كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية٢

المحاضرة :السادسة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

السؤال الأول: لتكن B_1, B_2 مثاليتان من حلقة ما $(A,+,\cdot)$ بين أن $B_1 \cdot B_2$ مثالية من الحلقة $(A,+,\cdot)$.

الحل:

أ) نضع أن $B_1 \cdot B_2 \subseteq A$ و $B_1 \cdot B_2 \neq \phi$ لأن $0 \in B_1 \cdot B_2$

ب)

$$\forall x, x' \in B_1 \cdot B_2 \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \quad ; \quad x_i \in B_1 \ \& \ y_i \in B_2$$

$$\& \ x' = \sum_{j=1}^{m} x'_j \cdot y'_j \quad ; \quad x'_j \in B_1 \ \& \ y'_j \in B_2 \ \& \ n,m \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow x - x' = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \sum_{j=1}^{m} x'_j \cdot y'_j = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{j=1}^{m} (-x'_j) y'_j$$

$$x - x' = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{j=1}^{m} (-x'_j) y'_j \in B_1 \cdot B_2$$

مجموع مستوعبات حاصل ضربين الأول من B_1 والثاني من B_2

ج)

$$\forall a \in A, x \in B_1 \cdot B_2 \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \quad ; \quad x_i \in B_1 \ \& \ y_i \in B_2 \ \& \ n \in \mathbb{Z}^+$$

$$ax = a\sum_{i=1}^{n} x_i . y_i = \sum_{i=1}^{n} (ax_i) y_i \in B_1 . B_2$$

$$x.a = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) a = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i . a) \in B_1 . B_2$$

بقي أن نبرهن أن $B_1 . B_2$ مثالية في الحلقة $(A, +, .)$

السؤال الثاني:

لتكن B مثالية في حلقة تبديلية $(A, +, .)$ بين أن $\sqrt{B}$ هو مثالية في الحلقة $(A, +, .)$ حيث B

الحل:

آ) واضح أن $\sqrt{B} \subseteq A$ و $\sqrt{B} \neq \phi$ لأن $0 \in \sqrt{B}$

ب) $\forall x_1, x_2 \in \sqrt{B} \Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{Z}^+ ; x_1^n \in B$ & $x_2^m \in B$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} x_1^{n+m-i} (-x_2)^i$$

if $i \geq m \Rightarrow (-x_2)^i = (-x_2)^m (-x_2)^{i-m} \in B$

علماً أنه إذا كانت m عدد زوجي فإن:

$(-x_2)^m = x_2^m \in B$ و $(-x_2)^{i-m} \in A$ و B مثالية

$\Leftarrow (-x_2)^m (-x_2)^{i-m} \in B$

وإذا كانت m عدد فردي فإن: $(-x_2)^m = -x_2^m \in B$

بالتالي $(-x_2)^m (-x_2)^{i-m} \in B$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow x_1^{n+m-i}(-x_2)^i \in B$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)^{n+m} \in B$

if $m > i \Rightarrow (x_1)^{n+m-i} = \underset{\in B}{x_1^n} \cdot \underset{\in A}{x_1^{m-i}} \in B$

لأن B مثالية ⟸

$(x_1)^{n+m-i}(-x_2)^i \in B$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)^{n+m} \in B$

وفي كلا الحالتين نجد أنّ:

$(x_1 - x_2)^{n+m} \in B \Rightarrow x_1 - x_2 \in \sqrt{B}$

ج- إذا كان y عنصر من $\sqrt{B}$ و a عنصر من A فإنّه:

$\exists n \in \mathbb{Z}^+ ; y^n \in B \Rightarrow a^n \cdot y^n \in B$

$(a \cdot y)^n \in B \Rightarrow a \cdot y \in \sqrt{B}$

وبما أنّ A تبديلية ⟸ $y \cdot a \in \sqrt{B}$

د- $\forall y \in B \Rightarrow y^1 \in B \Rightarrow y \in \sqrt{B} \Rightarrow B \subseteq \sqrt{B}$

بما أنّ أ- ب- ج- د نجد أنّ $\sqrt{B}$ مثالية بما أنّ الحلقة التبديلية $(A, +, \cdot)$ حيث B.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

السؤال الثالث:

لتكن $B, A_1, A_2, \dots, A_n$ مثاليات من حلقة ما تبديلية $(\cdot, +, A)$ بين أنّ:

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) : B = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B)$$

الحل

$$\forall x \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) : B \Rightarrow x.B \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i \quad (1)$$

$$\Rightarrow x.B \subseteq A_i \quad \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow x \in A_i : B \quad \forall i = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B) \Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) : B \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B)$$

$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B) \Rightarrow x \in A_i : B \quad \forall i = \overline{1,n} \quad (2)$$

$$\Rightarrow x.B \subseteq A_i \quad \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow x.B \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$x \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) : B \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B) \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) : B$$

من (1), (2) نجد أنّ:

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) : B = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

السؤال الرابع:

لتكن B_1, B_2, B_3 مثاليات من حلقة ما تبديلية $(A, +, .)$

بين أنّ:

$$B_1 : (B_2 . B_3) = (B_1 : B_2) : B_3$$

الحل

$\forall x \in B_1 : (B_2 . B_3) \Rightarrow x . (B_2 . B_3) \subset B_1$ ①

$(x . B_3) . B_2 \subset B_1 \Rightarrow x . B_3 \subset B_1 : B_2$

$\Rightarrow x \in (B_1 : B_2) : B_3 \Rightarrow B_1 : (B_2 . B_3) \subset (B_1 : B_2) : B_3$

$\forall x \in (B_1 : B_2) : B_3 \Rightarrow x . B_3 \subset B_1 : B_2$ ②

$(x . B_3) B_2 \subset B_1 \Rightarrow x (B_2 . B_3) \subset B_1$

$\Rightarrow x \in B_1 : (B_2 . B_3) \Rightarrow (B_1 : B_2) : B_3 \subset B_1 : (B_2 . B_3)$

من ①، ② نجد أنّ:

$$B_1 : (B_2 . B_3) = (B_1 : B_2) : B_3$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة