كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة : **الخامسة**/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تمرين وظيفة: أوجد الجذر التقريبي للمعادلة:

$2\cos x + x - 1 = 0$

علماً أنّ: $x_0 = 0$ $\quad \varepsilon_a = 0,001$

- أوجد قيمة التابع $P_5(x)$ وتقاربها في النقطة $x = 3$

حيث: $P_5(x) = x^5 + 4x^3 - 3x^2 + 1$

الفصل الثالث

الحلول التقريبية لجملة المعادلات الخطية:

في كثير من الدراسات نحصل على حل من المعادلات الخطية تتألف من عدد كبير جداً من المعادلات وعندما يكون عدد المعادلات كبير جداً يستطيع إجراء الحل التحليلي لهذه الجملة لذلك نلجأ إلى طرائق عدة تعطي حلول تقريبية لهذه الجمل بعد تحديد قيمة الحل الابتدائي $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ تعطي دقة الحل ع (الخطأ المسموح به) أو الفرق بين الحل الدقيق والحل التحليلي).

- حلول حل المعادلات الخطية نوعان:

- النوع الأول:

الذي يمكن حله بالطرق التحليلية السابقة المدروسة سابقاً مثل كرامر، طريقة قلب مصفوفة، طريقة تحويلات أولية بسيطة، طريقة غاوس، طريقة التحليل إلى عوامل

وتسمى هذه الطرائق بالطرائق المباشرة لأنها تعطي حلاً دقيقاً وضبوطاً.

- النوع الثاني:

الطرائق التي تعطي حلول تقريبية ونذكر منها:

1- طريقة جاكوبي

2- طريقة غاوس سيدل

وسنتكلم هذه الطرائق بالطرائق الغير مباشرة.

الطرائق الغير مباشرة:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

ولإيجاد شعاع الحل المجهول لجملة المعادلات السابقة:

$$AX = B$$

حيث A مصفوفة الأمثال

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ شعاع الحل المجهول أو عمود المجاهيل ،

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ شعاع الثوابت

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بعد التجربة ★ نتأكد بأنّ عناصر القطر الرئيسي في مصفوفة الأمثال A تحقق الشرط $a_{ii} \neq 0$ وفي حال كان أحد العناصر معدوم نقاوم ترتيب المعادلات في الجملة ★ بحيث نحصل على الشرط $a_{ii} \neq 0$

الخطوة الثانية:

نحل المجاهيل x_i من المعادلات رقم (i) بالشكل الآتي:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \cdots - \frac{a_{n(n-1)}}{a_{nn}} x_{n-1}$$

يمكن كتابة الجمل الناتجة: $X = \beta + \alpha X$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن العلاقة خطية ، كلها الرياضي ولكنها غير خطية إذا لا يمكن أن يكون ناتج ضرب أحد عناصر معادلة لذلك سنكتبها ★★ بشكل تدريجي بالعلاقة:

$$X^{(k+1)} = \beta + \alpha X^{(k)}$$

نفرض حلاً ابتدائياً للجملة المطلوب مثل: $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ونبدأ بها في الطرف الثاني من علاقة ** ونحصل على الخطوة الأولى باتجاه الحل وتكتب:

$$X^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$$

2- طريقة جاكوبي:

في طريقة جاكوبي نعوض في جملة المعادلات ** من الحل الابتدائي المعطى $X^{(0)}$ في الطرف الثاني من **

ونحصل على الخطوة الأولى $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$

نعوض مركبات $X^{(1)}$ في الطرف الثاني من ** نحصل على الخطوة الثانية $X^{(2)} = (x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$

وهكذا حتى نحصل على $X^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})$

من ذلك نحصل على متتالية عددية نقول بأنها تتقارب باتجاه الحل المنشود.

إذا تقاربت المتتالية $\lim_{n \to \infty} X^{(n)} = \alpha$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ← الحل المنشود

* شرط التوقف:

$$\| X^{(n)} - X^{(n-1)} \| < \varepsilon$$

$$| x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)} | < \varepsilon \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

1- نظيم شعاع:

$X = (x_1, \dots, x_n)$ فإن النظيم يعطى بالعلاقة:

$$\| X \| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2- نظيم مصفوفة:

يوجد ثلاثة نظم للمصفوفة:

1- نظيم الأسطر I ويعطى بالشكل:

$$\|A\|_I = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

2- نظيم الأعمدة II ويعطى بالشكل:

$$\|A\|_{II} = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

3- النظيم الإقليدي III ويعطى بالشكل:

$$\|A\|_{III} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

* ملاحظة: يختلف النظيم باختلاف الطريقة المتبعة.

- النظام المركب من طريقة جاكوبي:

يعطى النظام المركب بعد إجراء k خطوة باتجاه الحل بالعلاقة:

$$\varepsilon \le \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|}\,\|B\|$$

شرط أن يكون $\|\alpha\| < 1$ شرط ومن هنا حل المعادلة.

مثال: لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$3x_2 + 2x_1 - x_3 = 4$$

$$5x_3 + x_2 + x_1 = -4$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المطلوب: 1- اثبت وجود حل لهذه الجملة أي $(\|\alpha\|<1)$

2- أوجد الحل التقريبي: $k=2$; $X^{(0)}$

• إذا علمت $(X^{(0)}=B)$

3- أوجد الخطأ المرتكب.

الحل:

$$a_{ii} \neq 0 \quad \forall i=\overline{1,3}$$

$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3$$

$$x_2 = 1 - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3$$

$$x_3 = \frac{-4}{5} - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ \frac{-4}{5} \end{bmatrix} \quad , \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|\alpha\| = \max\{0.5, 1, 0.4\} = 1$$

عندما ننتقل إلى الشرط:

$|a_{ii}| > a_{ij}$ بما أن النظيم يساوي 1 نعوضه في الشرط

$\forall i,j=\overline{1,n} \;\&\; i \neq j$

إذا الجملة حل أي أن عناصر القطر الرئيسي هو الأكبر ضمنه نعوضها

2- $X^{(0)} = B^T = \left(\frac{3}{4}, 1, \frac{-4}{5}\right)$

نعوضه في **

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$x_1^{(1)} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \left(\frac{-1}{4}\right)\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$x_2^{(1)} = 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{-4}{3}\right) = 0.233$$

$$x_3^{(1)} = \frac{-4}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{5} = -1.15$$

$$x_1^{(2)} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(0.23333) + \left(\frac{-1}{4}\right)(-1.15) = 1.09583$$

$$x_2^{(2)} = 1 - \frac{2}{3}(1.2) + \frac{1}{3}(-1.15) = -0.18333$$

$$x_3^{(2)} = \frac{-4}{5} - \frac{1}{5}(1.2) - \frac{1}{5}(0.2333) = -1.08666$$

$$X^{(2)} = (1.09583, -0.18333, -1.08666)$$

$$\varepsilon \leq \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|}\|\beta\| \qquad -3$$

$$\varepsilon \leq \frac{(1)^{2+1}}{1-1}(1.48408)$$

$\|\alpha\| = 1$ ونجد حساب اوظا المرتبة هي

على الترتيب:

$$\|\beta\| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + (1)^2 + \left(\frac{-4}{5}\right)^2} = 1.48408$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

طريقة غاوس - سيدل:

1- وفي هذه الطريقة أيضاً نتأكد أن $a_{ii} \neq 0$

نحسب المجاهيل x_i من المعادلة رقم i

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \cdots - \frac{a_{n(n-1)}}{a_{nn}} x_{n-1}$$

$$X^{(k+1)} = B + \alpha X^{k} \quad (**)$$

شرط وجود الحل هو أن يكون $\|\alpha\| < 1$ إذا

سهل أن $\|\alpha\| = 1$ يجب أن يراعى أن عناصر

القطر الرئيسي هي الأكبر تماماً في صفوفها.

أي: $|a_{ii}| > a_{ij}$ $\forall i = \overline{1,n}$ و $i \neq j$

2- الحل الابتدائي:

$$X^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$$

نعوض الحل الابتدائي في الطرف الثاني من (**)

في المعادلة (1) نحصل على $x_1^{(1)}$ نعوضه في المعادلة

(2) عن $x_1^{(1)}$ وما تبقى من الحل الابتدائي فنحصل على

$x_2^{(1)}$ وهكذا حتى نحصل على $x_n^{(1)}$ فنكون بذلك

$X_n^{(1)}$ فقط، والخطأ المرتكب يعطى بالعلاقة:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\varepsilon \le \frac{\|\alpha\|^k}{1-\|\alpha\|}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$$

$$\|x^{(1)}-x^{(0)}\| = \sqrt{(x_1^{(1)}-x_1^{(0)})^2+\dots+(x_n^{(1)}-x_n^{(0)})^2}$$

مثال: لتكن لدينا جملة المعادلات التالية:

$$4x_1 - x_2 - x_3 = -3$$
$$-x_1 + 4x_2 - x_3 = 2$$
$$-x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$$

المطلوب: 1- ادرس وجود حل لهذه الجملة.

2- أوجد الحذر $X^{(2)}$ إذا علمت أن $X^0 = \beta$

3- أوجد الخطأ المرتكب في حساب هذا الحذر.

4- إذا علمت أن $\varepsilon = 5\times10^{-5}$ احسب k الأدنى.

الحل:

1- $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1,2,3$

$$x_1 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3$$

$$x_2 = \frac{2}{4} + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3$$

$$x_3 = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2$$

$$\beta = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 2/4 \\ 7/4 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\|\alpha\| = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} < 1$

⇒ يوجد حل للمعادلة،

$X^{(0)} = \beta^T = (-3/4, 1/2, 7/4)$

$x_1^{(1)} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{7}{4}\right) = -\frac{3}{16} = -0.187$ (2)

$x_2^{(1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{-3}{16}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{7}{4}\right) = 0.89062$

$x_3^{(1)} = \frac{-3}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{-3}{16}\right) + \frac{1}{4}(0,89062) = 1,92578$

$\Rightarrow X^{(1)} = (-0,187, 0,89062, 1,92578)$

$x_1^{(2)} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}(0,89062) + \frac{1}{4}(1,92578) = -0,0459$

$x_2^{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(-0,0459) + \frac{1}{4}(1,92578) = 0,96997$

$x_3^{(2)} = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}(0,0459) + \frac{1}{4}(0,96997) = 1,98017$

$X^{(2)} = \{-0,0459, 0,96997, 1,98017\}$

$$\varepsilon \le \frac{\|\alpha\|^k}{1 - \|\alpha\|} \|X^{(1)} - X^{(0)}\| \quad (3)$$

$k = 2, \quad \|\alpha\| = \frac{1}{2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\|X^{(1)} - X^{(0)}\| = \sqrt{\left(\frac{-3}{4} + 0.187\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0.89062\right)^2 + \left(\frac{7}{4} - 1.92578\right)^2}$$

$$= 0.707021$$

$$\varepsilon \leq \frac{(0.5)^2}{\frac{1}{2}} (0.707021)$$

$$\varepsilon \leq 0.35351$$

نجد k بحيث $\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$

$$\varepsilon \leq \frac{\|\alpha\|^k}{1 - \|\alpha\|} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|$$

$$\Rightarrow 5 \times 10^{-5} \leq \frac{(0.5)^k}{(0.5)} (0.707021)$$

$$\frac{0.5}{0.707021} \times 5 \times 10^{-5} \leq (0.5)^k$$

$$0.0003 \leq (0.5)^k$$

$$\ln(0.0003) \leq k \ln(0.5)$$

$$k \geq \frac{\ln(0.0003)}{\ln(0.5)}$$

$$k \geq 15.02467$$

انتهى الحل

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة