كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية٢

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المجموعات المولدة للمثاليات:

تعريف: لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة ما، إذا كانت S مجموعة جزئية غير خالية من A فإنّ تقاطع كل من المثاليات من الحلقة $(A,+,\cdot)$ التي تحوي كل منها S هو مثالية من الحلقة $(A,+,\cdot)$ تحوي S وتسمى المثالية المولدة بالمجموعة S، ويرمز لها بـ $\langle S\rangle$ وتسمّى S مجموعة مولدات هذه المثالية.

إذا كانت S منتهية $\{a_1,\dots,a_n\}$ فإننا نرمز لها بشكل خاص بـ $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$

يتضح من التعريف السابق أنّه إذا كانت $(A,+,\cdot)$ حلقة ما، وكانت S مجموعة جزئية غير خالية من A فإنّ المثالية المولدة بالمجموعة S هي أصغر مثالية من الحلقة $(A,+,\cdot)$ تحوي S.

ملاحظات:

1) لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة تبديلية ما، إذا كانت S مجموعة جزئية غير خالية من A فإنّ:

$$\langle S\rangle=\{x\in A \mid x=\sum_{i=1}^{t} a_i u_i+\sum_{j=1}^{t} n_j u_j \;;\; u_i,u_j\in S \;\&\; a_i\in A \;\&\; n_j\in\mathbb{Z},\ \&\ t,t_1\in\mathbb{Z}^+\}$$

2) لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة تبديلية ما، وإذا كان a عنصراً ما من A فإنّ:

$\langle a\rangle = \{x \in A \mid x = ba + na;\ b \in A,\ n \in \mathbb{Z}\}$

3. لتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة إذا كان a عنصراً ما من A فإنّ:

$\langle a\rangle = \{x \in A \mid x = ca;\ c \in A\}$

وبصورة عامة إذا كانت S مجموعة جزئية غير خالية من A، فإنّ:

$$\langle S\rangle = \{x \in A \mid x = \sum_{i=1}^{t} c_i w_i;\ c_i \in A,\ w_i \in S,\ t \in \mathbb{Z}^+\}$$

نظريات أساسية في الهومومورفيزمات:

1. إذا كان f هومومورفيزم للحلقة $(A, +, \cdot)$ في حلقة ما $(B, T, *)$ فإنّ:

أ) $\ker f$ مثالية من الحلقة $(A, +, \cdot)$

ب) الصورة المعكوسة وفق f لأي مثالية من الحلقة $(B, T, *)$ هي مثالية من الحلقة $(A, +, \cdot)$

البرهان:

أ) وجدنا سابقاً أنّ $\ker f$ حلقة جزئية من الحلقة $(A, +, \cdot)$ ليبرهن أن $\ker f$ مثالية يكفي أن نبرهن أن:

$\forall a \in A,\ x \in \ker f \Rightarrow ax \in \ker f \ \&\ xa \in \ker f$

لدينا: $f(ax) = f(a) * f(x) = f(a) * o' = o'$

$f(xa) = f(x) * f(a) = o' * f(a) = o'$

بما سبق نجد أن $\ker f$ مثالية من الحلقة $(A, +, \cdot)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ب) لتكن B_1 مثالية ما من الحلقة $(B, T, \star)$ عندئذٍ فإنّ B_1 حلقة جزئية من الحلقة $(B, T, \star)$ ومبرهاناً أنّ $(f^{-1}(B_1), T, \star)$ حلقة جزئية من الحلقة $(A, +, \cdot)$ حتى نبرهن أنه $f^{-1}(B_1)$ مثالية يكفي أن نبرهن أنّ:

$$\forall a \in A,\ x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow ax \in f^{-1}(B_1) \ \&\ xa \in f^{-1}(B_1)$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x) \in B_1, \quad f(a) \in B_1$$

$$f(a) \star f(x) \in B_1 \Rightarrow f(a \cdot x) \in B_1$$

$$\Rightarrow a \cdot x \in f^{-1}(B_1)$$

ولدينا أيضاً:

$$f(x) \star f(a) \in B_1 \Rightarrow f(x \cdot a) \in B_1$$

$$\Rightarrow x \cdot a \in f^{-1}(B_1)$$

فاستنتجنا أن $f^{-1}(B_1)$ مثالية من الحلقة $(A, +, \cdot)$

2) إذا كان f هومومورفيزم لحلقة ما $(A, +, \cdot)$ على حلقة ما $(B, T, \star)$، فإنّ الصورة المباشرة وفق f لأي مثالية من الحلقة $(A, +, \cdot)$ هي مثالية من الحلقة $(B, T, \star)$ (يبرهن بالمثل)

3) إذا كان f هومومورفيزم لحلقة ما $(A, +, \cdot)$ في حلقة ما $(B, T, \star)$ فإنّ $(A/\ker f, +, \cdot)$ أيزومورفيزم مع $(f(A), T, \star)$ أي:

$$(A/\ker f, +, \cdot) \simeq (f(A), T, \star)$$

* ينتج من البرهنة السابقة أنّه إذا كان f هومومورفيزم عام (~~هومومورفيزم~~) لحلقة ما $(A, +, \cdot)$ على حلقة ما $(B, T, \star)$ (أيبومورفيزم)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

فإنّ :

$$(A/\ker f, +, \cdot) \cong (B, T, *)$$

تمرين : لتكن A_1, A_2 مثاليتين بحيث $(A, +, \cdot)$ حلقة ولنفرض أنّ $A_1 \subset A_2$ بيّن أنّ :

$$(A/A_1 / A_2/A_1, +, \cdot) \cong (A/A_2, +, \cdot)$$

الحل : إذا عرفنا التطبيق :

$$f : A/A_1 \longrightarrow A/A_2$$

بالشكل :

$$f(x + A_1) = x + A_2 \quad \forall x \in A$$

أ) $\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow f((x_1 + A_1) + (x_2 + A_1)) =$

$$f((x_1 + x_2) + A_1) = (x_1 + x_2) + A_2$$

$$= x_1 + A_2 + x_2 + A_2 = f(x_1 + A_1) + f(x_2 + A_1)$$

$$\Rightarrow f((x_1 + A_1) + (x_2 + A_1)) = f(x_1 + A_1) + f(x_2 + A_1)$$

ب)

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow f((x_1 + A_1) \cdot (x_2 + A_1)) =$$

$$f((x_1 \cdot x_2) + A_1) = x_1 \cdot x_2 + A_2$$

$$= (x_1 + A_2)(x_2 + A_2) = f(x_1 + A_1) \cdot f(x_2 + A_1)$$

ج)

$$\forall x + A_2 \in A/A_2 \Rightarrow \exists\, x + A_1 \in A/A_1 \; ;$$

$$f(x + A_1) = x + A_2 \Rightarrow \quad f \text{ غامر}$$

د)

$$\forall x + A_1 \in \ker f \Rightarrow f(x + A_1) = A_2$$

$$\Rightarrow x + A_2 = A_2 \Rightarrow x \in A_2 \Rightarrow$$

$$x + A_1 \in A_2/A_1 \Rightarrow \ker f \subset A_2/A_1 \quad \ldots (1)$$

ومن جهة ثانية فإنّ :

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall x+A_1 \in A_2/A_1 \Rightarrow x \in A_2 \Rightarrow$

$x+A_2 = A_2 \Rightarrow f(x+A_1) = A_2$

$\Rightarrow x+A_1 \in \ker f \Rightarrow A_2/A_1 \subset \ker f \quad \ldots (2)$

من (1) و (2) نجد أن $\ker f = A_2/A_1$

من أ) - ب) - ج) - د) نجد أن f أيبومورفيزم للحلقة A/A_1 في الحلقة A/A_2 ونواته هي A_2/A_2 ومنه حسب النظرية السابقة فإنه نجد أنّ:

$$(A(A_1/A_2/A_1, +, \cdot) \cong (A/A_2, +, \cdot)$$

وهو المطلوب.

حلقة المثاليات الأبسطية:

تعريف: لتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة تبديلية بـ 1، إذا كان a عنصراً ما من A فإنّ Aa مثالية من الحلقة $(A, +, \cdot)$ سميها مثالية أبسطية مولدة بالعنصر a.

نجد من هذا التعريف أنه إذا كانت $(A, +, \cdot)$ حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة، و إذا كان a عنصراً ما من A فإنّ:

$$A.a = \langle a \rangle = Ca \; ; \; C \in A$$

حلقة المثاليات الرئيسية:

تعريف: إذا كانت $(A, +, \cdot)$ حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة 1 فإننا نقول عن الحلقة $(A, +, \cdot)$ إنها حلقة مثاليات رئيسية إذا وفقط إذا كانت كل مثالية في الحلقة $(A, +, \cdot)$ مثالية رئيسية منها.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة: ليكن $(\mathbb{Z}_n, +, .)$ حلقة الأعداد الصحيحة بالنسبة للعمليتي الجمع والضرب المعياريين، إن الحلقة $(\mathbb{Z}_n, +, .)$ هي حلقة مثاليات رئيسية.

البرهان:

ليكن B مثالية ما من الحلقة $(\mathbb{Z}_n, +, .)$ ولنبرهن على أن B هي مثالية رئيسية من $(\mathbb{Z}_n, +, .)$

آ) إذا كانت $B = \{0\}$، فإنّ: $B = \mathbb{Z}_n 0$

بالتالي فإنّ B مثالية رئيسية من الحلقة $(\mathbb{Z}_n, +, .)$ مولدة بالعنصر 0

ب) إذا كانت $B \neq \{0\}$ فإنّه يوجد في B أعداد صحيحة موجبة وسالبة، لنفرض أن n هو أصغر عدد صحيح موجب ينتمي إلى B إنّ $B = \mathbb{Z}_n$ وذلك لأنه من جهة أولى $\mathbb{Z}_n \subset B$ لأن B مثالية، و $n \in B$

ومن جهة ثانية فإنّه إذا كان b عنصراً من B، فإنّه يوجد عددان صحيحان q, r بحيث يكون:

$$b = qn + r \quad ; \quad 0 \leq r < n$$

إنّ $r = 0$ لأنّه إذا كانت $r \neq 0$ فإنّ:

$$0 < r < n \quad \& \quad r = \underbrace{b}_{\in B} - \underbrace{qn}_{\in B} \in B$$

$$\in B$$

وهذا يناقض بكون n أصغر عدد صحيح موجب ينتمي إلى B وبنتيجة $B \subset \mathbb{Z}_n$

من الاحتوائين السابقين نجد أنّ $B = \mathbb{Z}_n$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وبالتالي B مثالية رئيسية مولدة بالعنصر n

من أ, ب نجد أن $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ حلقة مثاليات رئيسية.

تعريف:

* المثالية الأولية: لتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة تبديلية نسمّي كل مثالية B من الحلقة $(A, +, \cdot)$ مثالية أولية إذا تحقق الشرط الآتي:

إذا كان $x, y \in B$ عنصرين من A بحيث أن: $x \cdot y \in B$

فإنّ أحد العنصرين x أو y على الأقل ينتمي إلى B

* المثالية الأعظمية: لتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة تبديلية نسمي كل مثالية B من الحلقة $(A, +, \cdot)$ مثالية أعظمية منها إذا كانت $B \neq A$، وإذا لم يكن بالإمكان إيجاد مثالية A_1 من الحلقة $(A, +, \cdot)$ تحوي B بحيث يكون

$A_1 \neq A$ و $A_1 \neq B$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة