كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : فيزياء للرياضيات

المحاضرة : مسائل/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

تطبيقات : برهن صحة العلاقات التالية :

① . $U = \left[\frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta}\right]_V$ ② . $U = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ ③ . $U = -T^2\left(\frac{\partial (F/T)}{\partial T}\right)_V$

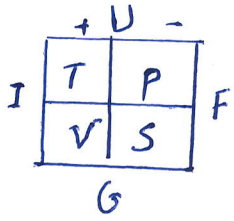
④ . $C_V = -T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V$ ⑤ . $C_V = k\beta^2\left[\frac{\partial^2(\beta F)}{\partial \beta^2}\right]_V$

الحل :

① . نتطلق من الطرف الأيمن للوصول إلى الطرف الأيسر :

$$\left[\frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta}\right]_V = F + \beta \frac{\partial F}{\partial \beta}\Big|_V = F + \frac{1}{kT}\cdot kT^2 \frac{\partial F}{\partial T}\Big|_V = F - T\frac{\partial F}{\partial T}\Big|_V$$

ومن مربع الطاقة :



$$-S = \frac{\partial F}{\partial T}\Big|_V \Longrightarrow \left[\frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta}\right] = F + TS = U$$ وهو المطلوب

② .
$$U = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = F - T(-S) = F + TS = U$$

③ . نتطلق من الطرف الأيمن وصولاً للطرف الأيسر :

$$-T^2\left(\frac{\partial (F/T)}{\partial T}\right)_V = -T^2\left[\frac{T\frac{\partial F}{\partial T}\Big|_V - F}{T^2}\right] = F - T\frac{\partial F}{\partial T}\Big|_V = F + TS = U$$

④ . نعلم أن : $C_V = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V$ ولدينا : $U = F - T\frac{\partial F}{\partial T}\Big|_V$ وبالتالي :

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V = \frac{\partial}{\partial T}\left[F - T\frac{\partial F}{\partial T}\Big|_V\right] = \frac{\partial F}{\partial T}\Big|_V - \frac{\partial}{\partial T}\left(T\frac{\partial F}{\partial T}\Big|_V\right)$$

$$= -S \underbrace{-\frac{\partial F}{\partial T}\Big|_V}_{+S} - T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\Big|_V = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\Big|_V$$ وهو المطلوب

⑤ . نعلم أن : $C_V = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V$ وبالاستفادة من : $U = \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta}\Big|_V$

نكتب : $C_V = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V = \frac{1}{kT^2}\left[\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta}\right)\right]_V$

$$= k\beta^2 \frac{\partial^2(\beta F)}{\partial \beta^2}$$ وهو المطلوب

مسائل حول تابع التقاسم الكلاسيكي

سؤال ①:

جملة مكونة من N جسيم كلاسيكي وموزعة على عدد محدود من سويات الطاقة غير المتحللة ($g_i = 1$) وطاقاتها تتبع العلاقة:

$$\varepsilon_i = i\,\varepsilon_0 \quad ; \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

والمطلوب:

① احسب تقاسم الجملة Z بدلالة β.

② احسب متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ إذا علمت أن: $\varepsilon_0 \ll KT$، وعلام استنتج؟

الجواب:

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta\varepsilon_i} = \sum_i e^{\beta\varepsilon_i} = 1 + e^{\beta\varepsilon_0} + 1\,e^{2\beta\varepsilon_0} + \ldots + e^{i\beta\varepsilon}$$

تمثل سلسلة هندسية حدها الأول هو $1 = e^{0}$ وأساسها $e^{\beta\varepsilon_0}$ وهو حد وهمي تناقصي لأن $\beta = -1/KT$

وبالتالي مجموعها يكون:

$$Z = \frac{1}{1-f} = \frac{1}{1-e^{\beta\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{1}{1-e^{\beta\varepsilon_0}}}$$

②"

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta}\ln\left(1-e^{\beta\varepsilon_0}\right) = \frac{\varepsilon_0 e^{\beta\varepsilon_0}}{1-e^{\beta\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0}{e^{-\beta\varepsilon_0}-1} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/KT}-1}$$

③. عندما $\varepsilon_0 \ll KT$ ننشر التابع الأسي:

$$e^{\varepsilon_0/KT} = 1 + \frac{\varepsilon_0/KT}{1!} + \frac{(\varepsilon_0/KT)^2}{2!} + \frac{(\varepsilon_0/KT)^3}{3!}$$

ومن فرضية الشرط $\varepsilon_0 \ll KT$ نهمل الحدود ذات المراتب العليا لأنها صغيرة وتكتفي بالحدين الأول والثاني فقط:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{1+\frac{\varepsilon_0}{KT}-1} = KT \Rightarrow \bar{\varepsilon} \simeq KT$$

إذن: في هذه الحالة يميل الغاز الكلاسيكي ($\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}KT$) إلى الغاز المثالي ($\bar{\varepsilon} = KT$).

سؤال ②:

جملة مكونة من N جسيم مهتز بتكافؤ توافقي، كتلة كل منها m، وتهتز بعد واحد ox، وبتواتر زاوي $w = cte$، وكل منها يخضع لقوة إرجاع من الشكل: $F = -k_s x$; $k_s = m\omega^2$

فإذا علمت أن الضياع في الطاقة معدوم. المطلوب:

①. أوجد Z_{clas} إذا كانت الحسيبات مهتزات كلاسيكية ② أوجد Z إذا علمت أن المهتزات كوانتية، وإن سويات الطاقة ε_n غير متحللة ($g_n = 1$)، وإن طاقة كل منها $\varepsilon_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

③. برهن تطابق خاص الجملتين (الكلاسيكية والكمية) تحت الشرط : $\hbar\omega \ll KT$ (الطاقة الإهتزازية أقل بكثير من الطاقة الحرارية).

④. احسب خاص الطاعم Z_{cl} في الحالتين الكلاسيكية والكمية.

الجواب: ① الجملة معزولة ⇐ المقدر الطاقة مصدوم ⇐ الطاقة الكلية ثابتة.

$$\varepsilon = \frac{P_x^2}{2m} + U(x) \quad ; \quad U(x) = -\int F_x\, dx = -\int -K_s\, x\, dx = \frac{1}{2}K_s x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

إذن : $\varepsilon = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

- في حالة الهزات الكلاسيكية ⇐ سعيات الطاقة مستمرة ⇐ نأخذ الصيغة التكاملية لتابع التقاسم ونأخذ التكامل على المجال $]-\infty, +\infty[$ لأن مجال التغيرات لم يحدد في المسألة. وعليه :

$$Z_{clas} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon/KT}\, g(\varepsilon)\, d\varepsilon \quad \ldots\ldots (1)$$

ونعلم أن : $g(\varepsilon)d\varepsilon = C\, d\Gamma = C\, dq_v\, dp_v = C\, dx\, dp_x = \frac{1}{h}\, dx\, dp_x$ ؛ $C = \frac{1}{h}$

نعوض عن ذلك في العلاقة (1) فنجد أن :

$$Z_{clas} = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P_x^2/2mKT} \cdot e^{-m\omega^2 x^2/2KT}\, dx\, dp_x$$

فصل المتحولات

نضع : $K_1 = 1/2mKT$ و $K_2 = m\omega^2/2KT$ $\Rightarrow$ $Z_{clas} = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-K_1 P_x^2}\, dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-K_2 x^2}\, dx \quad \ldots (2)$

لدينا : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = 2.\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \ldots (3)$

وبالتالي : تعيين (3) بالاعتبار والتعويض في (2) نجد :

$$Z_{clas} = \frac{1}{h}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{K_1}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{K_2}} = \frac{1}{h}\cdot\sqrt{2\pi mKT}\cdot\sqrt{\frac{2\pi KT}{m\omega^2}} = \frac{2\pi KT}{h\omega} = \frac{KT}{\hbar\omega} \Rightarrow \boxed{Z_{clas} = \frac{KT}{\hbar\omega}}$$

② . في حالة الجسيمات كمية ، نأخذ تابع التقاسم حالة الحالة المتفصلة :

$$Z_{qua} = \sum_n g_n e^{-\varepsilon_n/KT} = \sum_n e^{-(n+\frac{1}{2})\frac{\hbar\omega}{KT}} = e^{-\frac{\hbar\omega}{2KT}} \sum_n e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}n}$$

نضع : $\phi = -\frac{\hbar\omega}{2KT} \Rightarrow Z_{qua} = e^{-\phi}\sum_{n=0} e^{-2\phi n} = e^{-\phi}\left[1 + e^{-2\phi} + e^{-4\phi} + e^{-6\phi} + \ldots\right]$

وهي سلسلة هندسية حدها الأول $c = e^{-\phi}$ وأساسها $f = e^{-2\phi}$ وهي متقاربة

ومتقاربة لأن : $\lim_{n\to\infty} e^{-2\phi n} = 0$ وبالتالي يكون مجموعها :

$$Z = \frac{c}{1-f} = \frac{e^{-\phi}}{1-e^{-2\phi}} = \frac{1}{e^{\phi}-e^{-\phi}} = (e^{\phi}-e^{-\phi})^{-1} \Rightarrow \boxed{Z_{qua} = \left[e^{\frac{\hbar\omega}{2KT}} - e^{-\frac{\hbar\omega}{2KT}}\right]^{-1}}$$

③'. من أجل الشرط $\hbar\omega \ll KT$ $\Leftarrow$ $\phi = \frac{\hbar\omega}{2KT} \ll 1$ وبالتالي يمكن نشر التابعين الأسيين e^{ϕ} و $e^{-\phi}$ ونكتفي بالحدين الأول والثاني :

$$e^{+\phi} = 1 + \frac{\phi}{1!} + \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^3}{3!} + \ldots \quad \text{و} \quad e^{-\phi} = 1 - \frac{\phi}{1!} + \frac{\phi^2}{2!} - \frac{\phi^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\phi^n}{n!}$$

$$\Rightarrow Z_{qua} = \left(e^{\phi} - e^{-\phi}\right)^{-1} \approx \left(1+\phi-1+\phi\right)^{-1} = (2\phi)^{-1} = \frac{2KT}{2\hbar\omega} = \frac{KT}{\hbar\omega} = Z_{clas}$$

④. خواص الطاقة في حالة الجسيمات الكلاسيكية :

$$Z_{\substack{ue \\ class}} = \left(Z_{class}\right)^N = \left(\frac{KT}{\hbar\omega}\right)^N$$

وفي حالة الجزيئات جسيمات كمية (غير متمايزة) ، حسب خواص الطاقة من العلاقة :

$$Z_{\substack{ue \\ qua}} = \frac{\left(Z_{class}\right)^N}{N!} = \frac{1}{N!}\left(\frac{KT}{\hbar\omega}\right)^N$$

السؤال (3) :

جملة مكونة من N جسيم كلاسيكي مهتز بشكل توافقي ، كتلة كل منها m ، وتهتز في بعد واحد ox ، وبتواتر ثابت $\omega = cte$ ، وكل منها يخضع لقوة إرجاع من الشكل : $k_s = m\omega^2$ ؛ $F = -k_s x^3$.

فإذا علمت أن الضياع في الطاقة معدوم (الجملة معزولة) . المطلوب :

①. أكتب خواص الجملة بالشكل : Z_N / واحسب أيضا

$$q = -\frac{3}{4} \; ; \; |\beta| = \frac{1}{KT} \; ; \; A = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{k_s}\right)^{1/4}\cdot\sqrt{\frac{2\pi m}{h^2}} \; : \text{حيث} \quad Z = A|\beta|^q$$

②. أوجد : الطاقة الحرة F ، والضغط P ، والأنتروبية ، والطاقة الداخلية U ، والسعة الحرارية C_V .

الجواب :

①. العفوي الطاقة معدوم نظرا لكون الجملة معزولة $\Leftarrow$ الطاقة الكلية ثابتة .

$$\varepsilon = \frac{P_x^2}{2m} + U(x) \; ; \; U(x) = -\int F(x)\,dx = -\int -k_s x^3\,dx = \frac{1}{4}k_s x^4 \Rightarrow \varepsilon = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{4}k_s x^4$$

$$Z_{clas} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon/KT} g(\varepsilon)\,d\varepsilon \quad \Leftarrow \quad \text{الجسيمات كلاسيكية} = \text{سويات الطاقة مستمرة}$$

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{C\,d\Gamma}{} = C\,dq_v\,dp_v = \frac{1}{h}\,dx\,dp_x \quad \text{ومن}$$

$$\Rightarrow Z_{clas} = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-P_x^2}{2mKT}} \cdot e^{\frac{-k_s^2}{4KT}x^2}\,dx\,dp_x \Rightarrow Z = \frac{1}{h}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-P_x^2}{2mKT}}\,dp_x}_{①}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{k_s}{4KT}x^4}\,dx}_{②}$$

① نضع : $\kappa_1 = 1/2mKT \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\kappa_1 P_x^2}\,dp_x = \sqrt{\frac{\pi}{\kappa_1}} = \sqrt{2\pi mKT}$ كامل التكامل

وحل التكامل الثاني :

نضع : $u = \frac{k_s}{4KT}x^4 = \kappa_2 x^4$ ؛ $\kappa_2 = \frac{k_s}{4KT} \Rightarrow x = \ldots \Rightarrow dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\kappa_2}\right)^{1/4} u^{-3/4}$

وبالتعويض نجد أن :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{\kappa_2}\right)^{1/4}u^{-3/4}\,du = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\kappa_2}\right)^{1/4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u}\,u^{-3/4}\,du = 2\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\kappa_2}\right)^{1/4}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-u}\,u^{-3/4}\,du}_{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

بالمقابل : $n+1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow n = \frac{1}{4} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-k_s}{4KT}x^4}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{k_s}\right)^{1/4}\cdot(KT)^{1/4}$

وبالمقارنة بين ① و ② في (*) نجد أن :

$$Z_{clas} = \frac{1}{h}\cdot\sqrt{2\pi m/\beta}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{k\beta}\right)^{1/4}\cdot(kT)^{1/4} = \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{k\beta}\right)^{1/4}\cdot(kT)^{3/4}\cdot\left(\frac{1}{kT}\right)^{-3/4}$$

$$\Rightarrow Z_{clas} = A\cdot|\beta|^{q} \quad ; \quad A = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{k\beta}\right)^{1/4} \;\&\; |\beta| = \frac{1}{kT}$$

* الخواص الطاقية :

$$Z_{vr} = Z^{N} = A^{N}\cdot|\beta|^{qN} = A^{N}\cdot|\beta|^{-\frac{3}{4}N}$$

② . إيجاد الطاقة الحرة F

$$(*)\quad \ln Z = \ln A - \frac{3}{4}\ln|\beta| \Rightarrow \left.\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right|_V = -\frac{3}{4}\frac{\partial \ln|\beta|}{\partial T} = -\frac{3}{4}\frac{\partial \ln(1/kT)}{\partial T} = \frac{3}{4}\frac{\partial \ln(kT)}{\partial T} = \frac{3}{4}\frac{1}{T} \;\&\; \left.\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right|_T = 0$$

$$F = -NkT\ln Z \Rightarrow F = NkT\left[\frac{3}{4}\ln|\beta| - \ln A\right]$$

الضغط P :

$$P = -\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_T = NkT\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T = 0$$

الأنتروبية :

$$S = -\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_V = Nk\left[\ln Z + T\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V\right] = Nk\left[\ln A - \frac{3}{4}\ln|\beta| + \frac{3}{4}\right]$$

الطاقة الداخلية :

$$U = F + TS = NkT\left[\frac{3}{4}\ln|\beta| - \ln A\right] + NkT\left[\ln A - \frac{3}{4}\ln|\beta| + \frac{3}{4}\right] = \frac{3}{4}NkT$$

السعة الحرارية :

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V} = \frac{3}{4}Nk$$

سؤال ④ : جملة مكونة من N من الجسيمات المتمايزة . طاقة كل منها مرتبطة بالطاقة بالعلاقة : $\varepsilon = c|p|$ حيث أن c سرعة الضوء . والمطلوب :

① . أوجد خواص المجلة Z .

② . أوجد : الطاقة الحرة F ، والضغط P ، والأنتروبية S ، والطاقة الداخلية U ، والسعة الحرارية C_V .

الجواب : نحسب Z من الصيغة التكاملية ونأخذ مجال التكامل على المجال $[0,+\infty[$ لأن الانطباقات ما فوق ذات الطاقة

$$Z = \int_0^{+\infty} e^{\beta\varepsilon}\, g(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

لدينا $d\Gamma = dq_V\cdot dp_V = 4\pi V p^2 dp \Rightarrow \hat{C}\,d\Gamma = g(p)dp = \frac{4\pi V}{h^3}p^2 dp$ ، $\hat{C} = 1/h^3$

$$\Rightarrow Z = \int_0^{+\infty} e^{-cp|\beta|/kT}\, g(p)\, dp = \frac{4\pi V}{h^3}\int_0^{+\infty} p^2 e^{-\delta|p|}\, dp \quad ; \quad \delta = c|\beta| = \frac{c}{kT}$$

لدينا : $\int_0^{+\infty} p^2 e^{-\beta|p|}\,dp = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\left(e^{-\beta|p|}\right)dp = \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\int_0^{+\infty} e^{-\beta|p|}\,dp$

$= \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\left[-\frac{1}{\beta}e^{-\beta|p|}\right]_0^{\infty} = \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\left[-\frac{1}{\beta}(0-1)\right] = \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\left(\frac{1}{\beta}\right)$

$\Rightarrow \quad = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\beta}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{1}{\beta^2}\right) = \frac{2}{\beta^3} = 2\left(\frac{1}{\beta}\right)^3$

وبالتعويض في عبارة Z نجد أن :

$$Z = \frac{8\pi V}{h^3}\left(\frac{1}{\beta}\right)^3 = \frac{8\pi V k^3}{c^3 h^3}T^3 = \lambda V T^3 \quad ; \quad \lambda = \frac{8\pi k^3}{c^3 h^3} = cte$$

@ $\ln Z = \ln\lambda + \ln V + 3\ln T \Leftarrow Z = \lambda V T^3$ & $\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{T}$ & $\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{V}$

وصف الطاقة الحرة : $F = -NkT\ln Z = -NkT\left[\ln\lambda + \ln V + 3\ln T\right]$

الضغط : $P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = NkT\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T = NkT\frac{1}{V}$

الإنتروبية : $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = Nk\left[\ln Z + T\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V\right]$

$= Nk\left[\ln\lambda + \ln V + 3\ln T + 3\right]$

الطاقة الداخلية : $U = F + TS = NkT^2\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V = 3NkT$

السعة الحرارية عند حجم ثابت : $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 3Nk$ وهو المطلوب

مسألة

جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$)، موزعة على ثلاث سويات للطاقة $\varepsilon_1 = 0$ (J)، $\varepsilon_2 = kT$ (J) و $\varepsilon_3 = 2kT$ (J)، والسويات معطاة بالتكافل: $g_i = N$ و $g_2 = g_3 = 1$. والمطلوب:

(1): أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الكلاسيكي (العدد فقط بدلالة N)

(2): أوجد طاقة الحالة الماكروية (N_1 من 0، N_2 من 1، N_3 من $N-1$)، ثم أوجد وزنها الإحصائي (بدلالة N) في الحالات التالية:

A. الجسيمات متمايزة (كلاسيكية) B. الجسيمات بوزونات C. الجسيمات فيرميونات.

(نفرض أن: $N=2$ واحسب الأوزان الإحصائية للحالات السابقة مع التمثيل)

(3): نفرض أن الجسيمات متمايزة، أوجد أرقام إشغال حالة التوزع الماكروي الأكثر احتمالاً $(N_1, N_2, N_3)_{max}$ بدلالة العدد N وتابع التخاصر Z ولخص مضمون التوزع الناتج.

الجواب: (1) عدد الحالات الماكروية بدلالة N:

$$N_0 = \frac{(N+N\varepsilon-1)!}{N!\,(N\varepsilon-1)!} = \frac{(N+3-1)!}{N!\,(3-1)!} = \frac{(N+2)!}{2N!} = \frac{(N+2)(N+1)}{2}$$

(2) الوزن الإحصائي:

كلاسيكية: $W_{(N-1,1,0)} = N! \prod_{i=1}^{3} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left[\frac{N^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \frac{1^1}{1!} \cdot \frac{1^0}{0!} \right]$

$$= N! \, \frac{N N^{N-1}}{N!} = N^N$$

متمايزة وبوزونات: $W_{(N-1,1,0)} = \prod_{i=1}^{3} \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} = \left[\frac{(N-1+N-1)!}{(N-1)!\,(N-1)!} \cdot \frac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)!} \cdot \frac{(0+1-1)!}{0!\,(1-1)!} \right]$

$$= \frac{(2N-2)}{[(N-1)!]^2}$$

متمايزة وفيرميونات: الشرط: $g_i \geq N_i$ محقق من أجل الحالة $(N-1, 1, 0)$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$)

$$\Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = \prod_{i=1}^{3} \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i - N_i)!} = \left[\frac{N!}{(N-1)!\,(N-N+1)!} \cdot \frac{1!}{1!\,(1-1)!} \cdot \frac{1!}{0!\,(1-0)!} \right] = N$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) $(1,1,0)$ • من أجل $N=2$ فإننا نجد الحالات:

عوض: كلاسيكية $W_{M-B} = W_{(N-1,1,0)} =$ [illegible] : $\frac{B}{A1}$ $\frac{B}{1A}$ $\frac{A}{B1}$ $\frac{A}{1B}$

كمية وبوزونات : $W_{B-E} = W_{(1,1,0)} = \frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2} = \frac{2!}{(1!)^2} = 2$

كمية وفرميونات : $W_{F-D} = W_{(1,1,0)} = N = 2$

3. نوجد تحاص المجلة :

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i} = \sum_{i=1}^{3} g_i e^{-\varepsilon_i / kT} = N\bar{e}^0 + 1\bar{e}^1 + 1\bar{e}^2 = N + \bar{e}^1 + \bar{e}^2$$

والآن لنوجد إرتفاع الإستقلال :

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{\varepsilon_i / kT}$$

وعليه يكون : $N_1 = \frac{N}{Z} N e^0$ و $N_2 = \frac{N}{Z} \bar{e}^1$ و $N_2 = \frac{N}{Z} \bar{e}^2$

المعرفة من حالة التوزع :

نتحقق ① $N = \sum_i N_i = \frac{N^2}{Z} + \frac{N}{Z} e^{-1} + \frac{N}{Z} \bar{e}^2 = \frac{N}{Z} \left[N + \bar{e}^1 + \bar{e}^2 \right] = \frac{N}{Z} \cdot Z = N$

نوجد نسبة إرتفاع الإستقلال ② $\frac{N_1}{N_2} = \frac{N^2/Z}{(N/Z)\bar{e}^1} = Ne > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$

$\frac{N_1}{N_2} = \frac{N^2/Z}{(N/Z)\bar{e}^2} = N_2^2 > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$

$\frac{N_2}{N_3} = \frac{(N/Z)\bar{e}^1}{(N/Z)\bar{e}^2} = e > 1 \Rightarrow N_2 > N_3$

$\Rightarrow N = \sum N_i$ و $N_1 > N_2 > N_3$ $\Rightarrow$ التوزع طبيعي

المحاضرة: ⑦ و ⑧ / عنصر شيرباك للميكانيك

الفصل الثالث ③ : إحصاء بوزة - أينشتاين (B-E)
تطبيقات إحصاء بوزه - أينشتاين
إحصاء فيرمي - ديراك (F-D)
تطبيقات إحصاء فيرمي - ديراك

① . إحصاء بوزه - أينشتاين (B-E)

• مقدمة :

- البوزونات هي جسيمات كمية غير متمايزة ، وتشمل الفوتونات والفونونات ... إلخ . وتتمتع بالخواص التالية :

① . تسمى البوزون بحقق العلاقة : $S = n\hbar$ ، أي حيث : $n = 0, 1, 2$ ، أي يجب أن يكون السبين عبارة عدد صحيح من $\hbar$ هنا نقول عن الجسيم بأنه بوزون

② . لا تخضع لمبدأ الاستبعاد لباولي ، يمكن لعدد من الحالات الواحدة أن تحتوي على عدد كبير من البوزونات المتماثلة الأعداد الكمية : (n, l, m_l, S) .

③ . التابع الموجي الخاص بالبوزون متناظر ④ غير متفاعلة مع بعضها البعض . ⑤ يرتبط زخمها بالطاقة وفق العلاقة : $E = cp$.

⑥ جميعها تحقق علاقة التشتت . $w = ck$ ، حيث : $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$ العدد الموجي (العتبة الطاقة لجهة الانتشار) .

• عبارة الوزن الإحصائي لتوزع بوزه - أينشتاين :

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{M} \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!}$$

• عبارة ارقام إشغال الحالة الأكثر احتمالاً لتوزع (B-E) :

- نشتق من سابقه الوزن الحالة التوازنية :

$$d\ln W_{B-E} + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0 \quad \cdots ①$$

لدينا

$W_{B-E} = \prod_i \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!}$ ؛ N_i & g_i كميات كبيرة $\Rightarrow$ نفعل الواحد $W_{B-E} \cong \prod_i \frac{(N_i + g_i)!}{N_i!\,g_i!}$ ، زنة البوزونات كمية

$$\Rightarrow \ln(W_{B-E}) = \ln \prod_i \frac{(N_i + g_i)!}{N_i!\,g_i!} = \sum_i \left[\ln(N_i + g_i)! - \ln N_i! - \ln g_i\right]$$

- وباستخدام تقريب ستيرلنغ التالي : $\ln x! \cong x \ln x$ ، نجد :

$$\ln(W_{B-E}) \cong \sum_i \left[(N_i + g_i)\ln(N_i + g_i) - N_i \ln N_i - g_i \ln g_i\right]$$

وعلمنا أن : $W_{B-E} = W(g_i, N_i)$

ولكن : لما انتقلت من N_i في السوية ε_i ذات درجة الحلال الثانية . فإننا نجد بمقارنة الطريقتين :

$$d\ln(W_{B-E}) = \frac{\partial \ln W}{\partial N_i} dN_i = \sum_i [\ln(N_i+g_i)+1 - \ln N_i - 1] = \sum_i \ln \frac{N_i+g_i}{N_i} dN_i$$

$$\Rightarrow \boxed{d\ln(W_{B-E}) = \sum_i \ln \frac{N_i+g_i}{N_i} dN_i} \quad (2)$$

وبالاعتماد على الانتشار : $N = \sum_i N_i \Rightarrow \boxed{dN = \sum_i dN_i \ \& \ U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i}$ (3)

وبالتعويض عن (2) و (3) في (1) نجد :

$$\sum_i \ln \frac{N_i+g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0 \Rightarrow \sum_i \left[\ln \frac{N_i+g_i}{N_i} + \alpha + \beta\varepsilon_i\right] dN_i = 0$$

علماً أن : $dN_i \neq 0 \Rightarrow \ln \frac{N_i+g_i}{N_i} + \alpha + \beta\varepsilon_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{N_i+g_i}{N_i} = -(\alpha+\beta\varepsilon_i)$

$$\Rightarrow \frac{N_i+g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} - 1 \Rightarrow \boxed{N_i = \frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} - 1}} \quad (4)$$

وفي الحالة المستمرة : $\ln N = \boxed{dN = \frac{g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon)} - 1}}$ (5)

• الكمون الكيميائي والتوابع الترموديناميكية في الجمل المفتوحة :

- الجمل المفتوحة والمعزولة بـ V, T ثابتة : تتبادل مع الوسط الخارجي على إثره ذرات الجسيمات فقط.
- وتتميز لهذا التبادل هناك طاقة داخلية مرتبطة بعدد الجسيمات المتبادلة تدعى بـ الكمون الكيميائي μ.
- إذا فرضنا أن N هو عدد الجسيمات المتبادلة وأن لكل منها $\mu = cte$.

$$d(\mu N) = N d\mu + \mu dN = \mu dN$$

" الطاقة الداخلية ستزداد بهذا المقدار من الطاقة على أثر هذا التبادل

حسب المبدأ الأول :

$$\Rightarrow dU = \delta W + \delta Q = TdS + P\underbrace{dV}_{0} + \mu dN$$

$$\Rightarrow \boxed{dU = TdS + \mu dN}$$

يمكننا الآن أن نجعل الجمل المفتوحة : التي يكون حجمها $(T, V) = cte$ وتتبادل مع الوسط الخارجي على إثره ذرات وجسيمات فقط (بالعدد) على ثابتة عدد الجسيمات فيها كجملة.

- حيث (عدد الجسيمات الداخلة = عدد الجسيمات الخارجة منها).

مكتبة A to Z