كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية٢

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تكملة أمثلة:

$$\frac{2dx}{x^2+y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{2z(x+y)}$$
(1) (2) (3)

الحل

$$(1)+2(2)=3$$

$$\frac{2dx+2dy}{x^2+y^2+2xy} = \frac{dz}{2z(x+y)}$$

$$\frac{2d(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{dz}{2z(x+y)}$$

$$\Rightarrow z = C_1(x+y)^4$$

مرة أخرى $1+2(2)=1-2(3)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = C_2$$

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}$$
(1) (2) (3)

الحل

$$dz=0 \Rightarrow z=C_1 \quad ; \quad \psi_1$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{C_1} = \frac{dy}{y} \Rightarrow y e^{-x/C_1} = C_2$$

TEL:0931497960 - (جامعة طرطوس) كلية العلوم - A to Z مكتبة

$$\Rightarrow \varphi_2 : y e^{-x/y} = C_2$$

ولا ننسى الاختبار من أجل بعضنا الاستقلال.

الحالات الخاصة:

(1) المجموعة التفاضلية منفصلة المتغيرات:

وهي مجموعة تفاضلية يمكن أن نحل فيها كل معادلة على حدى فيكون حل الكلية هو جملة حلول المعادلات

مثال:

$$y' = 2xy^2 \quad (1)$$

$$y' = \frac{y-x}{x} \quad (2)$$

الحل:

$$\Rightarrow (1) \quad \frac{y'}{y^2} = 2x \Rightarrow -\frac{1}{y} = x^2 + C_1$$

$$\Rightarrow (2) \quad y' - \frac{1}{x} y = -1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{x}$$

$$xy = C_2 + \int -\frac{dx}{x} = C_2 - \ln x$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{x^2 + C_1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x}(C_2 - \ln x)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(2) طريقة الحذف لحل الحل التفاضلية :

تستخدم هذه الطريقة لحل الحل المؤلفة من معادلتين حيث أنها تصبح أكثر كلما زاد عدد المعادلات تتلخص بإيجاد تابع من أحد المعادلتين وحسابه ثم تعويضه في الثاني للحصول على تابع وحيد.

مثال :

$$\frac{dy}{dx} = 2y - z \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dx} = y + 2z \quad (2)$$

من (1) : $z = 2y - y' \Rightarrow z' = 2y' - y''$

نعوض في (2)

$$2y' - y'' = y + 4y - 2y'$$

$$\Rightarrow y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m + 5 = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \quad (4)$$

(4) نشتق y' ~~$z = 2y - y'$~~

$$\Rightarrow (5)\ y' = 2e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x)$$

نعوض في (5), (4) في $z = 2y - y'$

$$\Rightarrow z = e^{2x}(C_1 \sin x - C_2 \cos x)$$

يكتفى كتابة المعادلة لكل من التوابع y, z علماً أن z هو المطلوب ستقل.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$y' = y + z$$

$$z' = \left(\frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x} - 1\right)y + \left(\frac{2}{x} - 1\right)z$$

بـ ① :

$$\left.\begin{aligned} z &= y' - y \\ z' &= y'' - y' \end{aligned}\right] \Rightarrow \text{(2) نعوض في}$$

$$\Rightarrow y'' - y' = \left(\frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x} - 1\right)y + \left(\frac{2}{x} - 1\right)(y' - y)$$

$$\Rightarrow y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$$

$$\Rightarrow x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

نأخذ تحويل كوشي أولر

نفرض $x = e^t$

$$xy = y_t'$$

$$x^2y = y_t'' - y_t'$$

$$\Rightarrow y_t'' - 3y_t' + 2y = 0$$

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}$$

$$\boxed{y(x) = c_1x + c_2x^2} \quad (1)$$

$$y' = c_1 + 2c_2x$$

نعوض الحل لـ ⇐

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = c_1(1-x) + c_2(2x-x^2)} \quad (2)$$

$\Leftarrow$ (1) و (2) هما حل المعادلة.

حل الجمل المعادلات التفاضلية الخطية:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1 \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n \end{cases} \quad (1)$$

مجموعة تفاضلية من الرتبة n ، a_{ij} و b_i توابع في x ؛ $i,j = \overline{1,n}$

علماً أنها جملة تفاضلية خطية غير متجانسة.

* عندما $b_i = 0$ ، $i = \overline{1,n}$

$\Leftarrow$ تكون جملة خطية متجانسة.

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad (2)$$

يمكن كتابة الجملة (1) و (2) على شكل مصفوفة:

$$y' = Ay + B \quad (3)$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$y' = Ay \quad (4)$$

المؤثر الخطي $L(y) = y' - Ay$

لدينا: (5) $L(y) = B$

(6) $L(y) = 0$

عندئذٍ نكتب (3) بالشكل (5)

نكتب (4) بالشكل (6)

$$L(cy) = cL(y)$$

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$

و

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i L(y_i)$$

★ إيجاد حل الجملة المعادلة: (2) أو (4) أو (6):

مبرهنة 1:

إذا كان y حلاً لـ (6) أو (4) أو (2) فإن cy هو أيضاً حل حيث c ثابت كيفي.

لأن: لدينا $L(y) = 0$

$$L(cy) = 0 = cL(y) = 0 \Leftarrow cy$$

مبرهنة 2:

إذا كان y_1, y_2 حلين للجملة (6) أيضاً $y_1 + y_2$ هو حل

// برهان حسب خواص المؤثر الخطي L //

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة 3 :

إذا كان $Y_1, \dots, Y_n$ حلول للجملة (6) فإنّ :

$$C_1Y_1 + C_2Y_2 + \dots + C_nY_n = Y \quad (7)$$

هو أيضاً حل

// البرهان حسب خواص المؤثر الخطي //

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} y_1 = C_1 y_{11} + \dots + C_n y_{n1} \\ y_n = C_1 y_{1n} + \dots + C_n y_{nn} \end{matrix} \quad (8)$$

$$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} C_i Y_i$$

الاستقلال والارتباط الخطي لجملة حلول : (6)

تكون الحلول Y_i ; $i = \overline{1,n}$ مرتبطة خطياً إذا كان :

$C_i y_i = 0$ كـ C_i وكان C_i غير معدومة في آن واحد.

* معين أمثال C_i :

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_{11} & \dots & y_{n1} \\ \vdots & & \\ y_{1n} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (*)$$

لـ مركبات y_1

وذلك من أجل مجال حقيقي x ما

إذا كان معين رونسكي للحلول $y_1 \dots y_n$ وذات الأمثال a_{ij} المتعلقة بالمعادلة (6) المغايرة للصفر.

$\Rightarrow Y_1, \dots, Y_n$ مستقلة خطياً

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

برهنة:

إذا كان $y_1, \dots, y_n$ مجموعة من الحلول المستقلة خطياً للحلة (6) ذات الأمثال a_{ij} المستمرة عندئذٍ يوجد الحل العام لها بالشكل:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

حيث

$$y_i = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ \vdots \\ y_{in} \end{pmatrix}$$

حل الحلة الخطية غير المتجانسة (1), (3), (5):

$$L(y) = B(x)$$

سنستخدم البرهنة:

إذا كان y_p حل للحلة غير المتجانسة (5) وكان y_h الحل العام للحلة المتجانسة (6) حيث $a_{ij}(x)$ ، $b_i(x)$ توابع مستمرة فإن الحل العام للحلة الغير متجانسة هو:

$$y(x) = y_h(x) + y_{sp}(x)$$

ملاحظة: تعلمنا حلول y_h سابقاً.

طريقة بغرانج لحل الحلة (5) ذات أمثال متغيرة:

* نوجد الحل العام للحلة المتجانسة (6)

$$y_h = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \qquad (9)$$

* نوجد y_p حل خاص لـ (5)

$$y_p = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i \qquad (10)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أي نوجد $C_i(x)$ بحيث يكون (10) حلاً لـ (5)

$$y_p' = \sum_{i=1}^{n} C_i' y_i + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$$

$L(y)=0$ حلول قاعدة للحالة المتجانسة : y_i

أي $y_i' = A y_i$

$$y_p' = \sum_{i=1}^{n} C_i' y_i + A \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$$

نعوض في (5)

$$\sum_{i=1}^{n} C_i' y_i + A \sum_{i=1}^{n} C_i y_i = A \sum_{i=1}^{n} C_i y_i + B$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} C_i' y_i = B$$

معادلات خطية غير متجانسة

$$C_1' y_{11} + C_2' y_{21} + \cdots + C_n' y_{n1} = b_1$$

$$\vdots$$

$$C_1' y_{1n} + C_2' y_{2n} + \cdots + C_n' y_{nn} = b_n$$

الحل هي $C_1', \ldots, C_n'$

حتى يكون لها حل وحيد غير صفري يجب أن يكون المحدد ثابت غير معدوم وهو المحدد التالي (*)

نوجد C_i' من معادلة (11) ونوجد C_i ونجد الحل العام

مثال :

$$y' = -z + 1 \quad (1)$$

$$z' = y + \cos x \quad (2)$$

حل المعادلة :

(1) $y' = -z \Rightarrow z' = -y''$ (3)

(2) $z' = y$

نعوض (2) في (3)

$$\Rightarrow -y'' + y = 0$$

$$m^2 + 1 = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$\Rightarrow y_1' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

$$y(x) = C_1 \sin x - C_2 \cos x$$

ونبدأ :

$$y_p = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

$$y_p' = C_1(x) \sin x - C_2(x) \cos x$$

وبالاشتقاق والتعويض :

$$\Rightarrow C_1' \cos x + C_2' \sin x = 1$$

$$\Rightarrow C_1' \sin x - C_2' \cos x = \cos x$$

نحل الجملة :

$$y(x) = -C_2 \cos x + C_1 \sin x + \frac{x}{2} \cos x + 1$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z