كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

2 طريقة نيوتن - غريغوري التراجعية:

تعتمد هذه الطريقة على نوع جديد من الفروق بين قيم y_i المعطاة في الجدول المرفق بكل دالة والذي يحوي على نقاط الارتكاز وذلك للحصول على كثيرة حدود الاستيفاء $P_n(x)$ والتي تطابق الدالة $y=f(x)$ المعطاة بجدول قيم في نقاط الارتكاز فقط وتحقق الملاحظة الأساسية في الاستيفاء

حيث (x_i, y_i) نقاط ارتكاز و $P_n(x_i) = f(x_i) = y_i$

$$P_n(x_k) \cong f(x_k)$$

$$P_n(x_k) = f(x_k) \mp \varepsilon$$

حيث x_k لا تنتمي إلى نقاط الارتكاز.

تسمى هذه الفروق بالفروق التراجعية أو الخلفية وهي عدة أنواع:

A) الفروق التراجعية من المرتبة الأولى:

$$\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$$

$$\nabla y_{n-1} = y_{n-1} - y_{n-2}$$

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

B) الفروق التراجعية من المرتبة الثانية:

$$\nabla^2 y_n = \nabla y_n - \nabla y_{n-1} = y_n - y_{n-1} - y_{n-1} + y_{n-2}$$

$$\nabla^2 y_n = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}$$

$$\nabla^2 y_{n-1} = y_{n-1} - 2y_{n-2} + y_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$\nabla^2 y_i = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$$

$$\vdots$$

$$\nabla^2 y_2 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

ج) الفروق التراجعية من المرتبة الثالثة:

$$\nabla^3 y_n = \nabla^2 y_n - \nabla^2 y_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$\nabla^3 y_n = y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3}$$

$$\nabla^3 y_{n-1} = y_{n-1} - 3y_{n-2} + 3y_{n-3} - y_{n-4}$$

$$\vdots$$

$$\nabla^3 y_i = y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}$$

$$\vdots$$

$$\nabla^3 y_3 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

وهكذا ...

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	...	$\nabla^{n-1} y_i$
x_0	y_0				
x_1	y_1	∇y_1			
x_2	y_2	∇y_2	$\nabla^2 y_2$		
x_{n-4}	y_{n-4}				
x_{n-3}	y_{n-3}	∇y_{n-3}			
x_{n-2}	y_{n-2}	∇y_{n-2}	$\nabla^2 y_{n-2}$		
x_{n-1}	y_{n-1}	∇y_{n-1}	$\nabla^2 y_{n-1}$		
x_n	y_n	∇y_n	$\nabla^2 y_n$		$\nabla^{n-1} y_n$

مثال: أوجد جدول الفروق التراجعية للدالة المعطاة $y=f(x)$ بالجدول التالي:

x_i	2	4	6	8	10	12
y_i	23	93	295	569	1071	1813

الحل:

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$	$\nabla^5 y_i$
2	23					
		70				
4	93		132			
		202		-60		
6	295		72		216	
		274		156		-360
8	569		228		-144	
		502		12		
10	1071		240			
		742				
12	1813					

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: تطبق هذه الطريقة فقط في حال إثبات الفرق بين نقاط x_i ثابت أي:

$$(x_{i+1} - x_i = h \text{ (ثابت)} \quad \forall i = \overline{0,n})$$

كثيرة حدود نيوتن التراجعية:

$$P_n(x) = y_n + S\nabla y_n + \frac{S(S+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{S(S+1)(S+2)}{3!}\nabla^3 y_n$$

$$+ \cdots + \frac{S(S+1)(S+2)\cdots(S+(k-1))}{k!}\nabla^k y_n + \cdots$$

حيث: $h = x_{i+1} - x_i$; $S = \frac{x - x_n}{h}$

مثال: لتكن لدينا الدالة المعطاة بالجدول التالي:

x_i	2	4	6	8	10	12
y_i	23	93	295	569	1071	1813

والمطلوب:

① أوجد جدول الفروق التراجعية لهذه الدالة.

② أوجد كثيرة حدود نيوتن التراجعية $P_2(x)$

③ أوجد قيمة الدالة في النقطة $x_k = 11$ باستخدام $P_3(x)$

④ أوجد الخطأ المرتكب في هذا الحساب.

ملاحظة: يطلب عادة إيجاد كثيرة الحدود $P_k(x)$ حيث $K<n$ وبالتالي فإن الخطأ المرتكب يمثله قيمة الحد $k+1$ (الحد الذي يلي آخر حد تم استعادته في إيجاد كثيرة الحدود).

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

① يوجد في الشكل السابق

② $S = \frac{x - x_n}{h}$; $h = x_{i+1} - x_i = 4 - 2 = 2$

$S = \frac{x - 12}{2}$

$P_2(x) = 1813 + \left(\frac{x-12}{2}\right)(742) + \frac{(0.5x - 6)(0.5x - 5)}{2}(240)$

$= 1813 + 371x - 4452 + (0.25x^2 - 5.5x + 30)\,120$

$= -2639 + 371x + 30x^2 - 660x + 3600$

$= 30x^2 - 289x + 961$

③

$P_3(11) = 1813 + \left(\frac{(11-12)}{2}\right)742 + \left(\frac{(11-12)}{2}\left(\frac{11-12}{2} + 1\right)\right)\frac{240}{2} +$

$\frac{1}{3!}\left(\frac{(11-12)}{2}\left(\frac{11-12}{2} + 1\right)\left(\frac{(11-12)}{2} + 2\right)\right)12$

$P_3(11) = 1813 - 371 + (-0.5)(0.5)\,120 + (-0.5)(0.5)(1.5)\,2$

$= 1442 + (-30) + (-0.75)$

$= 1442 - 30.75$

$= 1411.25$

④

$\varepsilon_e \leq \frac{S(S+1)(S+2)(S+3)}{4!} \nabla^4 y_n$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\varepsilon_4 \leq \frac{(-0.5)(0.5)(1.5)(2.5)(-144)}{24}$$

$$\varepsilon_4 \leq \frac{+135}{34}$$

$$\varepsilon_4 \leq 5,625$$

3) طريقة لاغرانج:

في هذه الطريقة لا نشترط ان تكون الفروق بين النقاط x_i ثابتة

وتعتمد هذه الطريقة على كثيرات حدود جزئية تسمى حدوديات لاغرانج وهي عبارة عن جداءات بين فروق النقاط x_i معنونة على جداءات بين الفرق بين النقاط x_i.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\cdots(x_0-x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$\vdots$$

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

كثيرة حدود لاغرانج: تعطى صيغة كثيرة حدود لاغرانج بالصيغة التالية:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i$$

$$P_n(x) = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1 + \cdots + L_n(x)\, y_n$$

مثال: لتكن لدينا الدالة المعطاة في الجدول التالي ولنوجد مدوديات لاغرانج وكثيرة حدوده.

x_i	2	3	3
y_i	0.69315	0.91625	1,09561

الحل:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-2.5)(x-3)}{(2-2.5)(2-3)} = 2(x-2.5)(x-3)$$

$$L_0(x) = (2x-5)(x-3) = 2x^2 - 11x + 15$$

$$L_0(x) = 2x^2 - 11x + 15$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(0.5)(-0.5)}$$

$$L_1(x) = -4(x^2-5x+6) = -4x^2 + 20x - 24$$

$$= -4x^2 + 20x - 24$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(1)(0.5)}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$L_2(x) = 2(x-2)(x-2.5) = (x-2)(2x-5)$$

$$L_2(x) = 2x^2 - 9x + 10$$

$$P_2(x) = L_0(x)\,y_0 + L_1(x)\,y_1 + L_2(x)\,y_2$$

$$P_2(x) = (2x^2 - 11x + 15)\,0.69315 + (-4x^2 + 20x - 24)\,0.91625 + (2x^2 - 9x + 10)\,1.09561$$

$$\Rightarrow P_2(x) = -0.08748x^2 + 0.83986x - 0.63665$$

مثال: أوجد كثيرة حدود لاغرانج لدالة $y = \sin x$ المعطاة بالجدول التالي:

x_i	30	45	60
y_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

ثم أوجد قيمة تقريبية لـ $\sin(50)$ (وظيفة)

4 طريقة المربعات الصغرى:

طريقة المربعات الصغرى: يعطي قانون الاستناد لهذه الطريقة بالشكل:

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^{s} + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{s+1} + \cdots + a_m \sum_{i=0}^{n} x_i^{s+m} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{s}\, y_i$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظات:

1) يطلب عادةً إيجاد كثيرة الحدود $P_m(x)$ حيث: $m < n$

2) نفرض لهذه الحالة فقط أن $x_i^0 = 1$ وهما كانت قيمة x_i حتى لو كانت $x_i = 0$

3) $S = 0, 1, 2, \dots, m$ في كل مرة تعطي S قيمة نحصل على حالة من الحالات عددها $m+1$ ونأخذها بالحل المشترك

وكثيرة حدود هذه الطريقة تعطى بالعلاقة:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

مثال: لتكن لدينا الدالة المعطاة بالجدول التالي:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1100	1080	1040	960	840

المطلوب:

1) أوجد كثيرة الحدود $P_1(x)$ ثم أوجد كثيرة الحدود $P_2(x)$

2) أوجد قيمة تقريبية للدالة في النقطة $x = 1.5$.

(واجبة)

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة