كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية٢

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٦

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

## المعادلات التفاضلية التامة وغير التامة:

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0 \quad \ldots (*)$$

نقول عن المعادلة التفاضلية إنها تامة إذا كانت ناتجة عن مفاضلة تابع ما من الشكل: $U(x,y,z) = C$ وعندها:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \;,\; \frac{\partial U}{\partial y} = Q \;,\; \frac{\partial U}{\partial z} = R$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \;,\; \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \;,\; \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad \ldots (1)$$

نتائج:

(1) الشرط اللازم والكافي كي تكون المعادلة (*) تامة هي أن تحقق أمثالها المعادلات (1)

(2) المعادلة التامة تحقق شرط معادلة الاكمالة (الحل) ولكن المعادلة المقابلة للحل ليس بالضرورة أن تكون تامة ولكن يمكن ردها إلى معادلة تامة يضرب بعامل التكامل $\sigma(x,y,z)$

$$\sigma P dx + \sigma Q dy + \sigma R dz = 0$$

تحقق أمثال هذه المعادلة المعادلات (1).

## بعض الحالات الخاصة لإيجاد عامل التكامل:

① إذا كان $P = P(x)$ و $Q = Q(y)$ و $R = R(z)$
عندها تكون المعادلة تامة

② $Pdx + Qdy$ تابع فقط لـ $R = R(z), y, x$
تكون المعادلة تامة

③ إذا كان $Pdx + Qd(y)$ تابع فقط لـ $y, x$ فإنّ
عامل التكامل تابع لـ $x, y$ فقط، فإذا كان
$R(x,y,z) = R_1(x,y)R_2(z)$ يكون عامل التكامل هو:

$$\sigma = \frac{1}{R_1(x,y)}$$

مثال:

$$(y+z)dx + x\,dy + x\,dz = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y+z & x & x \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x & x \end{vmatrix} = (y+z)(0-0) - x(1-1) + x(1-1) = 0$$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ صفة المعادلة قابلة للكاملة

$$\sigma = \frac{1}{x(y+z)}$$

نضرب المعادلة بـ $\sigma$ فيصبح:



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy+dz}{y+z} = 0$$

$$\ln|c(x)| + \ln|(y+z)| = \ln C \Rightarrow x(y+z) = C$$

* المعادلة التفاضلية التامة:

نقول عن المعادلة التفاضلية إنها تامة إذا كانت P,Q,R توابع متجانسة من نفس الدرجة

مثال:

$$(y+z)dx + (x+y)dy + (y+z)dz = 0$$

* المعادلة التامة القابلة للمكاملة تتميز بالخاصتين التاليتين:

① إذا كانت متجانسة من الدرجة $n \neq -1$ وقابلة للمكاملة وتامة فإن حلها العام:

$$xP + yQ + zR = C$$

② المعادلة التامة قابلة للمكاملة وغير تامة يكون عامل تكاملها:

$$\sigma = \frac{1}{xP + yQ + zR}$$

حل: $(y+z)dx + (x+z)dy + (y+z)dz = 0$

$$x(y+z) + y(x+z) + z(y+z) = C$$

مثال: $yz\,dx - z^2\,dy - xy\,dz = 0$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\sigma = \frac{1}{xyz - yz^2 - xyz} = \frac{-1}{yz^2}$$

مثال:

$$-\frac{dx}{z} + \frac{dy}{y} + \frac{x\,dz}{z^2} = 0$$

$$-\frac{x}{z} + \ln y = C$$

طريقة معادلتين ذات تفاضلات كلية:

$$\begin{cases} P_1\,dx + Q_1\,dy + R_1\,dz = 0 \quad \cdots (2) \\ P_2\,dx + Q_2\,dy + R_2\,dz = 0 \quad \cdots (3) \end{cases}$$

يمكن أن تكتب الكلية بالشكل: المعادلة (2) مع معادلة من الشكل:

$$W(x,y,z) = C \quad \cdots (4)$$

وعندها نفاضل المعادلة (4) فنحصل على معادلة من الشكل (3) والمطلوب إيجاد الحل المشترك.

(1) المعادلتين قابلتين للحل: عندما نوجد حل (2) ولكن $U = C_1$ ونوجد حل (3) ولكن $v = C_2$ فيكون الحل المشترك لهما هو:

$$\begin{cases} U(x,y,z) = C_1 \\ v(x,y,z) = C_2 \end{cases}$$

مثال:

$$\begin{cases} x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \\ dx - dy + 3\,dz = 0 \end{cases}$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\begin{cases} U(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = C_1 \\ v(x,y,z) = x - y + 3z = C_2 \end{cases}$$

(2) إذا كانت (2) قابلة للحل و (3) غير قابلة للحل لأي إحدى المعادلتين غير قابلة للحل) عندها نكامل المعادلة القابلة للحل ومن الحل الناتج نوجد أحد المجهولات مثل z بدلالة x, y ونعوض في المعادلة غير القابلة للحل فنحصل على z عندها يكون حل المعادلة والحل المشترك هو النقط المشتركة للحلين

مثال: غير قابلة للمكاملة

$$\begin{cases} dx + dy - dz = 0 \quad \cdots (1) \\ ydx + zdy - ydz = 0 \quad \cdots (2) \end{cases}$$

$$x + y - z = C_1 \Rightarrow \boxed{z = x + y - C_1}$$

$$\boxed{dz = dx + dy}$$

نعوض في المعادلة (2) نجد أن:

$$ydx + (x + y - C_1)dy - y(dx + dy) = 0$$

$$(x - C_1)dy = 0 \Rightarrow y = C_2$$

حل شاذ $\begin{cases} x + y - z = C_1 \\ x = C_2 \end{cases}$ حل عام $\begin{cases} x + y - z = C_1 \\ y = C_2 \end{cases}$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(3) إذا كانت كل من (2) و (3) غير قابلتين للكاملة عندها نكامل عندئذ أحد المتحولين بـ تماثلية.

مثال:

$$\begin{cases} y\,dx + dy + dz = 0 \\ dx + x\,dy - dz = 0 \end{cases}$$

بالجمع نجد أن:

$$(y+1)\,dx + (1+x)\,dy + = 0$$

$$(y+1)(x+1) = C_1$$

$$x+1 = \frac{C_1}{y+1} \quad \rightarrow \quad dx = \frac{-C_1}{(y+1)^2}\,dy$$

$$y\left(\frac{-C_1}{(y+1)^2}\,dy\right) + dy + dz = 0$$

$$\left(1 - \frac{C_1 y}{(y+1)^2}\right)dy + dz = 0$$

$$y - C_1 \cdot \frac{1}{2}\ln|1+y|^2 + z - \frac{C_1}{1+y} = C_2$$

$$\begin{cases} y - \frac{1}{2}(x+1)(y+1)\ln|1+y|^2 + z - x - 1 = C_2 \\ (y+1)(x+1) = C_1 \end{cases}$$

تعريف المعادلة التفاضلية الجزئية:

هي كل معادلة تحوي على تابع ع بمتحولين مستقلين $x, y$ أو أكثر وعلى مشتقات الجزئية لهذا التابع بالنسبة لمتحولاته المستقلة.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

**ملاحظة:** إذا كانت المعادلة تحوي على تابع ومتحول واحد فإن المعادلة التفاضلية تكون معادلة تفاضلية عادية.

**تعريف:** نسمي المعادلة التفاضلية خطية إذا كان التابع ومشتقاته الجزئية تظهر بصورة خطية أي الأمثال في المعادلة تكون تابعة فقط لمتغيرات مستقلة.

**تعريف:** نسمي المعادلة التفاضلية الجزئية مشبه خطية إذا كانت خطية بالنسبة لأعلى مشتق تحوية المعادلة بغض النظر عن خطية المشتقات من المرتبة الأقل لدرجة أعلى مشتق تكون لها.

* نقول عن معادلة تفاضلية جزئية إنها من المرتبة n إذا كان أعلى مشتق جزئي فيها من المرتبة n.

* سوف نستخدم هذه الرموز لمشتقات جزئية لـ z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x} = r \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} = t \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s$$

**الحل العام:** هو حل يحتوي على عدد من الثوابت الاختيارية يساوي رتبة المعادلة.

**الحل الخاص:** هو حل يمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار خاص لثوابت الاختيارية.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل الثاني: هو حل لا يمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار خاص لثوابت الاختيارية.

مثال صفحة: جد حل المعادلة التفاضلية الجزئية من الدرجة الثانية يمثل حلاً تكاملياً للمعادلة التفاضلية الجزئية، وبالتالي المعادلة التفاضلية الجزئية تعرف بصفة عامة بأنها تحتوي على التكاملي.

يمكن الحصول على معادلة تفاضلية جزئية من حذف الثوابت الاختيارية من علاقات بفرض أن بين المتغيرات أو حذف الدوال الاختيارية لهذه المتغيرات.

تشكيل المعادلات التفاضلية الجزئية:

إن تشكيل معادلة تفاضلية جزئية لعلاقة جبرية يعني إيجاد علاقة تحوي على الوسطاء الاختيارية (الثوابت الاختيارية والدوال الاختيارية) والحصول عليها تشتق العلاقة الجبرية جزئياً بالنسبة للمتغيرات عدد أس المرات يكفي لحذف هذه الوسطاء بين المعادلات الناتجة والعلاقة الجبرية.

* الوسطاء في العلاقة الجبرية يمكن أن تكون ثوابت اختيارية أو توابع اختيارية لهذا لإيجاد المعادلة التفاضلية الجزئية نميز الحالات الآتية:

1) الوسطاء ثوابت اختيارية:



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(1) العلاقة الجبرية تابعة لثابتين اختياريين: (عدد المتحولات المستقلة يساوي عدد الثوابت الاختيارية):

نشتق العلاقة بالنسبة لكل من x, y, z ونحذف الثوابت من العلاقات الثلاث فنحصل على معادلة تفاضلية جزئية تكون العلاقة الجبرية حل لها.

مثال:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=1$$

نشتق العلاقة جزئياً بالنسبة لـ x, y نجد أن:

- نشتق بالنسبة لـ x نجد أن:

$$2(x-a)+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow (x-a)=-zp$$

- نشتق بالنسبة لـ y نجد أن:

$$2(y-b)+2z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow (y-b)=-zq$$

- نعوض في المعادلة نجد أنّ:

$$z^2p^2+z^2q^2+z^2=1$$

$$z^2(p^2+q^2+1)=1$$

وهي المعادلة التفاضلية الجزئية المطلوبة.

(2) العلاقة الجبرية تحوي ثابت اختياري واحد: (العلاقة الجبرية تحوي على ثوابت اختيارية أقل من عدد المتحولات):

نشتق مرة واحدة إما بالنسبة لـ x أو بالنسبة لـ y أو بالنسبة لـ x, y ونحذف الثابت من أي علاقتين وبالتالي يمكن أن نحصل على أكثر من معادلة تفاضلية جزئية تكون العلاقة الجبرية حل لها.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$z = axy$

نشتق جزئياً بالنسبة لـ x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ay \Rightarrow p = ay \Rightarrow a = \frac{p}{y}$$

$$\boxed{z = px}$$

أو نشتق جزئياً بالنسبة لـ y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = ax \Rightarrow q = ax \Rightarrow a = \frac{q}{x}$$

$$\boxed{z = qy}$$

أو

$$\boxed{xp - yq = 0}$$

(3) المعادلة الجبرية تحوي على ثلاث ثوابت اختيارية لعدد الثوابت الاختيارية أكبر من عدد المتحولات المستقلة:

نشتق المعادلة الجبرية بالنسبة لـ x و بالنسبة لـ y فنحصل على ثلاث علاقات والعلاقة الرابعة نحصل عليها إما بالاشتقاق مرة ثانية بالنسبة لـ x أو بالنسبة لـ y وبالتالي يمكن أن نحصل على أكثر من مسألة تفاضلية تكون المعادلة الجبرية حلاً لها.

مثال:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نشتق جزئياً بالنسبة لـ x:

$$\frac{2x}{a^2} + 2\gamma\frac{P}{c^2} = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

نشتق جزئياً بالنسبة لـ y:

$$\frac{2y}{b^2} + 2\gamma\frac{q}{c^2} = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

نشتق (1) مرة ثانية جزئياً بالنسبة لـ x:

$$\frac{2}{a^2} + \frac{2P^2}{c^2} + 2\gamma\frac{r}{c^2} = 0$$

$$(1) \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = -\frac{2x}{2\gamma P} = \frac{-x}{\gamma P}$$

$$(3) \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{-1}{\gamma r + P^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{\gamma r + P^2} = \frac{x}{\gamma P}}$$

أو نشتق (1) بالنسبة لـ y:

$$\frac{2qP}{c^2} + \frac{2\gamma s}{c^2} = 0 \Rightarrow \boxed{qP + \gamma s = 0}$$

نتيجة: إذا كان عدد الثوابت في العلاقة الجبرية بعدد المتحولات المستقلة فإننا نحصل على معادلة تفاضلية جزئية واحدة تكون المعادلة الجبرية حلاً لها فيما عدا ذلك يمكن الحصول على أكثر من معادلة تفاضلية جزئية.

انتهت المحاضرة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة