كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية٢

المحاضرة : الرابعة/عملي/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

① $\dfrac{dx}{1+z} = \dfrac{dy}{0} = \dfrac{dz}{2xz}$
$\quad (1) \qquad (2) \qquad (3)$

نختار (2): $\Rightarrow dy = 0 \Rightarrow y = c_1$

$\Rightarrow \varphi_1 : y = c_1$

نختار (1) و (3) $\Leftarrow$ $(1) = (3)$

$$\frac{dx}{1+z} = \frac{dz}{2xz}$$

$$2xz\,dx = (1+z)\,dz$$

$$2x\,dx = \frac{1+z}{z}\,dz$$

$$\Rightarrow 2x\,dx - \left(\frac{1}{z} + 1\right) dz = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \ln z - z = c_2$$

$$\Rightarrow \varphi_2 : x^2 - \ln z - z = c_2$$

نختبر شرط الاستقلال باليعقوبي:

$$\Rightarrow \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 2x \neq 0$$

ومنه φ_1 و φ_2 مستقلان خطياً

② $\dfrac{dx}{z(x+y)} = \dfrac{dy}{z(x-y)} = \dfrac{dz}{x^2+y^2}$

$(1) \qquad (2) \qquad (3)$

نختار (1) و (2)

$$\frac{dx}{z(x+y)} = \frac{dy}{z(x-y)}$$

$$\Rightarrow (x-y)\,dx - (x+y)\,dy = 0$$

$$\Rightarrow (x\,dx - y\,dy) - (y\,dx + x\,dy) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_1 : \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - xy = C_1$$

نختار $x(1) - y(2) = (3)$

$$\frac{x\,dx - y\,dy}{zx^2 + zxy - zxy + zy^2} = \frac{dz}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x\,dx - y\,dy}{zx^2 + y^2 z} = \frac{dz}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x\,dx - y\,dy}{z(x^2+y^2)} = \frac{dz}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow x\,dx - y\,dy = z\,dz$$

$$\Rightarrow \varphi_2 : x^2 - y^2 - z^2 = C_2$$

نتأكد من الاستقلال وفق المعين اليعقوبي.

(3) $\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dZ}{xyZ - 2x^2}$
(1) (2) (3)

نختار (1) و (2)

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_1 : \frac{x}{y} = C_1$$

$-Z(1) + (3) = (1)$

$$\Rightarrow \frac{-Z\,dx + dZ}{-Z\,xy + xyZ - 2x^2} = \frac{dx}{x \cdot \frac{x}{C_1}}$$

$$\frac{x}{y} = C_1 \Rightarrow \frac{x}{C_1} = y$$

$$\Rightarrow -Z\,dx + dZ = -2C_1\,dx$$

$$\Rightarrow (-Z + 2C_1)dx + dZ = 0$$

$$\Rightarrow dx + \frac{dZ}{2C_1 - Z} = 0$$

$$\Rightarrow x - \ln|2C_1 - Z| = C_2$$

$$\varphi_2 : x - \ln\left|\frac{2x}{y} - Z\right| = C_2$$

نتحقق من المصفوفة اليعقوبية للاستقلال

السؤال الثاني: طريقة الحذف:

① $\frac{dy}{dx} = 3y - 2z \quad (1)$

$\frac{dz}{dx} = 2y - z \quad (2)$

من (1):

$y' = 3y - 2z \quad (3)$

$\Rightarrow 2z = 3y - y'$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow z = \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}y' \\ &\Rightarrow z' = \frac{3}{2}y' - \frac{1}{2}y''\end{aligned}\right\} \star$$

نعوض * في (2):

$\Rightarrow \frac{3}{2}y' - \frac{1}{2}y'' = 2y - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}y'$

نضرب بـ 2:

$\Rightarrow 3y' - y'' = 4y - 3y + y'$

$\Rightarrow y'' - 2y' + y = 0$

خطية مرتبة ثانية ذات أمثال ثابتة متجانسة

نكتب المعادلة المميزة:

$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0$

$\Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 1$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x \\ &y' = (c_1 + c_2 x)e^x + c_2 e^x\end{aligned}\right\} \star\star$$

نعوض ** في (3)

$(c_1 + c_2 x)e^x + c_2 e^x = 3(c_1 + c_2 x)e^x - 2z$

$$\Rightarrow 2Z = 2(C_1 + C_2 x)e^x - C_2 e^x$$

$$Z = (C_1 + C_2 x)e^x - \frac{C_2}{2} e^x$$

$$\left.\begin{aligned} Z(x) &= \left(C_1 + C_2 x - \frac{C_2}{x}\right)e^x \\ y(x) &= (C_1 + C_2 x)e^x \end{aligned}\right\} \text{الحل}$$

② $\frac{dx}{dt} = x + Z - y + t - 1$

$\frac{dy}{dt} = Z$

$\frac{dZ}{dt} = x$

$$\Rightarrow y' = Z \Rightarrow y'' = Z' = x$$

$$\Rightarrow x' = x + Z - y + t - 1$$

$$y''' = y'' + y' - y + t - 1$$

$$\Rightarrow y''' - y'' - y' + y = t - 1$$

خطية مرتبة ثالثة غير متجانسة ذات أمثال ثابتة

نوجد حل المتجانسة :

$$\Rightarrow m^3 - m^2 - m + 1 = 0$$

$$m^2(m-1) - (m-1) = 0$$

$$(m^2-1)(m-2) = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 1$$

$$m_3 = -1$$

$\Rightarrow y_h = (C_1 + C_2 t)e^{t} + C_3 e^{-t}$

نوجد حل غير المتجانسة y_p بطريقة المعاملات غير المعينة

1	$y_p = At + B$
-1	$y' = A$
-1	$y'' = 0$
1	$y''' = 0$

$\Rightarrow -A + At + B = t - 1$

$\Rightarrow A = 1 \quad , \quad B = 0$

$\Rightarrow y_p = t$

$\Rightarrow y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{t} + C_3 e^{-t} + t$

$\Rightarrow Z = y'$

$= (C_1 + C_2 t + C_2)e^{t} - C_3 e^{-t} + 1$

$\Rightarrow x = y''$

$= (C_1 + C_2 t + 2C_2)e^{t} + C_3 e^{-t}$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = 2y + Z + x$

$\dfrac{dZ}{dx} = 2y + 3Z - x$

نحل المتجانسة :

$\dfrac{dy}{dx} = 2y + Z$ —1

$\dfrac{dZ}{dx} = 2y + 3Z$ —2

من أ نجد $y' = 2y + z$

$\Rightarrow z = y' - 2y$

$z' = y'' - 2y'$ $\}$ ☆

نعوض ☆ في $2'$

$y'' - 2y' = 2y + 3y' - 6y$

$\Rightarrow y'' - 5y' + 4y = 0$

- نوجد حل المتجانسة y_h :

$\Rightarrow m^2 - 5m + 4 = 0$

$\Rightarrow (m-1)(m-4) = 0$

$\Rightarrow m_1 = 1 \, , \; m_2 = 4$

$y_h(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}$

$y' = C_1 e^{x} + 4C_2 e^{4x}$ $\}$ ☆☆

نعوض ☆☆ في $z = y' - 2y$

$\Rightarrow z_h = -C_1 e^{x} + 2C_2 e^{4x}$

لإيجاد الحل الخاص نستخدم طريقة لاغرانج .

بعد التعويض في $1, 2$

$\Rightarrow C_1'(x) e^{x} + C_2'(x) e^{4x} = x$

$-C_1'(x) e^{x} + 2C_2'(x) e^{4x} = -x$

$\Rightarrow 3C_2'(x) e^{4x} = 0$

$C_2'(x) = 0 \Rightarrow C_2 = C_3$

$\Rightarrow C_1'(x) e^{x} + C_3 e^{4x} = x$

$\Rightarrow C_1(x) = -x e^{-x} - e^{-x} - \frac{C_3}{3} e^{3x} + C_4$

$$\Rightarrow y(x) = -(xe^{-x} + e^{-x} + \frac{C_3}{3} e^{3x} + C_4)e^{x} + 2C_3 e^{4x}$$

$$\Rightarrow y(x) = -x - 1 + \frac{2}{3} C_3 e^{4x} - C_4 e^{x}$$

$$\Rightarrow z(x) = (xe^{-x} + e^{-x} + \frac{C_3}{3} e^{3x} + C_4)e^{x} + 2C_3 e^{4x}$$

$$\Rightarrow z(x) = x + C_4 e^{x} + \frac{7}{3} C_3 e^{4x} + 1$$

$$\frac{dx}{dt} = x - y + 5z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

$$\frac{dz}{dt} = -x + y - 4z$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A - mI| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-m & -1 & 5 \\ 1 & 1-m & 0 \\ -1 & 1 & -4-m \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 1-m \\ -1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$(-4-m)\begin{vmatrix} 1-m & -1 \\ 1 & 1-m \end{vmatrix} = 0$$

بعد فك الحدود :

$$\Rightarrow 5(2-m)-(4+m)\left((-m+1)^2+1\right)=0$$

$$\Rightarrow m_1 = 1 \; , \; m_2 = -1 \; , \; m_3 = -2$$

القيم الذاتية حقيقية مختلفة $\Leftarrow$

$$\boxed{m_1 = 1} \Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A - m_1 I)C_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} -\beta_1 - 5\gamma_1 &= 0 \\ \alpha_1 &= 0 \\ -\alpha_1 + \beta_1 - 5\gamma_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0 \; , \quad \beta_1 = 5\gamma_1$$

نفرض $\gamma_1 = 1 \Rightarrow \beta_1 = 5$

$$\Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y_1 = C_1 e^{m_1 x}$$

$$\Rightarrow Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x}$$

من أجل m_2 , m_3

نكرر نفس الخطوات

$$C_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \Leftarrow \boxed{m_2 = -1} \Leftarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_2 - \beta_2 + 5\gamma_2 = 0 \\ \alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ -\alpha_2 + \beta_2 - 3\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

نفرض $\beta_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = -2 \;,\; \gamma_2 = 1$

$$\Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

من أجل $\boxed{m_3 = -2} \Rightarrow$ $C_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_3 - \beta_3 + 5\gamma_3 = 0 \\ \alpha_3 + 3\beta_3 = 0 \\ -\alpha_3 + \beta_3 - 2\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

$\gamma_3 = 2 \;,\; \alpha_3 = -3 \quad \Leftarrow \quad \beta_3 = 1$ نفرضه

$$\Rightarrow C_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2x}$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2x}$$

$$\Rightarrow x = -2C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$$

$$y = C_1 5 e^{x} - 2C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$$

$$z = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} + 2C_3 e^{-2x}$$

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = -2y + 3z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$\Rightarrow |A - mI| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-m & 1 \\ -2 & 3-m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m + 5 = 0$$

$$\Delta < 0$$

$$\Rightarrow m_{1,2} = 2 \pm i$$

$m_1 = 2 + i$ نختار الصيغة

$(A - m_1 I) E_1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-1-i)\alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha + (1-i)\beta = 0 \end{cases}$$

$\beta = 1 + i \quad , \quad \alpha = 1$ نضع

$$\Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y = e^{at}\left[b_1 [\mathrm{Re} \cos bt - \mathrm{Im} \sin bt] + b_2 [\mathrm{Im} \cos t + \mathrm{Re} \sin t]\right]$$

$$y = e^{2x}\left[b_1 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos x - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin x\right] + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin x\right]$$

$$\Rightarrow y = e^{2x}[b_1 \cos x + b_2 \sin x]$$

$$z = e^{2x}[b_2 \cos x - b_1 \sin x]$$

---

① $\left.\begin{aligned} y' &= y - z \\ z' &= y + 3z \end{aligned}\right\}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-m & -1 \\ 1 & 3-m \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0$

$\Rightarrow m_1 = m_2 = 2$

⇐ جذر حقيقي مكرر

نفرض الحل من الشكل:

$Y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$

$Z = (C_3 + C_4 x) e^{2x}$

من ①

$\Rightarrow (C_2 + 2C_1 + 2C_2 x) e^{2x} =$

$(C_1 - C_3 + (C_2 - C_4)x) e^{2x}$

من ② ~~②~~

$\Rightarrow (C_4 + 2C_3 + 2C_4 x) e^{2x} =$

$(C_1 + 3C_3 + (C_2 + 3C_4)x) e^{2x}$

⇐ من ① أمثال x^0

$C_2 + 2C_1 = C_1 - C_3$

$\Rightarrow C_3 = -C_2 - 3C_1$

أمثال x:

$2C_2 = C_2 - C_4$

$C_4 = -C_2$

ومنه:

$Y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$

$Z = (-C_2 - 3C_1 - C_2 x) e^{2x}$

انتهت المحاضرة