كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية٢

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الحقول

تعريف: كل حلقة $(K, +, \cdot)$ تسمّى حقلاً إذا تحققت الشروط الآتية:

1- يوجد في K عنصرين على الأقل.

2- يوجد في K عنصر حيادي بالنسبة العملية $(\cdot)$

3- لكل عنصر يختلف عن الصفر في K مقلوب في K بالنسبة العملية $(\cdot)$

بكلمة ثانية: كل حلقة $(K, +, \cdot)$ تسمّى حقلاً إذا كانت $(K - \{0\}, \cdot)$ زمرة.

* كل حقل $(K, +, \cdot)$ يسمى حقلاً تبديلياً إذا كانت العملية $(\cdot)$ تبديلية على عناصر K.

مثال:

إن الأعداد $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{C}$ هي حقول تبديلية بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديتين.

نتائج:

1) كل حقل تبديلي هو منطقة تكاملية

2) تكون المنطقة التكاملية حقلاً تبديلياً إذا كان كل عنصر مختلف عن الصفر فيها قابل للقلب.

3) كل منطقة تكاملية منتهية هي حقل تبديلي.

البرهان:

البرهان على أن المنطقة التكاملية المنتهية R حقل يكفي أن نبرهن أن لكل عنصر مختلف عن الصفر فيها مقلوب فيها.

إذا كان n عدد عناصر R فإن R تكتب بالشكل:

$$R=\{x_1, x_2, \dots, x_n ; x_i \neq x_j \ \forall \ 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

من أجل كل عنصر r من R ماعدا الصفر فإن المجموعة

$$rR=\{rx_1, rx_2, \dots, rx_n\}$$

التي عدد عناصرها n تحقق $rx_i \neq rx_j$ لكل $i \neq j$ أي أن عناصرها مختلفة مثنى مثنى لأنه إذا فرضنا وجود $i \neq j$ بحيث $rx_i = rx_j$ فإن $r(x_i) - r(x_j) = 0$

$$r(x_i - x_j) = 0$$

وبما أن R منطقة تكاملية و $r \neq 0$ فإن $x_i - x_j = 0$

$\Leftarrow x_i = x_j$ وهذا يناقض بوجود كل عناصر R،

وبالتالي rR هي نفس المنطقة R والتي أحد عناصرها عنصر الوحدة 1 وبالتالي يوجد دليل k بحيث أن:

$1 \leq k \leq n$ و $rx_k = 1$ ومنه فإن r قابل للقلب، إذاً جميع العناصر غير الصفرية من R قابلة للقلب، وبالتالي $(R, +, \cdot)$ حقل تبديلي.

تمرين:

ليكن $(K, +, \cdot)$ حقلاً، ولتكن P مجموعة جزئية غير خالية من K إذا كان P حقلاً بالنسبة لقانوني العملية $(+)$ و $(\cdot)$ على P، فإن نقول عن $(P, +, \cdot)$ إنها حقل جزئي من الحقل $(K, +, \cdot)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة:

لتكن $(K,+,\cdot)$ حقلاً، ولتكن P مجموعة جزئية تحوي عنصرين على الأقل من K. إنّ الشرط اللازم والكافي لكي يكون $(P,+,\cdot)$ حقلاً جزئياً من الحقل $(K,+,\cdot)$ هو أن يتحقق الشرطان الآتيان:

1) $x-y\in P \quad \forall x,y\in P$

2) $x.y^{-1}\in P \quad \forall x,y\in P \ \& \ y\neq 0$

مبرهنة:

ليكن $(K,+,\cdot)$ حقلاً، إذا كانت $\{(P_i,+,\cdot)\}_{i\in I}$ أسرة من الحقول الجزئية غير الخالية من الحقل $(K,+,\cdot)$ فإنّ تقاطع $(\bigcap_{i\in I} P_i,+,\cdot)$ حقل جزئي من الحقل $(K,+,\cdot)$

البرهان:

آ) واضح أن $\bigcap_{i\in I} P_i \subset K$ وبما أن $\{(P_i,+,\cdot)\}_{i\in I}$ أسرة حقول جزئية من الحقل $(K,+,\cdot)$ فإنّ:

$$0,1\in P_i \ \forall i\in I \Rightarrow 0,1\in \bigcap_{i\in I} P_i$$

وهذا يعني أن $\bigcap_{i\in I} P_i$ يحوي عنصرين على الأقل.

ب)

$$\forall x,y\in \bigcap_{i\in I} P_i \Rightarrow x,y\in P_i \ \forall i\in I$$

وبما أنّ $\{(P_i,+,\cdot)\}_{i\in I}$ أسرة من الحقول الجزئية من $(K,+,\cdot)$

$$\Leftarrow x-y\in P_i \ \forall i\in I \Rightarrow x-y\in \bigcap_{i\in I} P_i$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall x,y \in \bigcap_{i\in I} f_i$ & $y\neq 0 \Rightarrow x,y\in f_i \quad \forall i\in I$ & $y\neq 0$

$\Rightarrow x.y^{-1}\in f_i \quad \forall i\in I$ & $y\neq 0$

$\Rightarrow x.y^{-1}\in \bigcap_{i\in I} f_i$ & $y\neq 0$

مبرهنة: $(\bigcap_{i\in I} f_i, +, .)$ حقل جزئي من الحقل $(K,+,.)$

برهان:

لتكن $(K,+,.)$ حقلاً تبديلياً، ولنرمز لصفره بـ 0 ولتكن f مجموعة جزئية غير خالية من K، إذا كانت $(f,+,.)$ منطقة تكاملية وإذا كانت:

$$f' = \{a.b^{-1} \mid a,b\in f \ \& \ b\neq 0\}$$

فإن $(f',+,.)$ حقل جزئي من الحقل $(K,+,.)$ يحوي f وهو أصغر حقل جزئي من الحقل $(K,+,.)$ يحوي f.

البرهان:

أ- واضح أن $f'\subset K$ و f' تحوي عنصرين على الأقل لأن:

$$0.1\in f \ \& \ 0.1^{-1}=0\in f' \ \& \ 1.1^{-1}=1\in f'$$

$$\forall x,y\in f' = \begin{cases} x=a.b^{-1}; & a,b\in f \ \& \ b\neq 0 \\ y=a_1.b_1^{-1}; & a_1,b_1\in f \ \& \ b_1\neq 0 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x-y = ab^{-1} - a_1 b_1^{-1}$

$= a(b_1 \cdot b_1^{-1})b^{-1} - a_1(b \cdot b^{-1})b_1^{-1}$

$= ab_1(b_1^{-1} b^{-1}) - a_1 b(b^{-1} \cdot b_1^{-1})$

$= ab_1(b b_1)^{-1} - a_1 b(b_1 b)^{-1}$

$x-y = (ab_1 - a_1 b)(b b_1)^{-1}$

ولكن:

$ab_1 - a_1 b \in f \;\&\; bb_1 \in f \;\&\; b \cdot b_1 \neq 0$

(f بنطقة تكاملية) ←

$\Rightarrow x-y \in f'$

~~$\forall x, y \in$~~ ج)

$\forall x, y \in f' \;\&\; y \neq 0 \Rightarrow x = ab^{-1}$; $a, b \in f \;\&\; b \neq 0$

$y = a_1 \cdot b_1^{-1}$; $a_1, b_1 \in f \;\&\; a_1 \neq 0$ ، $b_1 \neq 0$

$x \cdot y^{-1} = a \cdot b^{-1}(a_1 \cdot b_1^{-1})^{-1} = a \cdot b^{-1}(b_1 \cdot a_1^{-1})$

$= a \cdot b_1(b^{-1} \cdot a_1^{-1}) = a \cdot b_1(a_1 b)^{-1}$

ولكن:

$a \cdot b_1 \,,\; a_1 b \in f \;\&\; a_1 b \neq 0$

(f بنطقة تكاملية) ←

$\Rightarrow x \cdot y^{-1} = a \cdot b_1(a_1 \cdot b)^{-1} \in f'$

د)

$\forall\, a \in f \Rightarrow a = a \cdot 1 = a \cdot 1^{-1} \in f' \Rightarrow a \in f'$

$\Rightarrow f \subset f'$

هـ) ليكن $(f, +, \cdot)$ حقلاً جزئياً من الحقل $(k, +, \cdot)$

نحوي f ، إنّ $f \subset f'$ وذلك لأنه:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall x \in F' \Rightarrow x = a.b^{-1} \; ; \; a,b \in F \;\&\; b \neq 0$

$\Rightarrow a,b \in F_1 \Rightarrow a.b^{-1} \in F_1 \Rightarrow x \in F_1 \Rightarrow F' \subset F_1$

لأن F_1 حقل

بما أن $(F', +, .)$ حقل فإن أي عنصر مركب من الحقل $(F', +, .)$ يبقى في F، وهو أصغر حقل مركب من الحقل $(K, +, .)$ يبقى في F.

مميز حلقة: (Characteristic)

تعريف:

نقول عن عدد صحيح $n \neq 0$ بموجب n إنه وحيد، إنه مميز الحلقة R ونكتب $Char(R) = n$ إذا كان n أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $na = 0$ لكل a من R:

إذا لم يوجد مثل هذا العدد فإننا نصطلح على أن مميز الحلقة R هو الصفر ونكتب $Char(R) = 0$

ملاحظات:

1) لتكن $(R, +, .)$ حلقة، وليكن a عنصر أي R نقول إن العنصر a رتبة جمعية منتهية في الحلقة R إذا وجد عدد صحيح موجب n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $na = 0$ ونكتب $O(a) = n$

ونقول أن العنصر a رتبة جمعية غير منتهية إذا لم نعثر إيجاد عدد صحيح موجب n بحيث $na = 0$ ونكتب $O(a) = \infty$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(2) واضح من التعريف أن $Char(R)=0$ $\Leftrightarrow$ يوجد عنصر a من R بحيث $na\neq 0$ وذلك أيّاً تكن $n\in\mathbb{Z}^+$ وهذا يكافئ وجود عنصر يختلف عن الصفر a من R برتبة جمعية غير متناهية أي بحيث $o(a)=\infty$

مثال:

في الحلقة $(\mathbb{Z}_4,\oplus,\odot)$ لدينا:

$1\neq 0 \Rightarrow o(1)=4$

$2\neq 0 \Rightarrow o(2)=2$

$3\neq 0 \Rightarrow o(3)=4$

$\Rightarrow Char(\mathbb{Z}_4)=4$

مثال:

في الحلقات $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ و $(\mathbb{R},+,\cdot)$ و $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ و $(\mathbb{C},+,\cdot)$ من أجل كل عنصر a من تلك الحلقات فإنّ $na\neq 0\ \forall n\in\mathbb{Z}^+$ وبالتالي فإن مميز هذه الحلقات هو الصفر.

مبرهنة:

إذا كانت $(R,+,\cdot)$ حلقة واحدية، فإنّه يتحقق $Char(R)=n>0$ $\Leftrightarrow$ n أصغر عدد صحيح موجب يحقق $n.1=0$

البرهان:

$\Rightarrow$) لنفرض أن $Char(R)=n>0$ وبالتالي فإنّ $na=0$ من أجل كل عنصر a من R $\Leftarrow$ $n.1=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لنفرض أنّه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث أن:
$0 < m < n$ بحيث أن $m.1 = 0$ ومنه:

$$\forall a \in R \Rightarrow m.a = m(1.a) = (m.1)a = 0$$
$$\Rightarrow m.a = 0$$

وهذا يناقض كون $Char(R) = n$ وبالتالي
$n.1 = 0$ هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة

$\Leftarrow$: لنفرض أن n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $n.1 = 0$ من أجل أي عنصر a من R فإنّ:

$$\forall a \in R \Rightarrow n.a = n(1.a) = (n.1).a = 0$$
$$\Rightarrow Char(R) = n$$

برهنة:

إذا كانت $(R, +, .)$ منطقة تكاملية فإنّ مميزها إما صفر أو عدد أولي.

البرهان:

لنفرض أنه $Char(R) = n > 0$ ولنبرهن أن n عدد أولي:

إذا كان n ليس عدد أولي فإنّ:

$n = r.s$ و $0 < r, s < n$

بما أن $Char(R) = n$ فإنّ:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$n.1 = 0 \Rightarrow (r.s)\,1 = 0$

(R بنظمة تكاملية)

$(r.1)(s.1) = 0 \Rightarrow r.1 = 0$ أو $s.1 = 0$

وهي كلتا الحالتين تفضل على تناقض مع كون العنصر 1 هو $Char(R) = n$ وبالتالي n هو عدد أولي.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة