كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تكملة المثال:

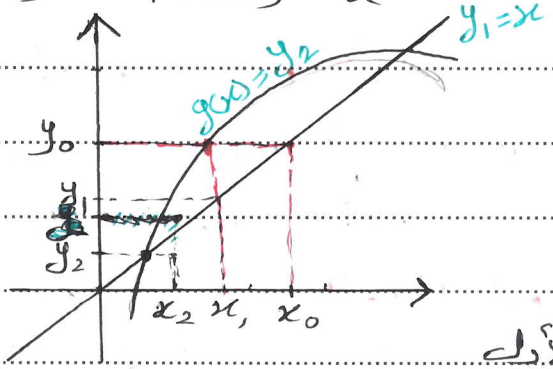
$$x_3 = \frac{4x_2^5 + 777}{5x_2^4} = 3.785516$$

$$x_4 = \frac{4x_3^5 + 777}{5x_2^4} = 3.785159$$

نقف هنا / وجهة الجذر عند أول 3 منازل عشرية /

(3) طريقة التقريبات المتتالية:

$f(x) = 0$ ، $[a,b]$ ، ε



نرسم منصف الربع الأول والثالث

لدينا $f(x) = 0$ نجزئها إلى معادلتين:

معادلة ①: $x = y_1$ $\Rightarrow$

معادلة ②: ما تبقى هو $g(x) = y_2$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

مثال: $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1 = 0$

$$x = -x^3 + x^2 - 1$$

$$x = y_1$$

$$-x^3 + x^2 - 1 = y_2 = g(x)$$

* وبطريقة أخرى:

$$x^2 = x^3 + x + 1 \Rightarrow x = \sqrt{x^3 + x + 1}$$

$$\Rightarrow \quad x = y_1$$

$$\sqrt{x^3 + x + 1} = y_2 = g(x)$$

* أو نأخذ x^3

$$x = \sqrt[3]{x^2 - x - 1}$$

$$\Rightarrow \quad x = y_1$$

$$\sqrt[3]{x^2 - x - 1} = y_2 = g(x)$$

نأخذ أي نقطة x_n من $[a,b]$ ونعوض في $x_{n+1} = g(x_n)$ لنصل إلى $\alpha = g(\alpha)$ ويسمى هذا المعادلة (أو هي نقطة الجذر.

وفي هذه الطريقة نجزأ المعادلة المعطاة $f(x) = 0$ إلى معادلتين الأولى $x = y_1$ وتمثل منحنى الربع الأول والثاني، وكلما تقترب المعادلة الثانية $g(x) = y_2$ بمعدل x هو

نرسم المنحنيين لهاتين المعادلتين البيانيين ونأخذ نقطة x_0 من $[a,b]$ الذي يحوي الجذر المطلوب فذلك حظ أن التعويض في المعادلة $g(x)$ سيقلنا إلى

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

~~$x_0 \dots x_n$~~

نقطة جديدة عن المستقيم $y=x$ وتعويض هذه النقطة مرة ثانية في $g(x)$ تنقلنا إلى نقطة جديدة وهكذا.

نلاحظ أن: كل تعويض ينقلنا إلى نقطة جديدة x_n هي الأقرب إلى الجذر المطلوب ويصبح لدينا متتالية حدية من $x_0 \to x_n$

وإلى أن نصل إلى النقطة α من $[a,b]$ والتي تحقق العلاقة $\alpha = g(\alpha)$

أو بشكل عام: $\lim_{n\to\infty} X_n = \alpha$

★ إذا حققت العلاقة $\alpha = g(\alpha)$ هذا يعني أنّ α هو الجذر المضبوط للمعادلة $f(x)=0$

في الحالة العامة:

نوجد نهاية المتتالية عندما $n \to \infty$ ونحصل على الجذر المضبوط.

---

① شرط قبول الدالة $g(x)$ بعد الحل.

② شرط التوقف ثمّ إيجاد الجذور.

$\forall x \in [a,b] \Rightarrow g(x) \in [a,b]$ (1) (1')

$\forall x \in]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[\Rightarrow |g'(x)| < 1$ (2")

هذا كلام نظري أما الحل:

$x_0 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow |g'(x_0)| < 1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$|f(x_{n+1})| < \varepsilon$ (1) (2)

$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ (2")

* نذكر شرط التوقف أمر هام *

مثال: أوجد الجذر التقريبي للمعادلة:

$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$

الحل: * نوجد المجال $[a,b]$:

x	f(x)
0	−
1	−
2	+

$\Leftarrow [a,b] = [1,2]$

$\varepsilon = 0,005$

* لنفرك x أو نوجد $g(x)$

$x^3 - x - 1 = 0$

$x = x^3 - 1 = g_1(x)$

$x^3 = x + 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{x+1} = g_2(x)$

نختار x_0:

$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$

$g_1(x_0) = 2.375 \notin [a,b]$ ① شرط

$g_1'(x) = 3x^2 \Rightarrow g_1'(1.5) = 3(1.5)^2 = |6.75| > 1$ ② شرط

$\Leftarrow$ أي أن الخيار غير موفق

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$g_2(x_0) = 1.357208 \in [a,b]$ ① شرط

$g_2'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \Rightarrow g'(x_0) = |0.18| < 1$ ② شرط

⇐ أي أن الجذر موقف

$\Rightarrow x = y_1$

$\Rightarrow y_2 = \sqrt[3]{x+1} = g(x)$

$\Rightarrow x_{n+1} = g_2(x_n)$

$x_1 = g_2(x_0) = 1.357208$

$x_2 = g_2(x_1) = 1.33086$

$x_3 = g_2(x_2) = 1.32588$

$x_4 = g_2(x_3) = 1.32493$

شرط التوقف:

الأول: $|x_4 - x_3| = |1.32493 - 1.32588| < \varepsilon$

$\Rightarrow 0.00009 < \varepsilon$ موقف

الثاني:

$|f(1.32493)| = |0.0009| < \varepsilon$ موقف

⇐ الحل توقف والجذر هو $x_4 = 1.32493$

مثال هام:

$f(x) = e^x - x^2 = 0$

$[-1, 0]$

$\varepsilon = 0.005$

جذور كثيرات الحدود:

$P_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ؛

$a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$

$n, n-1, \dots \in \mathbb{N}$

$P_n(x) = 0$ تملك n جذراً حقيقياً على الأكثر

★ نظرية ديكارت ⊗:

① عدد الجذور الحقيقية الموجبة لكثيرة حدود يساوي عدد التغيرات في الإشارة لمتتالية الأمثال أو تنقص عنه بعدد زوجي

$a_n, \dots, a_1, a_0$

مثال: $P_5(x) = x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$

متتالية أمثال: $1, -1, 1, 1, 1, -1$ ⇒

(1) (2) (3)

⇐ عدد الجذور الحقيقية الموجبة (3) أو (1)

② عدد الجذور الحقيقية لمعدد سالب يساوي عدد التغيرات في الإشارة لمتتالية أمثال أو ينقص عنه بعدد زوجي

$P_n(-x)$

مثال: $P_5(x) = x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$

$\Rightarrow P_5(-x) = -x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$

متتالية الأمثال $-1, -1, -1, 1, -1, -1$ ⇒

(1) (2)

⇐ عدد الجذور الحقيقية السالبة (2) أو (0) صفر

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نظرية بودان - فوريه :

عدد الجذور الحقيقية لكثيرة الحدود $P_n(x)$ الموجودة في مجال ما $[a,b]$ يساوي حاصل طرح عدد التغيرات في الإشارة لمتتالية المشتقات :

$$P^0(x), P'(x), \dots, P^n(x)$$

في النقطة a ولتكن V_a من عدد التغيرات في الإشارة لهذه المتتالية في b ولتكن V_b

~~أو تنقص عنه~~ عدد جذور حقيقية $\geq |V_b - V_a|$

أو تنقص عنه بعدد زوجي.

مثال : $P_5(x) = x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$

أوجد عدد الجذور الحقيقية لكثيرة الحدود $P_5(x)$ ضمن المجال $[-2, 2]$

الحل :

$$P^0(x) = P(x)$$
$$P'(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$
$$P''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x + 2$$
$$P'''(x) = 60x^2 - 24x + 6$$
$$P^{(4)}(x) = 120x - 24$$
$$P^{(5)}(x) = 120$$

$P^0(-2) = -55$	$P^0(2) = 29$
$P'(-2) = 121$	$P'(2) = 65$
$P''(-2) = -218$	$P''(2) = 126$
$P'''(-2) = -186$	$P'''(2) = 198$
$P^{(4)}(-2) = -364$	$P^{(4)}(2) = 216$
$P^{(5)}(-2) = 120$	$P^{(5)}(2) = 120$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow V_a = 3 \quad \{ \quad V_b = 0$

$\Rightarrow |V_b - V_a| = |-3| = 3$

عدد الجذور الحقيقية ③ أو ①

طريقة هورنر: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

لإيجاد صيمتها وصيمة جميع مشتقاتها في نقطة $x=b$

تتبع الخطوات:

① نرتب الأعداد ترتيباً تصاعدياً من a_n وحتى a_0 ونضع (0) مكان الأعداد المحذوفة.

② نترك سطراً فارغاً ونضع هذا:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
$x=b$		$+c_n \cdot b$	$+c_{n-1} \cdot b$		$+c_2 \cdot b$	$+c_1 \cdot b$
	$c_n = a_n$	c_{n-1}	c_{n-2}	...	c_2	c_1 | $c_0 \to P_n(b)$

$x=b$	$S_n \cdot b$	$S_{n-1} \cdot b$	...	$S_2 \cdot b$	
$S_n = c_n = a_n$	S_{n-1}	S_{n-2}	...	S_1	$\frac{P'(b)}{1!} = P'(b)$ $P'(b) = S_1$

$x=b$	$T_n \cdot b$	$T_{n-1} \cdot b$	...	$T_2 \cdot b$	
T_n	T_{n-1}	T_{n-2}	...	T_2	$\frac{P''(b)}{2!} = T_2$ $P''(b) = T_2 \cdot 2!$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x-b$ $\quad k_n \cdot b \quad k_4 \cdot b$

$k_n \quad k_{n-1} \quad | \quad k_3$

$\frac{p'''(b)}{3!} = k_3 \Rightarrow k_3 \cdot 3! = p'''(b)$

مثال

$p(x) = x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$

أوجد قيمة كثيرة الحدود وجميع مشتقاته عند $x = -2$

الحل:

$x = -2$ $\quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1$

$+1x-2 \quad -3x-2 \quad +7x-2 \quad -13x-2 \quad +27x-2$

$1 \quad -3 \quad 7 \quad -13 \quad 27 \quad | \quad -55$

$p_5(-2) = -55$

$x = -2$ $\quad 1 \quad -3 \quad 7 \quad -13 \quad 27 \quad -55$

$+(-2) \quad +(-5x-2) \quad +(17x-2) \quad +(-47x-2)$

$1 \quad -5 \quad 17 \quad -47 \quad 121 = p'(-2)$

$x = -2$ $\quad 1 \quad -5 \quad 17 \quad -47$

$+(-2x1) \quad +(-7x-2) \quad +(31x-2)$

$1 \quad -7 \quad 31 \quad -109$

$\Rightarrow p''(-2) = -109 \times 2! = -218$

$x = -2$ $\quad 1 \quad -7 \quad 31$

$+(1x-2) \quad +(-9x-2)$

$1 \quad -9 \quad 49$

$\Rightarrow p'''(-2) = 49 \times 3! = 294$

$x = -2$ $\quad 1 \quad -9$

$+(1x-2)$

$1 \quad -11$

$\Rightarrow p^{(4)}(-2) = -11 \times 4! = -264$

$x = -2$ $\quad 1$

$1 \Rightarrow p^{(5)} = 5! = 120$

خطوات طريقة هورنر :

(1) نرتب الأمثال من $a_n \leftarrow a_{n-1} \leftarrow \dots \leftarrow a_1 \leftarrow a_0$ ونضع أصفار مكان الأمثال المفقودة.

(2) نترك سطراً فارغاً ونضع $x=b$ عند

(3) ننزل a_n كما هي ونسميها c_n ومن ثم نضرب c_n بـ $x=b$ ونجمعها مع a_{n-1} نحصل على c_{n-1} ومن ثم نضرب c_{n-1} بـ $x=b$ ونجمعها مع a_{n-2} ونحصل على c_{n-2} وهكذا، حتى نصل إلى c_2 ونضربها بـ $x=b$ نجمعها مع a_1 نحصل على c_1 ومن ثم نضرب c_1 بـ $x=b$ ونجمعها مع a_0 نحصل على c_0 وتكون $c_0 = P_n(b)$

(4) نعيد العملية نفسها ونسمية c_n إلى S_n ونصل إلى S_2 نضربها بـ $x=b$ نجمعها مع c_1 ونحصل على S_1 وتكون $S_1 = \frac{P'(b)}{1!} \Rightarrow P'(b) = S_1 \cdot 1!$

(5) نعيد العملية نفسها ونبدل تسمية S_n بـ T_n حتى نصل إلى T_4 نضربها بـ $x=b$ ونجمعها مع S_3 نحصل على T_3 نضربها بـ $x=b$ نجمعها مع S_2 ونحصل على T_2 وتكون :

$$T_2 = \frac{P''(b)}{2!} \Rightarrow P''(b) = T_2 \cdot 2!$$

(6) نعيد العملية ذاتها ونبدل تسمية T_n بـ K_n حتى نصل إلى K_4 نضربها بـ $x=b$ ونجمعها مع T_3 نحصل على K_3 وتكون :

$$T_3 = \frac{P'''(b)}{3!} \Rightarrow P'''(b) = T_3 \cdot 3!$$

وتعمل هكذا

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z