كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية٢

المحاضرة : **السادسة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٦

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المجموعة المعادلية الخطية ذات الأمثال الثابتة والغير متجانسة:

$$Y' = AY + B$$

A: مصفوفة الثوابت $n \times n$

B: مصفوفة توابع في t

* حلها هو: $Y = Y_p + Y_h$

لإيجاد Y_p سنستخدم إحدى الطريقتين:

- طريقة لاغرانج
- طريقة المؤثر التفاضلي:

طريقة المؤثر التفاضلي:

رأينا سابقاً طريقة لاغرانج لحل المجموعات المعادلية الخطية بالصورة العامة والآن طريقة المؤثر التفاضلي لإيجاد الحل الخاص Y_p

1- نكتب المعادلات بدلالة المؤثر التفاضلي $D = \frac{d}{dt}$

مثال:

$$x'' - 3x - 4y = 0$$
$$y'' + x + y = 0$$

$$\Rightarrow (D^2 - 3)x - 4y = 0$$
$$(D^2 + 1)y + x = 0$$

- والآن لدينا مجموعة تفاضلية:

$$f_1(D)x + f_2(D)y + f_3(D)z = R_1(t) \quad (1)$$
$$g_1(D)x + g_2(D)y + g_3(D)z = R_2(t)$$
$$h_1(D)x + h_2(D)y + h_3(D)z = R_3(t)$$

علبة جبرية بالنسبة لـ x, y, z المطلوب تعيينها

كل المجموعة التفاضلية يتم حلها بواسطة المحددات:

$$A = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix}$$

تابع د

$$\Delta x = \begin{vmatrix} R_1 & f_2 & f_3 \\ R_2 & g_2 & g_3 \\ R_3 & h_2 & g_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} f_1 & R_1 & g_3 \\ g_1 & R_2 & g_3 \\ h_1 & R_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & R_1 \\ g_1 & g_2 & R_2 \\ h_1 & h_2 & R_3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Ax = \Delta x$$
$$Ay = \Delta y \quad (2)$$
$$AZ = \Delta z$$

ثلاث معادلات تفاضلية كل معادلة مرتبة المجموعة التفاضلية ستكون n وبالتالي سوف نحصل على 3 مجموعات من ثوابت

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

اختيارية في كل مجموعة يوجد n ثابت اختياري نحصل على 3n ثابت اختياري وبالتالي بإيجاد الحل العام لكل معادلة من (2) وأخذ جملة الحلول كل للمجموعة المقابلة وتعويض حدد ثوابت لـ n نوجد علاقات بين الثوابت نعوض قيمة كل من x, y, z في المجموعة المعطاة ونطابق بين الأمثال فنحصل على مجموعتين من الثوابت الاختيارية بإزالة المجموعة الثالثة ويبقى لدينا n ثابت.

مثال:

$$x' + y' + 2x + y = t$$
$$y' + 3y + 5x = t^2$$

الحل:

$$\Rightarrow (D+2)x + (D+1)y = t$$
$$(D+3)y + 5x = t^2$$

$$\Rightarrow A = \begin{vmatrix} D+2 & D+1 \\ 5 & D+3 \end{vmatrix} = (D+2)(D+3) - 5(D+1)$$
$$= D^2 + 5D + 6 - 5D - 5$$
$$= D^2 + 1$$

$$\Rightarrow \Delta x = \begin{vmatrix} t & D+1 \\ t^2 & D+3 \end{vmatrix} = (D+3)t - (D+1)t^2$$
$$= 1 + 3t - 2t - t^2$$
$$= 1 + t - t^2$$

$$\Rightarrow \Delta y = \begin{vmatrix} D+2 & t \\ 5 & t^2 \end{vmatrix} = (D+2)t^2 - 5t$$
$$= 2t + 2t^2 - 5t$$
$$= 2t^2 - 3t$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow Ax = \Delta x$

$= (D^2+1)x = 1+t-t^2$ ★

$\Rightarrow Ay = \Delta y$

$= (D^2+1)y = 2t^2 - 3t$ ★★

× نوجد حل المعادلة ١ :

$\Rightarrow D^2+1=0 \Rightarrow D = \mp i$

$x_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

× نوجد حل غير المعادلة ١ :

$x_p = \frac{1}{D^2+1}(1+t-t^2)$

بالقسمة الاقليدية لـ $\frac{1}{D^2+1}$

$$\begin{array}{r|l} & 1-D^2 \\ \hline 1+D^2 & 1 \\ & 1+D^2 \\ \hline & -D^2 \\ & -D^2-D^4 \\ \hline & D^4 \end{array}$$

$\frac{1}{D^2+1} = (1-D^2) + \frac{D^4}{1+D^2}$ ← هل

$\Rightarrow x_p = (1-D^2)(1+t-t^2)$

$= 1+t-t^2+2 = 3+t-t^2$

$\Rightarrow x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 3 + t - t^2$ ★'

× نوجد حل المعادلة ٢ ★★

$\Rightarrow y_h = b_1 \cos t + b_2 \sin t$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نوجد حل غير المتجانسة ★★★ ★

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2+1}(2t^2-3t) = (1-D^2)(2t^2-3t)$$

$$= 2t^2 - 3t - 4$$

$$\Rightarrow y(t) = b_1\cos t + b_2\sin t + 2t^3 - 3t - 4$$

نوجد Dy , Dx ثم نعوض

$$\Rightarrow Dx = x' = -c_1\sin t + c_2\cos t + 1 - 2t$$

$$\Rightarrow Dy = y' = -b_1\sin t + b_2\cos t + 4t - 3$$

نطابق بمعادلة (1) ونبدأ بـ (1)

$$\Rightarrow (c_2+2c_1)\cos t + (2c_2-c_1)\sin t + 4t - 3t - 4 + 2t^2 + 1 - 2t$$

$$+6 = 3 + 2t - 2t^2 + (b_1+b_2)\cos t + (b_2-b_1)\sin t = t$$

$$\Rightarrow (2c_1+c_2)\cos t + (2c_2-c_1)\sin t + (b_1+b_2)\cos t + (b_2-b_1)\sin t = 0$$

بـ (2) بعد الاختزال

$$\Rightarrow (b_2+3b_1)\cos t + (-b_1+3b_2)\sin t + 5c_1\cos t + 5c_2\sin t = 0$$

بالمطابقة:

$$\Rightarrow c_2 + 2c_1 + b_1 + b_2 = 0$$

$$b_2 + 3b_1 + 5c_1 = 0$$

$$2c_2 - c_1 + b_2 - b_1 = 0$$

$$3b_2 - b_1 + 5c_2 = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{b_1 - 3b_2}{5}$$

$$\Rightarrow c_1 = -\frac{b_2+3b_1}{5}$$

نعوض في c_2 و c_1

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المعادلات ذات التفاضلات الكلية:

الشكل العام لها:

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z) = 0 \quad \cdots (1)$$

ويمكن كتابتها بالشكل التالي (محلولة بالنسبة لأحد تفاضلاتها):

$$dz = M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy$$

$$= \frac{-P}{R}dx + \frac{-Q}{R}dy \quad \cdots (2)$$

وفي هذه الحالة يكون تابع لـ x, y

شروط قابلية المكاملة:

* باعتبار أن الحلة تكتب بالشكل (2) وبالتالي حل المعادلة الذي يقبل بها إلى مطابقة $z = z(x,y)$

عفاضلته:

$$dZ = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad \cdots (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = M \;,\; \frac{\partial z}{\partial y} = N \quad \cdots (4)$$

نعلم أن:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

الآن:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(M(x,y,z)\right) =$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y,\xi)\right)=\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial M}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial \xi}M=\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial M}{\partial \xi}N \qquad (5)$$

$\Leftarrow$ نتيجة: الشرط اللازم والكافي حتى يكون للمعادلة (2) الشكل (5) هو أن تحقق أمثال تفاضلها (N, M) الشرط (5) وهو الشرط القابلية الكاملة).

$$M=\frac{-P}{R} \quad \& \quad N=\frac{-Q}{R}$$

نعوض في (5):

$$\Rightarrow \frac{-\frac{\partial Q}{\partial x}R+\frac{\partial R}{\partial x}Q}{R^2}+\frac{-\frac{\partial Q}{\partial x}R+\frac{\partial R}{\partial x}Q}{R^2}\left(\frac{-P}{R}\right)$$

$$=\frac{-\frac{\partial P}{\partial y}R+\frac{\partial R}{\partial y}P}{R^2}+\frac{-\frac{\partial P}{\partial \xi}R+\frac{\partial R}{\partial \xi}Q}{R^2}\left(\frac{-Q}{R}\right)$$

بعد اختزال وإكمال:

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0$$

أي بالشكل:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

الطريقة الولية للحل:

لتكن لدينا المعادلة (1):

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$$

لحلها نفرض أحد المتحولات (x أو y أو z) وليكن z مثلاً

عندها $dz = 0$

$$\Rightarrow P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy = 0 \qquad (7)$$

وهي معادلة تفاضلية عادية حلولة بالنسبة لـ $\frac{dy}{dx}$ أو $\frac{dx}{dy}$ بكاملتها باعتبار z ثابتة نحصل على حلها بالشكل:

$$f(x,y,z) = \phi(z) \qquad (8)$$

ϕ تابع للمتحول الذي اعتبرناه ثابت.

بمفاضلة (8) كلياً:

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = d\phi \qquad (9)$$

$\Leftarrow$ بمقارنة (9) بـ (1) نحصل على المعادلة التفاضلية التي تحوي z و ϕ فقط

نوجد ϕ ونعوضها في (8) فنحصل على التكامل العام.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz = 0$$

نختبر شرط المكاملة:

$$\begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = yz(x-x) + zx(y-y) + xy(z-z) = 0$$

⇐ المعادلة قابلة للمكاملة.

نختار z ثابت ⇐ $dz = 0$

$$\Rightarrow yz\,dx + zx\,dy = 0$$

$$\Rightarrow z(y\,dx + x\,dy) = 0$$

نقسم على z:

$$\Rightarrow xy = \phi(z)$$

بالمفاضلة:

$$x\,dy + y\,dx = d\phi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\phi}x\,dy + \frac{1}{\phi}y\,dx = \frac{1}{\phi}d\phi$$

$$\Rightarrow x\frac{1}{\phi}dy + \frac{1}{\phi}y\,dx - \frac{1}{\phi}d\phi = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\phi}d\phi = xy\,dz = \phi\,dz$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{\phi} + \frac{dz}{z} = 0$$

$$\Rightarrow \phi \cdot z = C$$

$$\Rightarrow \phi = C/z$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نعوض في $xy = \phi(z)$

$\Rightarrow xy = \frac{c}{z}$

$\Rightarrow xyz = c$

مثال وظيفة

$2xy + (y^2 - x^2 - z^2)\,dy + 2yz\,dz = 0$

سنحل كلي

$\phi = cy - y^2$

والحل العام هو $\frac{x^2 + z^2}{y} = c$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z