كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة : **السادسة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الفصل الرابع :

الاستيفاء :

في هذا الفصل سندرس استيفاء الدوال بكثيرات الحدود وهذا يعني إيجاد كثيرة الحدود $p(x)$ التي تقرب عن الدالة $f(x)$ في الحالات التالية :

1- إيجاد قيمة كثيرة الحدود وقيمة مشتقاتها في نقطة ما x أو في عدة نقاط ..... x_3, x_2, x_1, x

2- إيجاد تكامل الدالة :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

والتي تمثل مساحة السطح المحصورة بين منحني الدالة $f(x)$ ومحور السينات وكل من المستقيمات $x=a$ و $x=b$ وذلك عندما تكون صيغة الدالة $f(x)$ غير معطاة

x_i	x_0	x_1	---	x_n
$f(x_i)$	y_0	y_1	---	y_n

$i=\overline{0,n}$ و (x_i, y_i) تسمى نقاط الاستيفاء (الارتكاز).

$$p_n(x_i) = f(x_i)$$

$$p_n(x_0) = f(x_0) = y_0$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

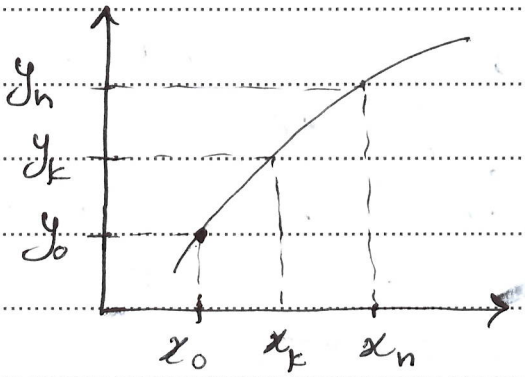
$$P_n(x_1) = f(x_1) = y_1$$
$$\vdots$$
$$P_n(x_n) = f(x_n) = y_n$$

$$x_k \neq x_i \quad \forall i = \overline{0,n}$$

يطلب إيجاد قيمة الدالة في نقطة x_k والتي تقع بين نقطتي ارتكاز أي: $x_k \neq x_i \quad \forall i = \overline{0,n}$

$$P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

$$P_n(x_k) \cong f(x_k) \cong y_k$$



$$\lim_{n} P_n(x_k) = f(x_k) \mp \varepsilon$$

طرائق الاستيفاء:

نذكر منها: 1- طريقة نيوتن - غريغوري التقدمية (الأمامية)

2- طريقة نيوتن - غريغوري التراجعية (الخلفية)

3- طريقة لاغرانج

4- طريقة المربعات الصغرى وهي الكثير من الطرق الأخرى.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

① طريقة نيوتن - غريغوري التقدمية :

تعتمد هذه الطريقة على نوع من فروق القيم y_i المعطاة في الجدول المرفق بكل دالة وتدعى هذه الفروق بالفروق الأمامية (التقدمية)

هي عدة أنواع :

أ- فروق أمامية من المرتبة الأولى وتعطى بالشكل :

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$

$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

وبشكل

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

ب- فروق أمامية من المرتبة الثانية وتعطى بالشكل :

$$\Delta y_0^2 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - (y_1 - y_0)$$
$$= y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta y_1^2 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

وبشكل :

$$\Delta y_i^2 = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$\Delta y_{n-2}^2 = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

د. الفروق الأساسية من الرتبة الثالثة : وتعطى بالشكل:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta y_1^2 - \Delta y_0^2 = y_3 - 2y_2 + y_1 - (y_2 - 2y_1 + y_0)$$
$$= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

$$\Delta y_1^3 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$$

وعامة:

$$\Delta y_i^3 = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_{n-3} = y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3}$$

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i \; \Delta^3 y_i$ ----	$\Delta^{n-1} y_i$
x_0	y_0			
x_1	y_1	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	
x_2	y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 =$	
x_3	y_3	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$		
⋮	⋮	⋮	⋮	$\Delta^{n-1} y_0$
x_{n-4}	y_{n-4}	$\Delta y_{n-4} = y_{n-3} - y_{n-4}$	$\Delta^2 y_{n-4}$	
x_{n-3}	y_{n-3}	$\Delta y_{n-3} =$	$\Delta^2 y_{n-3}$	
x_{n-2}	y_{n-2}	$\Delta y_{n-2} =$	$\Delta^2 y_{n-2}$	
x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-1}		
x_n	y_n			

تعطى كثيرة حدود نيوتن الأمامية بالصيغة التالية:

$$P_n(x) = y_0 + R\Delta y_0 + \frac{R(R-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{R(R-1)(R-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$+ \cdots + \frac{R(R-1)\cdots(R-k+1)}{k!}\Delta^k y_0 + \cdots$$

حيث:

$$R = \frac{(x-x_0)}{h} \; ; \; h = x_{i+1} - x_i$$

ملاحظات:

١- إذا كان عدد نقاط الارتكاز (x_i, y_i) هو $n+1$ فإن كثيرة حدود الاستيفاء $P_n(x)$

٢- تحقق كثيرة حدود الاستيفاء العلاقة الأساسية:

$P_n(x_i) = f(x_i)$ فقط في نقاط الارتكاز

$P_n(x_k) = f(x_k) + \varepsilon$ خارج نقاط الارتكاز حيث $x_k \neq x_i$

٣- لا يمكن تطبيق طريقة إذا فروق غير ثابتة (طريقة غريفوري)

وفي هذه الطريقة يجب تحقق العلاقة:

$x_{i+1} - x_i = h$ (ثابت)

٤- يطلب إيجاد كثيرة الحدود $P_k(x)$ حيث $k+1$

٥- الخطأ المرتكب هو القيمة المطلقة للحد ذو الترتيب $k+1$

أي:

$$\varepsilon \leq \frac{R(R-1)(R-2)\cdots(R-k)}{(k+1)!}\Delta^{k+1} y_0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال وظيفة: لتكن لدينا الدالة $y=f(x)$ المعطاة في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	4.2	3.1	6	12.9	23.8	37.8

المطلوب: ١- أوجد جدول الفروق الأمامية لهذه الدالة.
٢- أوجد كثيرة حدود الاستيفاء $P_2(x)$
٣- أوجد كثيرة الحدود $P_3(x)$ في النقطة $x_k=1.5$
٤- احسب الخطأ المرتكب في هذا الحساب.

مثال: لتكن لدينا الدالة $y=f(x)$ المعطاة في الجدول التالي:

x_i	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.3
y_i	1.3914	1.37696	1.34783	1.30456	1.24787	1.17862

المطلوب: ١- أوجد جدول الفروق الأمامية لهذه الدالة.
٢- أوجد كثيرة الحدود الاستيفاء $P_2(x)$
٣- أوجد قيمة كثير الحدود $P_3(x)$ في النقطة $x_k=1.255$
٤- احسب الخطأ المرتكب في هذا الحساب.

الحل:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
1.25	1.3914					
		-0.01444				
1.26	1.37696		-0.01469			
		-0.02913		0.00055		
1.27	1.34783		-0.01414		0.00017	
		-0.0432		0.00072		-0.00003
1.28	1.30456		-0.01342		0.00014	
		-0.05669		0.00086		
1.29	1.24787		-0.01256			
		-0.06925				
1.3	1.17862					

(1)

(2)

$$h = x_{i+1} - x_i = x_1 - x_0 = 1.26 - 1.25 = 0.01$$

$$R = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 1.25}{0.01} = 100x - 125$$

$$P_2(x) = y_0 + R\Delta y_0 + \frac{R(R-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 1.3914 + (100x - 125)(-0.01444) + \frac{(100x-125)(100x-126)}{2} \times (-0.01469)$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 1.3914 - 1.444x + 1.805 - 73.45x^2 + 184.3595x - 115.68375$$

$$P_3(x) = y_0 + R\Delta y_0 + \frac{R(R-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{R(R-1)(R-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$ (3)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$R = \frac{1.255 - 1.25}{0.01} = 0.5$$

وبعد تعويض في القانون

$$\Rightarrow P_3(1.255) = 1.38605$$

$$\varepsilon_4 \leq \frac{R(R-1)(R-2)(R-3)}{4!}\Delta^4 y_0 \quad (4)$$

$$\varepsilon_4 \leq \frac{(0.5)(-0.5)(-1.5)(-2.5)(0.00017)}{24}$$

$$\varepsilon_4 \leq -0.000000664$$

انتهت المحاضرة

مكتبة A to Z