x-z)}dz = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{dx}{x-z}+\frac{z}{y(y+z)}dy-\frac{x+y}{(y+z)(x-z)}dz=0$$

$$\frac{dx}{x-z}+\frac{z+y-y}{y(y+z)}dy+\frac{x-z+z+y}{(y+z)(x-z)}dz=0$$

$$\frac{dx}{(x-z)}-\frac{dz}{x-z}+\frac{dy}{y}-\frac{dy}{y+z}-\frac{dz}{y+z}=0$$

$$\frac{d(x-z)}{(x-z)}+\frac{dy}{y}-\frac{d(y+z)}{(y+z)}=0$$

$$\ln|x-z|+\ln|y|-\ln|y+z|=\ln|C$$

$$\boxed{\frac{(x-z)y}{y+z}=C}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة