كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية٢

المحاضرة : **الخامسة**/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المجموعة الخطية ذات الأمثال الثابتة:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + \cdots + a_{2n}y_n + b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

a_{ij} : ثوابت

b_i توابع لـ t

$$\Rightarrow Y' = AY + B(t)$$

يمكن لدينا مجموعة خطية ذات أمثال ثابتة من المرتبة الثالثة:

$$\frac{dy_1}{dt} = h_1y_1 + h_2y_2 + h_3y_3 + b_1(t)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = k_1y_1 + k_2y_1 + k_3y_3 + b_2(t) \quad (1)$$

$$\frac{dy_3}{dt} = l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3 + b_3(t)$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y' = AY + B(t)$$

لحلها نبدأ بحل المجموعة المتجانسة:

$$\frac{dy_1}{dt} = h_1 y_1 + h_2 y_2 + h_3 y_3$$

$$\frac{dy_2}{dt} = k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 \quad (2)$$

$$\frac{dy_3}{dt} = l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3$$

$$\Rightarrow Y' = AY$$

بفرض حلها $y_h = y_h(t)$ ومن ثم نوجد حل خاص للمجموعة الغير متجانسة (1) ولتكن $y_p = y_p(t)$

فيكون الحل العام للمجموعة المتجانسة:

$$y = y_h + y_p$$

وهما توابع لـ (t)

y_h: توجد بالطرق السابقة ولكن عادتها ذات أمثال ثابتة توجد طريقة إضافية.

عادتها ذات أمثال ثابتة يمكن حلها بطريقة أولى:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

طريقة أولى:

ملاحظة: نعلم أن المجموعة الخطية ذات الأشكال الثابتة تحول إلى معادلة خطية ذات أشكال ثابتة ومرتبة المرتبة وعا أن شكل الحلول معادلة تفاضلية خطية ذات أشكال ثابتة الأس بالتالي المجموعة التفاضلية المواقفة تقبل شكل الحلول وهو الشكل الأسي.

** كل المجموعة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات الأشكال الثابتة نعرض لها حل بن الشكل:

$$y = Ce^{mt}$$

صفوفة

حيث: C: متجه ثابت

و m ثابت نريد تحديد قيمته وبالتالي بالاشتقاق

$y' = Ay$ نعوض في المجموعة

$$\Rightarrow y' = Cme^{mt}$$

بالتعويض في (2):

$$\Rightarrow y' = Ay$$

$$\Rightarrow Cme^{mt} = ACe^{mt}$$

$$\Rightarrow (AC - Cm)e^{mt}) = 0$$

$$\Rightarrow (A - mI)Ce^{mt} = 0$$

$\neq 0$

$$(A - mI)C = 0 \quad **$$

نختار $C \neq 0$ بصفوفة صفرية.

$$\Rightarrow |A - mI| = 0$$

وهي المعادلة المميزة ونحل بنها على قيم m نسميها القيم الذاتية ومنها نحصل على حل المجموعة التفاضلية بعد تعيين

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بعد تعيين قيم C الموافقة من ★★ يسمى كتابة ناتجة.

① القيم الذاتية حقيقية وغير متساوية m_1, m_2, m_3 ؛

$$C_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \leftarrow m_1$$

$$\Rightarrow Y_1 = C_1 e^{m_1 t}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \leftarrow m_2$$

$$\Rightarrow Y_2 = C_2 e^{m_2 t}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \leftarrow m_3$$

$$\Rightarrow Y_3 = C_3 e^{m_3 t}$$

- إذا كانت المعين التالي : $W(Y_1, Y_2, Y_3) \neq 0$

أي :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 e^{m_1 t} & \alpha_2 e^{m_2 t} & \alpha_3 e^{m_3 t} \\ \beta_1 e^{m_1 t} & \beta_2 e^{m_2 t} & \beta_3 e^{m_3 t} \\ \gamma_1 e^{m_1 t} & \gamma_2 e^{m_2 t} & \gamma_3 e^{m_3 t} \end{vmatrix} \neq 0$$

عندئذٍ يكتب الحل العام للمعادلة بالشكل :

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$y = c_1 C_1 e^{m_1 t} + c_2 C_2 e^{m_2 t} + c_3 C_3 e^{m_3 t}$$

مثال:

$$y' = 4y - z$$
$$z' = -4y + 4z$$

الحل:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A - mI| = \begin{vmatrix} 4-m & -1 \\ -4 & 4-m \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (4-m)^2 - 4 = 0$$

$$m_1 = 2 \quad , \quad m_2 = 6$$

نجد متجهة ذاتية

من أجل القيمة الذاتية $m_1 = 2$:

$$(A - mI)C = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ -4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta_1 = 2\alpha_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

نأخذ $\alpha_1 = 1$ (أي)

$$\Rightarrow \beta_1 = 2 \Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ومنه:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

* من أجل القيمة الثانية $m_2 = 6 \Leftarrow$

$$(A - mI)C = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -2\alpha_2 - \beta_2 = 0$$

$$-4\alpha_2 - 2\beta_2 = 0$$

$$\Rightarrow \beta_2 = -2\alpha_2$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -2\alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

نأخذ $\alpha_2 = 1$ (أي)

$$\Rightarrow \beta_2 = -2 \Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{6t} = \begin{pmatrix} e^{6t} \\ -2e^{6t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{6t} \\ 2e^{2t} & -2e^{6t} \end{vmatrix} = -4e^{8t} \neq 0$$

وبالتالي الحل العام هو:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{6t} \\ -2e^{6t} \end{pmatrix}$$

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{6t}$$
$$z = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{6t}$$

(2) القيم الذاتية عقدية: $m_{1,2} = a \pm ib$

$m_3 \leftarrow$ حقيقي

مثال:

$$x' = 2x - 5y$$
$$y' = 2x - 4y$$

الحل:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A - mI| = \begin{vmatrix} 2-m & -5 \\ 2 & -4-m \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow m^2 + 2m + 2 = 0$$
$$m_{1,2} = -1 \pm i$$
$$m_1 = -1 + i$$ ✱ من أجل القيمة الذاتية

$$\Rightarrow (A - mI)C = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3-i & -5 \\ 3 & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (3-i)\alpha_1 - 5\beta_1 = 0$$
$$2\alpha_1 + (-3-i)\beta_1 = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نفرض $\alpha_1 = 5$

$\Rightarrow \beta_1 = 3 - i$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t}$$

* من أجل القيمة الثانية $m_2 = -1 - i$

$\Rightarrow (A - mI)C = 0$

$$\begin{pmatrix} 3+i & -5 \\ 2 & -3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (3+i)\alpha_2 - 5\beta_2 = 0$

$2\alpha_2 + (-3+i)\beta_2 = 0$

نفرض $\alpha_2 = 5$

$\Rightarrow \beta_2 = 3 + i$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{(-1-i)t}$$

نختبر الاستقلال الخطي

بالتالي الحل العام:

$$y = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{(-1-i)t}$$

حسب دستور أويلر:

$$e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow y = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} e^{-t}(\cos t + i \sin t) + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{-t}(\cos t - i \sin t)$$

$$\Rightarrow y = e^{-t}\left[(C_1+C_2)\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix} + i(C_1-C_2)\begin{pmatrix} 5\sin t \\ -\cos t + 3\sin t \end{pmatrix}\right]$$

نفرض $C_1 + C_2 = b_1$

و $i(C_1 - C_2) = b_2$

$$\Rightarrow y = e^{-t}\left[b_1\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin t\right] + b_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\sin t\right]\right]$$

من أجل $t = 0$:

$$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 0$$

Re Im

$\Leftarrow$ وبالتالي الحل مستقر مطلقاً.

ملاحظة:

① من أجل كل قيمة ذاتية عقدية فإنه توجد قيمة ذاتية أخرى هي العدد المرافق.

② الاتجاهات الذاتية الموافقة هي عقدية ومرافق لها مثبه ذاتي مرافق للأول.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(3) بما أن القيمة الذاتية الأولى هي :

$$\beta = \begin{pmatrix} 5+0i \\ 3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} i = Re\,\beta + Im\,\beta i$$

$$\Rightarrow y = e^{t}\left[b_1 [Re\,B\cos t - Im\,B\sin t] + b_2 [Im\,B\cos t + Re\,B\sin t] \right]$$

$$W(0) = |Re\,B - Im\,B|$$

نتيجة: * في حالة قيمتين ذاتيتين مترافقتين :

$$m_{1,2} = a \mp ib$$

← نأخذ قيمة ذاتية واحدة

$m_1 = a+ib$ ← نأخذ قيمة ذاتية توافق B

$$B = Re\,B + Im\,B\,i$$

فيكون الحل الموافق لهذه القيمة :

$$y = e^{at}\left[b_1 [Re\,B\cos bt - Im\,B\sin bt] + b_2 [Im\,B\cos bt + Re\,B\sin bt] \right]$$

$$W(0) = |Re\,B - Im\,B|$$

مرجعية ما هرة :

$$x = e^{at}(a_1\cos bt + b_1 \sin bt)$$
$$y = e^{at}(a_2\cos bt + b_2 \sin bt)$$

} قيمة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3 القيم الذاتية مكررة:

$m_1 = m_2 = m_3 = m$ أو $m_1 = m_2 = m$

$\hookrightarrow Y = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^{mt}$

أو $Y = (C_1 + C_2 t) e^{mt}$

$\Leftarrow$ نأخذ ونعوض C_3, C_2, C_1

مثال:

$$x' = 8x - y$$

$$y' = 4x + 12y$$

$$\Rightarrow Y' = AY$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A - mI| = \begin{vmatrix} 8-m & -1 \\ 4 & 12-m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (8-m)(12-m) + 4 = 0$$

$$m^2 - 20m + 100 = 0$$

$$\Rightarrow (m-10)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 0$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} t \right] \cdot e^{10t}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 t \\ \beta_1 + \beta_2 t \end{pmatrix} e^{10t} \Rightarrow Y' = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} e^{10t} + 10 \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 t \\ \beta_1 + \beta_2 t \end{pmatrix} e^{10t}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_2 + 10\alpha_1 + 10\alpha_2 t \\ \beta_2 + 10\beta_1 + 10\beta_2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8(\alpha_1 + \alpha_2 t) - (\beta_1 + \beta_2 t) \\ 4(\alpha_1 + \alpha_2 t) + 12(\beta_1 + \beta_2 t) \end{pmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نطابق :

$t^0 : \alpha_2 + 10\alpha_1 = 8\alpha_1 - \beta_1$

$t^1 : 10\alpha_2 = 8\alpha_2 - \beta_2$

$t^0 : \beta_2 + 10\beta_1 = 4\alpha_2 + 12\beta_1$

$t^1 : 10\beta_2 = 4\alpha_2 + 12\beta_2$

$\Rightarrow \beta_2 = 8\alpha_2 - 10\alpha_2 = -2\alpha_2$

$\Rightarrow \beta_1 = -2\alpha_1 - \alpha_2$

$\Rightarrow \alpha_1 = C_1 \; , \; \alpha_2 = C_2$

$\Rightarrow \beta_1 = -2C_1 - C_2$

$\Rightarrow \beta_2 = -2C_2$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 t \\ -2C_1 - C_2 - 2C_3 t \end{bmatrix} e^{10t}$$

نوجد x, y

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z