كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : فيزياء للرياضيات

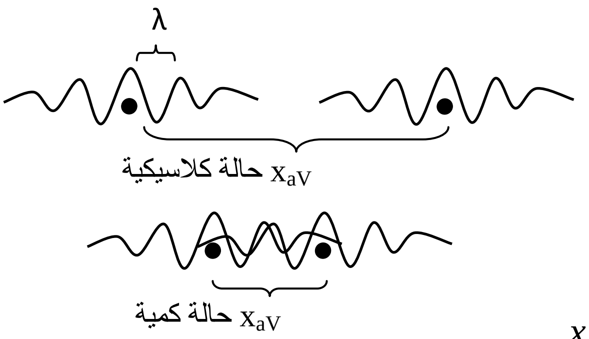
المحاضرة : ٦+٧/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبةA to Z

الفصل السابع
الإحصاءات الكمية

مقدمة:
تفيد الدراسة الكلاسيكية بإمكانية تحديد موضع الجسيم وكمية حركته بنفس الوقت وبدقة تامة. في حين لايكون هذا الأمر متاحاً بالنسبة للأجسام الكمية (الكوانتية)، نظراً لخضوعها لمبدأ هايزنبرغ في الشك (عدم التحديد).
ولكل جسيم متحرك موجة مصاحبة يتحدد طولها من علاقة دي برولي $\lambda = h/P$
في الحالة الكلاسيكية تكون الأمواج المصاحبة متباعدة (غير متداخلة). وتكون المسافة الوسطى بينها $\lambda << x_{aV}$ ، ما يسمح بمعرفة التفصيلات الدقيقة لكل منها على حدة. وفي الحالة الكمية تكون الأمواج المصاحبة متقاربة (متداخلة). وتكون المسافة الوسطى بينها $x_{aV} << \lambda$ ، ما لا يسمح بمعرفة التفصيلات الدقيقة لكل منها على حدة. حيث تشوش كل موجة على مواصفات الأخرى، كما هو موضح بالشكل ( ).



شكل ( )

لمعرفة حدود تطبيق الدراسة الكلاسيكية:
نبحث في إمكانية تحقيقها لشرط الحالة الكلاسيكية:

$$x_{aV} >> \lambda \qquad (1)$$

لذا نفرض جملة متوازنة مكونة من N جسيم كلاسيكي،
وتشغل حجماً قدره V عند درجة الحرارة T.
وحيث أنه لا يحدث تداخل بين الأمواج المصاحبة لجسيماتها،
فإننا نفرض حجماً خاصاً لكل جسيم على شكل مكعب طول ضلعه x_{aV} .
- نوجد قيمة x_{aV} بدلالة معطيات الجملة بتطبيق العلاقة التالية:
حجم الجملة = عدد المكعبات X حجم المكعب
وبما أن عدد المكعبات = N و حجم المكعب = x_{aV}^3 . وبالتعويض، نجد:

$$V = N\, x_{aV}^3 \quad \Rightarrow \quad x_{aV}^3 = (V/N)^{1/3} \qquad (2)$$

- نوجد قيمة λ من علاقة دي برولي $\lambda = h/P$.
ونوجد P من معطيات النظرية الحركية للغازات المثالية (باعتبار أن طاقة الجسيم هي طاقة حركية)

$$\bar{\varepsilon} = P^2/2m = 3KT/2 \quad \Rightarrow \quad P = \sqrt{3mKT} \quad \Rightarrow \quad \lambda = h/\sqrt{3mKT} \qquad (3)$$

نعوض عن قيمتي (2) و (3) في شرط الحالة الكلاسيكية (1) فنجد:

$$(V/N)^{1/3} >> h/\sqrt{3mKT}$$

تشير العبارة الناتجة إلى إمكانية دراسة الجملة كلاسيكياً إذا تحققت علاقة التراجح. وتحقق التراجح مقترن بصغر عدد الجسيمات (N صغير جدا)ً وهذا يعني أن كثافة الغاز الكلاسيكي N/V تكون صغيرة.
نستنتج مما سبق أن الجملة تدرس كمياً عندما (N كبير جدا)، وبالتالي كثافة عالية.
الصفات العامة للجسيمات الكمية:
غير متمايزة، ومكممة الطاقة والعزم الحركي، وتخضع لمبدأ هايزنبرغ في الشك، وطول موجتها $\psi_{(n,\ell,m,S)}$ المصاحبة يحقق علاقة دي برولي $\lambda = h/P$

١- إحصاء بوزه - آينشتين (*B-E*):

مقدمة: يدرس هذا الإحصاء البوزونات. وهي جسيمات كمية غير متمايزة، وتشمل: الفوتونات (جسيمات الطاقة الضوئية)، والفونونات (جسيمات طاقة المرونة الناتجة عن الحركة الاهتزازية)، والديوترون، وجسيمات ألفا، وبعض الميزونات مثل الميزون π ، وغيرها. تتمتع البوزونات بالمواصفات الخاصة التالية:
١- لها عزم اندفاع (سبين S) إما صفر أو عدد صحيح من $\hbar$. بالشكل $S = n\hbar \;\; ; n = 0,1,2,3,.....$.
٢- لا تخضع لمبدأ باولي في الاستبعاد (يمكن لدرجة التحلل الواحدة أن تحوي على عدد كبير من البوزونات، المتماثلة الأعداد الكمية المعروفة: n, ℓ, m_ℓ, S).
٣- تابع موجة دي برولي المصاحبة للبوزون $\psi_{(n,\ell,m,S)}$ متناظر.
٤- غير متفاعلة مع بعضها البعض.

٥- يرتبط زخمها P بالطاقة E بالعلاقة: $E = C\,P$

٦- جميعها تحقق علاقة التشتت. $\omega = C\,k$، حيث $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$ العدد الموجي (القيمة المطلقة لمتجهة الانتشار).

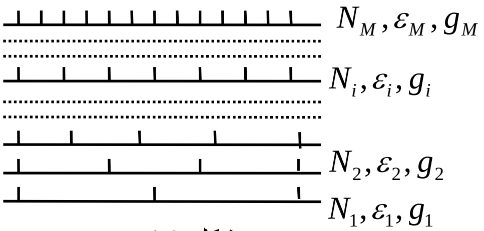
عبارة الوزن الإحصائي لتوزع بوزه - آينشتين **(B-E)**:

نفرض جملة معزولة مكونة من N بوزون، موزعة على ε_i سوية طاقة متحللة، ودرجة تحلل كلٍ منها g_i . تحوي السوية الواحدة على N_i بوزون (ندعوه رقم انشغال السوية). كما هو موضح بالشكل ( ).

يجري التوزع بحيث يتحقق قانوني انحفاظ عدد الجسيمات $N = \sum\limits_i N_i$ وطاقتها $U = \sum\limits_i N_i\,\varepsilon_i$

لإيجاد عدد طرق التوزع الموافقة للحالة الماكروية

$(N_1, N_2, ..., N_i, ..., N_M)$



شكل ( )

بدايةً: من أجل السوية i مثلاً :

نلاحظ أنها تحوي على g_i خلية (حجرة)، يفصل بينها $(g_i - 1)$ حاجز.

فيكون عدد حالات التوزع الميكروي w ، الناتج عن توزيع N_i بوزون على g_i خلية، مساوياً لعدد التباديل المختلفة بين البوزونات والحواجز.

حسب العلاقة: العدد يساوي مجموع المتبادلات إلى جداءاتها. كما يلي:

$$w = \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!}$$

ومن أجل كافة السويات $i \in [1, 2, ...M]$ يصبح عدد حالات التوزع الميكروي مساوياً لمجموع جداءاتها بالشكل:

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{M} w_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{B-E} = \prod_{i=1}^{M} \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!}}$$

من الواضح أن الوزن الإحصائي W مقدار عديم البعد لأنه يعبر عن عدد.

حالة التوازن: هي الحالة الماكروية الموافقة لوزن إحصائي أعظمي $W_{\substack{B-E\\ \max}}$.

مثال: جملة معزولة، مكونة من ثلاث بوزونات. موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = \varepsilon_o$ و $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_o$ ، متحللتين بالشكل: $g_1 = 2$ و $g_2 = 1$. والمطلوب:

١- أوجد حالات التوزع الماكروي الإجمالي، وطاقة كلٍ منها.

٢- أوجد الوزن الإحصائي لكل حالة توزع ماكروي (مع التمثيل). واستنتج حالة التوازن.

الحل: ١- عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي:

$$N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N!(N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(3+2-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

حالات التوزع الماكروي الإجمالي وطاقاتها

$$\left\{ (\overbrace{3,0}^{U=3\varepsilon_o})\ (\overbrace{0,3}^{U=6\varepsilon_o})\ (\overbrace{2,1}^{U=4\varepsilon_o})\ (\overbrace{1,2}^{U=5\varepsilon_o}) \right\}$$

٢- الأوزان الإحصائية للحالات الماكروية (مع التمثيل). بتطبيق

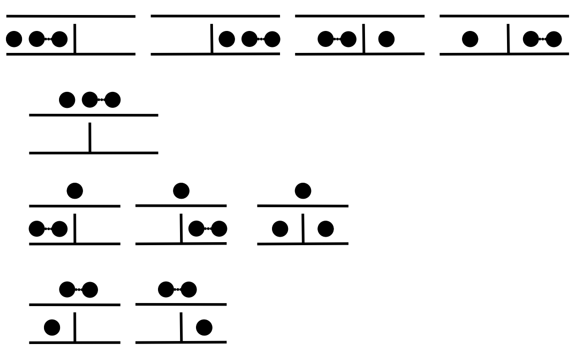
$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{M} \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!}$$

$$W_{(3,0)} = \frac{(3+2-1)!}{3!(2-1)!}\,\frac{(0+1-1)!}{0!(1-1)!} = 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$W_{(0,3)} = \frac{(0+2-1)!}{0!(2-1)!}\,\frac{(3+1-1)!}{3!(1-1)!} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$W_{(2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!(2-1)!}\,\frac{(1+1-1)!}{1!(1-1)!} = 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$W_{(1,2)} = \frac{(1+2-1)!}{1!(2-1)!}\,\frac{(2+1-1)!}{2!(1-1)!} = 2 \quad \Leftrightarrow$$



بما أن الوزن الإحصائي الأعظمي $W_{\max} = 4$ يوافق الحالة الماكروية $(3,0)$ ، فتكون حالة توازن

عبارة أرقام انشغال السويات في الحالة المتوازنة (الأكثر احتمالاً)، أي توزع بوزه - آينشتين (B-E):

من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (B-E). المعطاة بالعلاقة: $W_{B-E}=\prod_i \frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}$

وحيث أن الجسيمات هي بوزونات (كمية) فيكون عددها N_i ودرجة تحلل سويات الطاقة g_i كبيرين، لذا يُهمل الواحد في توزع (B-E) وتصبح عبارة الوزن الإحصائي بالشكل التالي: $W_{B-E}\approx\prod_i \frac{(N_i+g_i)!}{N_i!\,g_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{B-E})$ ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{B-E})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d\,Ln(W_{B-E})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{B-E})\approx Ln\prod_i \frac{(N_i+g_i)!}{N_i!\,g_i!}=\sum_i\left[Ln(N_i+g_i)!-Ln\,N_i!-Ln\,g_i!\right]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنغ $Ln\,x!\approx x\,Ln\,x$ نجد:

$$Ln(W_{B-E})\approx\sum_i\left[(N_i+g_i)\,Ln(N_i+g_i)-N_i\,Ln\,N_i-g_i\,Ln\,g_i\right]$$

بما أن W_{B-E} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d\,Ln(W_{B-E})=\frac{\partial\,Ln(W_{B-E})}{\partial N_i}dN_i\approx\frac{\partial}{\partial N_i}\sum_i\left[(N_i+g_i)\,Ln(N_i+g_i)-N_i\,Ln\,N_i-g_i\,Ln\,g_i\right]dN_i$$

$$\approx\sum_i\left[Ln(N_i+g_i)+\frac{N_i+g_i}{N_i+g_i}-Ln\,N_i-\frac{N_i}{N_i}\right]dN_i=\sum_i\left[Ln(N_i+g_i)-Ln\,N_i\right]dN_i$$

$$d\,Ln(W_{B-E})\approx\sum_i Ln\frac{N_i+g_i}{N_i}\,dN_i$$

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$U=\sum_i\varepsilon_i\,N_i\ \Rightarrow\ dU=\sum_i\varepsilon_i\,dN_i \qquad \text{و} \qquad N=\sum_i N_i\ \Rightarrow\ dN=\sum_i dN_i$$

$$d\,Ln(W_{B-E})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0$$

$$\sum_i\left(Ln\frac{N_i+g_i}{N_i}+\alpha+\beta\,\varepsilon_i\right)dN_i=0\ \Rightarrow Ln\frac{N_i+g_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\,\varepsilon_i)\ \Rightarrow\ \frac{N_i+g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\,\varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\,\varepsilon_i)}-1\ \Rightarrow\ \boxed{N_{\underset{\max}{i(B-E)}}=\frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\,\varepsilon_i)}-1}}$$

وفي الحالة المستمرة يصبح عدد البوزونات التي تملك طاقة في المجال $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$ وفقاً لتوزع بوزه - آينشتين:

$$\boxed{N_{\underset{\max}{(B-E)}}=\frac{g(\varepsilon)}{e^{-(\alpha+\beta\,\varepsilon)}-1}}\quad\Leftrightarrow\quad\boxed{N_{\underset{\max}{(B-E)}}=\int_0^\infty\frac{g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{-(\alpha+\beta\,\varepsilon)}-1}}$$

الكمون الكيميائي والتوابع الترموديناميكية في الجمل المفتوحة:

يمكن النظر إلى الجملة المفتوحة المميزة بدرجة حرارة وحجم ثابتين $(T,V)=cte$ وتتبادل مع الوسط الخارجي الجسيمات، باعتبارها جمل ثابتة عدد الجسيمات لحظياً. لأن العدد اللحظي للجسيمات الداخلة إلى الجملة يساوي عدد الخارجة منها. فإذا فرضنا العدد اللحظي للجسيمات المتبادلة هو N ، ولكلٍ منها طاقة ثابتة $\mu=cte$.

عندئذٍ نجد من المبدأ الثاني في الترموديناميك أن التغير في الطاقة الداخلية للجملة سيزداد بمقدار

$$d(\mu\,N)=\mu\,dN+N\underbrace{d\mu}_{0}=\mu\,dN$$

<u>الطاقة الداخلية:</u> تصبح عبارة الطاقة الداخلية في صيغتها التفاضلية بالشكل التالي:

$$dU=T\,dS-P\underbrace{dV}_{0}+\mu\,dN=T\,dS+\mu\,dN$$

ويمكن كتابة العبارة السابقة بالشكل:

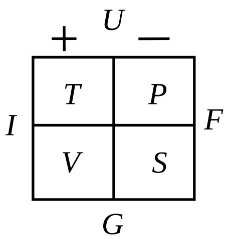
$$U=T\,S-PV+\mu\,N$$

الطاقة الحرة: نجدها من العبارة المعروفة $F = U - T\,S$ وبالتعويض عن U بقيمتها نجد:

$$F = T\,S - PV + \mu N - T\,S = \mu N - PV$$

طاقة جيبس: نجدها من العبارة المعروفة $G = F + PV$ وبالتعويض عن F بقيمتها نجد:

$$G = \mu N - PV + PV = \mu N$$



شكل ( )

يدعى μ الكمون الكيميائي للجملة نظراً لارتباطه بعدد الجسيمات المتبادلة (المولات).
ومن أجل جسيم واحد نحصل على كمون جيبس الترموديناميكي $G = \mu$

الأنتروبية: نجدها من عبارة الطاقة الداخلية: $dU = T\,dS + \mu\,dN$

$$dS = \frac{1}{T}dU - \frac{\mu}{T}dN \qquad (*)$$

مضاريب لاغرانج: من قانون بولتزمان نجد: $S = K\,LnW \;\Rightarrow\; dLnW = dS/K$

بالتعويض في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً $dLnW + \alpha\,dN + \beta\,dU = 0$ نجد:

$$dS + K\alpha\,dN + K\beta\,dU = 0$$

$$dS = -K\beta\,dU - K\alpha\,dN \qquad (**)$$

بمطابقة العبارتين (*) و (**) نجد المضاريب:

$$\boxed{\alpha = \frac{\mu}{KT} \qquad \wp \qquad \beta = -\frac{1}{KT}}$$

مشغولية درجة التحلل:

نعرف مشغولية درجة التحلل بالصيغة $N_g\,(\varepsilon_i) = N_i/g_i$ ، وباعتبار $\alpha = \mu/KT$ و $\beta = -1/KT$ نجد:

$$N_g = \frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} - 1} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/KT} - 1}$$

ولكي تتحقق المشغولية يجب أن يكون $e^{(\varepsilon_i-\mu)/KT} \geq 1$. وكما هو معلوم من خواص التابع النيبري أن:
$e^{x} > 1 \;\; \wp \;\; e^{-x} < 1 \quad ; \; x > 0$. ومنعاً من ظهور الأس السالب حيث لايعود للمشغولية معنى (في الحالة التي يكون فيها $\mu > \varepsilon_i$) نفرض $\boxed{|\mu| < 0}$. فتصبح القيمة المطلقة لمضروب لاغرانج α موجبة $\boxed{|\alpha| = -\mu/KT = \beta\,\mu > 0}$
ونكتب المشغولية بالشكل:

$$N_g = \frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\varepsilon_i/KT}\,e^{-\mu/KT} - 1} = \frac{1}{e^{-\beta\varepsilon_i}\,e^{\alpha} - 1}$$

نناقش عبارة المشغولية N_g باختلاف درجات الحرارة.

- عند درجات الحرارة العالية:

عند الدرجات العالية للحرارة تكون الطاقة الحرارية أكبر بكثير من الكمون الكيميائي $KT >> |\mu|$ وعليه تصبح قيمة التابع النيبري e^{α} مساوية للواحد:

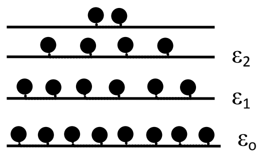
$$e^{\alpha} = e^{-\mu/KT} = 1/e^{\mu/KT} = 1/e^{(\mu/KT)<<1} \approx \left(1/e^{\approx 0}\right) \leq 1 \;\; \Rightarrow e^{\alpha} \approx {}^{+}1$$

أي تتقارب قيمة النيبري من الواحد من جهة اليسار (متزايدة نحو الواحد)، $e^{\alpha} \to {}^{+}1$ ، وكأننا اعتبرنا $\mu \approx 0$
أما بالنسبة للمعامل $e^{-\beta\varepsilon_i} = e^{\varepsilon_i/KT}$: وكما هو معلوم تكتسب الجسيمات عند درجات الحرارة العالية طاقات عالية $\varepsilon_i >> KT$ وتتوضع في سويات الطاقة العليا، ويغدو المعامل $e^{\varepsilon_i/KT} >> 1$ بحيث يمكننا إهمال الواحد الموجود في مقام عبارة المشغولية التي تصبح بالشكل: $N_g \approx \frac{1}{e^{\varepsilon_i/KT}} << 1$ ، مما يعني أن مشغولية سويات الطاقة العليا تبقى أدنى من مشغولية السويات الدنيا.

تحول غاز (بوزه - آينشتين) الكمي إلى غاز (مكسويل - بولتزمان) الكلاسيكي (عند الطاقات العالية):

عند الطاقات العالية تكون قيمة المعامل $e^{\varepsilon_i/KT} >> 1$ حيث يمكننا إهمال الواحد الموجود في مقام عبارة المشغولية.
نكتب عبارة رقم الانشغال بالشكل:

$$N_{\underset{\max}{i(B-E)}} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}-1} \approx \frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}} = g_i\, e^{\alpha+\beta\varepsilon_i} = N_{\underset{\max}{i(M-B)}}$$



توزع (M-B)
شكل ( )

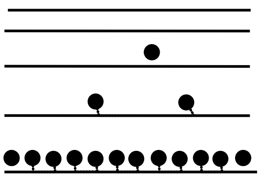
ويتحول في هذه الحالة غاز B - E إلى غاز مكسويل الكلاسيكي كما هو موضح في الشكل ( ).

- عند درجات الحرارة المنخفضة ، تكاثف بوزه - آينشتين:

عند درجات الحرارة المنخفضة تنخفض طاقة جسيمات الجملة ليتوضع معظمها في سويات الطاقة الدنيا، وخصوصاً في السوية الأرضية حيث درجة التحلل $g_i \approx g_o = 1$ ، ويصبح عدد الجسيمات في هذه السوية مساوياً تقريباً للعدد الكلي لجسيمات الجملة $N_i = N_o = \sum_i N_i = N$ ، الأمر الذي يعني زيادة مشغوليتها.

وبما أن هذه السويات ذات طاقات صفرية ($\varepsilon_i \approx 0 \;\Leftrightarrow\; e^{\varepsilon_i/KT} \approx 1$)، نكتب عبارة المشغولية بالشكل التالي:

$$N_g \approx N \approx \frac{1}{e^{-\mu/KT}-1} = \frac{1}{e^{\alpha}-1} \quad\Rightarrow\quad e^{\alpha} = (1+\frac{1}{N}) \geq 1 \quad\Rightarrow\quad e^{\alpha} \approx 1^{+}$$


تكاثف آينشتين
شكل ( )

أي أن قيمة التابع النيبري تتقارب من الواحد من جهة اليمين (متناقصة نحو الواحد)، $e^{\alpha} \to 1^{+}$. وهذا يعني أن $\mu \approx 0$ ، ويصبح رقم انشغال السوية الأرضية لانهائي $N_o \to \infty$
وتفسير ذلك أن معظم جسيمات الجملة تتجمع في السوية الأرضية إلا النذر اليسير منها فتتوزع في السويات الأعلى القريبة. تدعى هذه الظاهرة " تكاثف بوزه - آينشتين "، كما هو موضح في الشكل ( ). وهي خاصة مميزة للبوزونات المثالية تنبأ بها آينشتين.

تطلق على التابع النيبري e^{α} تسمية (الفعالية المطلقة للغاز - Absolute activity) أو Fugacity.

ولسنوات عدة، اعتقد علماء الفيزياء أن هذه الظاهرة محض خيال لأنها غير موجودة في الطبيعة.

وبعد تقدم البحوث العلمية في مجال التبريد بالآزوت السائل، تمكن الباحثون عام 1995 من الحصول على الحالة المكثفة لغاز الروبيديوم عند درجات حرارة قريبة جداً من الصفر المطلق تدعى الدرجة الحرجة للتكاثف $T_B = 1{,}3\times10^{-7}\, k^{o}$. (درجة حرارة آينشتين لتكاثف البوزونات).

وكان لهذا الإنجاز الأثر البالغ في تطور الأبحاث في مجال الفيزياء الذرية نظراً لتطبيقاته الواسعة في كافة الميادين.

ملاحظة:

- من أجل $\boxed{T < T_B}$ نميز في الغاز الذي تنخفض درجة حرارته دون درجة التكاثف $T < T_B$ وجود طورين:

١- الطور الغازي: ويتمثل بعدد محدود من البوزونات غير المتكثفة N_E (المتوضعة في السويات العليا القريبة).
وتكون مساهمتها في رفع الطاقة الداخلية U والسعة الحرارية C_V للجملة شبه معدومة.

٢- الطور المتكثف: ويمثل الغالبية العظمى للبوزونات (المتكثفة) $N_o = N - N_E$ (المتوضعة في السوية الأرضية).
وهي لا تسهم في رفع U و C_V للجملة لأن $\varepsilon_o = 0$

- أما من أجل $\boxed{T > T_B}$ فتحدث هجرة للبوزونات من السوية الأرضية باتجاه السويات العليا وبكثافات عالية. أي تكون معظم البوزونات في الحالة المثارة أي: $N \approx N_E$ ، ويكون لها إسهام في رفع الطاقة الداخلية والسعة الحرارية للجملة.
وتبقى نسبة ضئيلة من البوزونات في السوية الأرضية $N_o << (N_E \approx N)$ ذات المساهمة المعدومة في رفع U.

علاقات رياضية هامة:

<u>تابع زيتا (Zeta Function):</u> يعرف بالشكل التالي: $\zeta(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$

ويأخذ القيم التالية:

q	1	2	3	4	3/2	5/2	7/2	9/2
$\zeta(q)$	∞	$\pi^2/6 = 1{,}645$	1,202	$\pi^4/90 = 1{,}082$	2,612	1,341	1,127	1,055

<u>التكامل ذو النتيجته المرتبطة بتابعي غاما وزيتا:</u> $\int_0^{\infty} \frac{x^{q-1}}{e^x - 1}dx = \Gamma(q)\,\zeta(q) \qquad ;\; q > 1$

العدد النسبي للبوزونات المثارة وغير المثارة عند درجات الحرارة العالية:

عند درجات الحرارة العالية $T > T_B$: تكون معظم البوزونات البالغ عددها N_E في الحالة المثارة، وعدد قليل جداً منها N_o في السوية الأرضية. أي $N_E >> N_o$ و $N = N_E + N_o$. أي يمكننا اعتبار $N \approx N_E$

لإيجاد عدد البوزونات المثارة N_E (الموزعة على سويات الطاقة فوق الأرضية) نستخدم عبارة رقم الانشغال (في الحالة الأكثر احتمال)، (بعد إهمال N_o لأنه رقم صغير جداً عند $T > T_B$ في حين لا يجوز إهماله عند $T \le T_B$)

$$N_E = \sum_i N_{i(B-E)\,\max} = \sum_i \frac{g_i}{e^{-\alpha-\beta\varepsilon_i} - 1}$$

وبالانتقال من عبارة المجموع $\sum$ إلى التكامل $\int$، واعتبار $e^{-\alpha} = 1$، والاستفادة من علاقة درجة التحلل $g(\varepsilon)$ بعنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma(\varepsilon)$ التالية: $g(\varepsilon)\,d\varepsilon = C\,d\Gamma(\varepsilon) = CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$ نكتب:

$$N_E = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\alpha-\beta\varepsilon_i} - 1} = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\alpha}e^{-\beta\varepsilon_i} - 1} = V\,2\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon}{e^{\varepsilon/KT} - 1} \quad ; \; C = \frac{1}{h^3}$$

لحل التكامل نفرض $x = \varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT\,x \;\Rightarrow\; d\varepsilon = KT\,dx \qquad \text{و} \qquad \varepsilon^{1/2} = (KT)^{1/2}x^{1/2}$$

بالتعويض في عبارة التكامل والضرب والقسمة على $\sqrt{\pi}$:

$$N_E = V\,2\pi\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}(KT)^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}\,dx}{e^x - 1} = V\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2\pi mKT}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}\,dx}{e^x - 1}$$

وبملاحظة أن قيمة التكامل $\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x - 1}dx = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}-1}}{e^x - 1}dx = \Gamma(\frac{3}{2})\zeta(\frac{3}{2}) = 1{,}306\sqrt{\pi}$ نجد بالتعويض:

$$\boxed{N_E = 2{,}612V\left(\frac{2\pi mKT}{h^2}\right)^{3/2}} \qquad (1)$$

فيكون عدد البوزونات غير المثارة N_o الموجودة أصلاً في السوية الأرضية:

$$\boxed{N_o = N - N_E} \qquad (2)$$

أما عند درجات الحرارة المنخفضة $T \le T_B$: فيحدث تكاثف للبوزونات المثارة، وتهبط جميعها لتستقر النسبة العظمى منها في السوية الأرضية، إلا النذر اليسير الذي نعتبره مهملاً $N_E \approx 0$ فيهبط ليستقر في السويات الأعلى القريبة من الأرضية، أي نعتبر عدد البوزونات المثارة شبه معدوم $N_E \approx 0$.

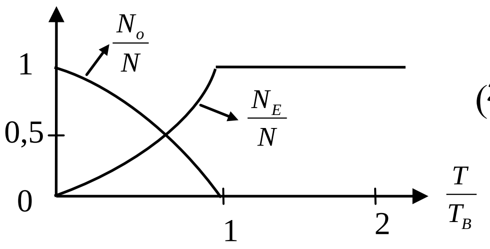
أما العدد الإجمالي فهو حقيقةً الموجود في السوية الأرضية $N = N_o + N_E \approx N_o$.

نحصل على عبارة العدد الإجمالي للبوزونات المتكثفة بالتعويض عن T بـ T_B، وعن N_E بـ N، في (1) فنجد:

$$\boxed{N = 2{,}612V\left(\frac{2\pi mKT_B}{h^2}\right)^{3/2}} \qquad (3)$$

لمعرفة نسبة عدد البوزونات المثارة إلى العدد الكلي بدلالة درجة الحرارة نقسم (1) على (3) فنجد:

$$\boxed{\frac{N_E}{N} = \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}} \qquad (4)$$



شكل ( )

أما نسبة عدد البوزونات غير المثارة N_o (الموجودة أصلاً في السوية الأرضية) إلى العدد الكلي N بدلالة درجة الحرارة فنجده بتعويض (4) في (2) كما يلي:

$$\frac{N_o}{N} = 1 - \frac{N_E}{N} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{N_o}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}} \qquad (5)$$

يمكن تمثيل العلاقتين (4) و (5) بيانياً كما في الشكل ( ).

ملاحظة: تتحول كافة الغازات الحقيقية عند تبريدها إلى الحالة السائلة، وذلك قبل بلوغها درجة التكاثف T_B.
لذا يتم التبريد بتطبيق ضغوط مرتفعة منعاً من تمييعها و البقاء في الحالة الغازية.

درجة الحرارة الحرجة T_B:

لمعرفة درجة الحرارة الحرجة T_B التي يبدأ عندها التكاثف،
بدلالة N و V، يمكننا كتابة (3) بالشكل التالي:

$$\left(\frac{N}{2{,}612V}\right)^{2/3} = \frac{2\pi\, m\, KT_B}{h^2} \Rightarrow \boxed{T_B = \frac{h^2}{2\pi\, m\, K}\left(\frac{N}{2{,}612V}\right)^{2/3}} \qquad (6)$$

مثال: احسب درجة حرارة تكاثف مول واحد من غاز الهليوم ^4He تحت الضغط الجوي النظامي. علماً أن:
$N = N_A = 6{,}02\times10^{23}\ Atom/mol$ و $m_{He} = 4m_p = 4\times1{,}66\times10^{-27} = 6{,}65\times10^{-27}\ Kg$ ،
وحجم المول $V_{He} = 22{,}4\times10^{-3}m^3$ ، وثابتة بلانك $h = 6{,}63\times10^{-34}\ J\ S$ ، وثابتة بولتزمان $K = 1{,}38\times10^{-23}\ J/k^o$

الحل: نطبق العلاقة:

$$T_B = \frac{h^2}{2\pi\, m\, K}\left(\frac{N}{2{,}612V}\right)^{2/3} = \frac{(6{,}63\times10^{-34}\ J\ S)^2}{2\pi\times6{,}65\times10^{-27}\ Kg\times1{,}38\times10^{-23}\ J/k^o}\left(\frac{6{,}02\times10^{23}\ Atom/mol}{2{,}612\times22{,}4\times10^{-3}m^3}\right)^{2/3} = 0{,}036\, k^o$$

لا تتوافق القيمة المحسوبة مع القيمة التجريبية البالغة $T_B = 4{,}21k^o$

مثال: احسب درجة حرارة تكاثف مول واحد من غاز الهيدروجين H_2 تحت الضغط الجوي النظامي. قارن النتيجة مع القيمة التجريبية البالغة $T_B = 14k^o$

خواص غاز البوزون المثالي (غاز B - E) عند درجات حرارة مختلفة:

١- حساب الطاقة الداخلية:

- من أجل $\boxed{T > T_B}$: وجدنا في هذه الحالة تحول غاز B - E إلى غاز مكسويل الكلاسيكي $N_{\underset{\max}{i(B-E)}} \approx N_{\underset{\max}{i(M-B)}}$

وتكون الطاقة الداخلية لغاز البوزون مساوية للطاقة الداخلية للغاز الكلاسيكي بحيث يتحقق قانون ديلونج و بتي:

$$\boxed{U_{\max} = \frac{3}{2}NKT = U_{Clas}}$$

- من أجل $\boxed{T \le T_B}$: يحصل تكاثف للبوزونات نعتبر فيه $\mu \approx 0$. فتكون الطاقة الداخلية للجملة:

$$U_{\min} = N\,\varepsilon = \int_0^\infty \frac{\varepsilon\, g(\varepsilon)\, d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/KT}-1} \qquad ; g(\varepsilon)\, d\varepsilon = C\, d\Gamma(\varepsilon) = V\, 2\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}(\varepsilon)^{1/2}\, d\varepsilon$$

$$U_{\min} = V\, 2\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}\, d\varepsilon}{e^{\varepsilon/KT}-1}$$

لحل التكامل نفرض $x = \varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT\, x \Rightarrow d\varepsilon = KT\, dx \qquad \wp \qquad \varepsilon^{3/2} = (KT)^{3/2}x^{3/2}$$

بالتعويض في عبارة التكامل والضرب والقسمة على $\sqrt{\pi}$:

$$U_{\min} = V\, 2\pi\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}(KT)^{3/2}KT\int_0^\infty \frac{x^{3/2}\, dx}{e^x-1} = V\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2\pi\, m\, KT}{h^2}\right)^{3/2}KT\int_0^\infty \frac{x^{3/2}\, dx}{e^x-1}$$

وبملاحظة أن قيمة التكامل $\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x-1}dx = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{5}{2}-1}}{e^x-1}dx = \Gamma(\frac{5}{2})\zeta(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}1{,}341$ نجد بالتعويض:

$$U_{\min} \approx 2V\left(\frac{2\pi\, m\, KT}{h^2}\right)^{3/2}KT$$

نوجد قيمة V من (3) بالشكل التالي:

$$N = 2{,}612V\left(\frac{2\pi mKT_B}{h^2}\right)^{3/2} \Rightarrow V = \frac{N}{2{,}612}\left(\frac{2\pi mKT_B}{h^2}\right)^{-3/2} = \frac{N}{2{,}612}\left(\frac{h^2}{2\pi mKT_B}\right)^{3/2}$$

بالتعويض عن V بقيمتها نجد:

$$U_{\min} \approx 2\frac{N}{2{,}612}\left(\frac{h^2}{2\pi mKT_B}\right)^{3/2}\left(\frac{2\pi mKT}{h^2}\right)^{3/2}KT \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{\min} \approx 0{,}77\,NKT\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}}$$

وباعتبار $T_B = cte$ (قيمة معلومة) نلاحظ أن الطاقة الداخلية متناسبة مع $T^{5/2}$ من أجل $T \le T_B$، بالشكل التالي:

$$\boxed{U_{\min} \approx 0{,}77\,NKT_B^{-3/2}\;T^{5/2}}$$

٢- حساب الحرارة النوعية (السعة الحرارية):

- من أجل $\boxed{T > T_B}$: تتوافق السعة الحرارية للبوزونات مع السعة الحرارية للغاز الكلاسيكي

$$\boxed{C_{V\max} = \left(\frac{\partial U_{\max}}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}NK = C_{V\,Clas}}$$

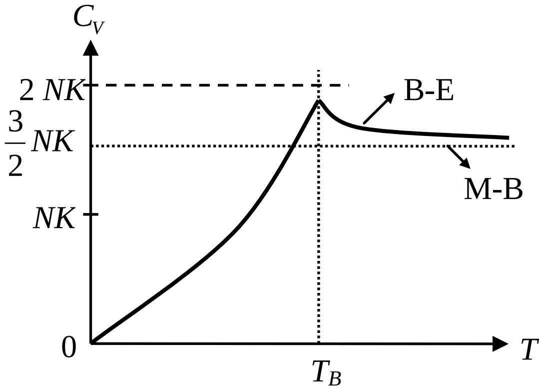
نلاحظ هنا أنه عند الطاقات العالية تكون $C_{V\max}$ غير تابعة لدرجة الحرارة T.

- من أجل $\boxed{T \le T_B}$:

$$C_{V\min} = \left(\frac{\partial U_{\min}}{\partial T}\right)_V \approx \frac{5}{2}\,0{,}77\,NKT_B^{-3/2}T^{3/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_{V\min} = 1{,}92\,NK\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}}$$

نلاحظ هنا أنه عند الطاقات المنخفضة تكون $C_{V\min}$ تابعة لتغيرات درجة الحرارة T .

يوضح الشكل ( ) تمثيل $C_{V\min}$ (السعة الحرارية لغاز البوزون عند الطاقات المختلفة)



شكل ( )

- عند الطاقات المنخفضة: أي في المجال الواقع بجوار T_B نلاحظ أن $C_V = 0$ عندما $T = 0k^o$، وتزداد بازدياد T بشكل يتناسب طرداً مع $T^{3/2}$ إلى أن تصل لقيمتها القصوى $C_V = 1{,}92\,NK$ عندما $T = T_B$.
- وعند الطاقات العالية: أي عندما $T > T_B$ تنخفض قيمة C_V بازدياد T لتأخذ قيمة ثابتة $C_V = \frac{3}{2}NK$، كما هو الحال في الغاز الكلاسيكي الخاضع لتوزع M-B .

٣- حساب الانتروبية:

من المبدأ الأول في الترموديناميك يكون $\delta Q = dU$ ونحسب الأنتروبية من عبارة كلاوزيوس كما يلي:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} = C_V\frac{dT}{T} \qquad ;\ dU = C_V dT$$

وبالمكاملة نحصل على الأنتروبية $S = \int_0^T C_V\frac{dT}{T}$

- عند الطاقات العليا:

$$S_{\max} = \int_0^T C_{V\max}\frac{dT}{T} = \frac{3}{2}NK\,LnT$$

ويتحقق المبدأ الثاني في الترموديناميك (مبدأ تزايد الأنتروبية): $S(T \to T_{\max}) \to S_{\max}$

- عند الطاقات المنخفضة: $S_{\min} = \int_0^T C_{V\min}\frac{dT}{T}$

$$S_{\min}=\int_0^T 1{,}92\,NK\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}\frac{dT}{T}=1{,}92\,NK\,T_B^{\,-3/2}\int_0^T T^{\,1/2}dT=1{,}92\,NK\,T_B^{\,-3/2}\,\frac{2}{3}T^{\,3/2}=1{,}28\,NK\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}$$

تحقق الأنتروبية المبدأ الثالث في الترموديناميك $S(T\to 0\,K^o)\to 0$

٤- حساب الطاقة الحرة (تابع هلمهولتز):

نوجد F من العبارة $F=U-T\,S$

- عند الطاقات العالية $U_{\max}$: $F_{\max}=U_{\max}-T\,S_{\max}$

$$F_{\max}=\frac{3}{2}NKT-\frac{3}{2}NKT\,LnT=\frac{3}{2}NKT\,(1-LnT)$$

- عند الطاقات المنخفضة $U_{\min}$: $F_{\min}=U_{\min}-T\,S_{\min}$

$$F_{\min}=0{,}77\,NKT\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}-1{,}28\,NKT\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}=-0{,}51\,NKT\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}$$

٥- حساب الضغط:

نحسب الضغط عند الطاقات المنخفضة من العلاقة $P=-\left(\frac{\partial F_{\min}}{\partial V}\right)_T$ لذا نضع عبارة $F_{\min}$ بدلالة الحجم V

عبر التعويض عن T_B بقيمتها حيث: $T_B=\frac{h^2}{2\pi\,m\,K}\left(\frac{N}{2{,}612\,V}\right)^{2/3}\Rightarrow T_B^{\,3/2}=\frac{N}{2{,}612\,V}\left(\frac{h^2}{2\pi\,m\,K}\right)^{3/2}$ نجد:

$$F_{\min}=-0{,}51\,NKT\left(\frac{2\pi\,m\,KT}{h^2}\right)^{3/2}\frac{2{,}612\,V}{N}=-1{,}33KT\left(\frac{2\pi\,m\,KT}{h^2}\right)^{3/2}V$$

$$\boxed{P=-\left(\frac{\partial F_{\min}}{\partial V}\right)_T=1{,}33KT\left(\frac{2\pi\,m\,KT}{h^2}\right)^{3/2}}$$

تشير العبارة الحاصلة إلى كون الضغط متناسب مع $T^{\,5/2}$ وليس مع الحجم، وأن ضغط جملة البوزونات عند درجة الصفر المطلق يصبح معدوم. وبما أن الضغط ينتج عن كمية الحركة المنقولة من الجسيمات المتحركة بسرعة معينة إلى جدران الوعاء الذي يحويها، نستنتج أن كمية حركة غاز البوزون المثالي وبالتالي سرعته تكون معدومة عند درجة الصفر المطلق.

تمرين: برهن أنه عند الطاقات المنخفضة يكون $PV=\frac{2}{3}U_{\min}$

الحل: نوجد قيمة الطرف الأيمن $U_{\min}\approx 0{,}77\,NKT\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}$ بالتعويض عن T_B بقيمتها حيث:

$T_B=\frac{h^2}{2\pi\,m\,K}\left(\frac{N}{2{,}612\,V}\right)^{2/3}\Rightarrow T_B^{\,3/2}=\frac{N}{2{,}612\,V}\left(\frac{h^2}{2\pi\,m\,K}\right)^{3/2}$ فنجد:

$$U_{\min}\approx 0{,}77\,NKT\left(\frac{2\pi\,m\,KT}{h^2}\right)^{3/2}\frac{2{,}612V}{N}\approx 2KT\left(\frac{2\pi\,m\,KT}{h^2}\right)^{3/2}V$$

$$\Rightarrow\frac{2}{3}U_{\min}\approx 1{,}33KT\left(\frac{2\pi\,m\,KT}{h^2}\right)^{3/2}V=PV$$

وهذا ينسجم مع معطيات النظرية الحركية للغازات المثالية

تطبيقات إحصاء (B - E):

الغاز الفوتوني وتفسير إشعاع الجسم الأسود:

الفوتونات هي جسيمات الطاقة الكهرطيسية (الإشعاع الكهرطيسي)، وهي تنتمي لطائفة البوزونات، وعددها داخل تجويف الجسم الأسود غير ثابت وذلك بسبب ظاهرتي الخلق Creation والإفناء Annihilation. أي:

$$N=\sum_i N_i \neq cte \quad \Rightarrow \quad dN \neq 0$$

فنجد من شرط الحالة الأكثر احتمالاً: $d\,Ln(W_{B-E})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0$ أن $\alpha=0$. وبالتالي يكون: $e^{-\alpha}=1$

ويصبح عدد الفوتونات التي تملك طاقة في المجال $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$ وفقاً لتوزع بوزه - آينشتين:

$$dN_{(B-E)}=\frac{dg\,(\varepsilon)}{e^{-\alpha}e^{\varepsilon/kT}-1}=\frac{dg\,(\varepsilon)}{e^{\varepsilon/kT}-1} \qquad \text{(a)}$$

نكتب درجة التحلل $dg\,(\varepsilon)$ للسويات الواقعة في المجال $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$ بدلالة عنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma$ من العبارة

$$dg\,(\varepsilon)=c\,d\Gamma(\varepsilon) \qquad ;\ c=1/h^3 \qquad \wp \qquad d\Gamma(\varepsilon)=dq_V\,dp_V=V\,d\,(\frac{4}{3}\pi\,p^3)=V\,4\pi\,p^2dp$$

$$dg\,(\varepsilon)=\frac{V\,4\pi\,p^2dp}{h^3} \qquad (*)$$

وبما أن الفوتونات أشعة كهرطيسية فهي تملك اتجاهين مستقلين للاستقطاب، ويحصل تضاعف لقيمة درجة التحلل.
وحيث أن طاقة الفوتون ε مرتبطة بزخمه p بواسطة سرعة الضوء c وفق العلاقة:

$$\varepsilon=c\,p \ \Rightarrow p=\frac{\varepsilon}{c} \ \Rightarrow dp=\frac{d\varepsilon}{c}$$

فنجد بالتعويض في (*) :

$$dg\,(\varepsilon)=2\ \frac{V\,4\pi\,\varepsilon^2 d\varepsilon}{h^3c^3} \qquad (**)$$

نعوض (**) في (a) فنجد:

$$dN_{(B-E)}=\frac{V\,8\pi\,\varepsilon^2}{h^3c^3}\frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1} \qquad \text{(b)}$$

وبما أن طاقة الجملة في الحالة المستمرة

$$U=\int\varepsilon\,dN \ \Rightarrow\ dU=\varepsilon\,dN_{(B-E)} \qquad \text{(c)}$$

نعوض (b) في (c) فنجد:

$$dU=\frac{V\,8\pi\,\varepsilon^3}{h^3c^3}\frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1}$$

نحصل على كثافة الطاقة في وحدة الحجوم $(V=1)$ بالشكل:

$$du=\frac{dU}{V}=\frac{8\pi\,\varepsilon^3}{h^3c^3}\frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1}=\rho(\varepsilon)\,d\varepsilon \qquad \text{(d)}$$

يمثل $\rho(\varepsilon)$ كثافة طيف طاقة الإشعاع الصادر عن الجسم الأسود وفقاً لتفسير ماكس بلانك.
(علاقة ماكس بلانك في الإشعاع)

$$\boxed{\rho(\varepsilon)=\frac{8\pi\,\varepsilon^3}{h^3c^3}\frac{1}{e^{\varepsilon/kT}-1}} \qquad \text{(E)}$$

- نكتب عبارة الكثافة $\rho(\varepsilon)$ بدلالة التردد ν، باستخدام علاقة ماكس بلانك: $\varepsilon=h\nu \ \Rightarrow\ d\varepsilon=h\,d\nu$

$$\boxed{\rho(\nu)=\frac{8\pi\,h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}} \qquad \text{(F)}$$

- نكتب عبارة الكثافة $\rho(\nu)$ بدلالة طول الموجة λ، باستخدام العلاقة: $\nu=c/\lambda \quad \Rightarrow \quad |d\nu|=\left(c/\lambda^2\right)d\lambda$

$$\boxed{\rho(\lambda)=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}} \qquad \text{(G)}$$

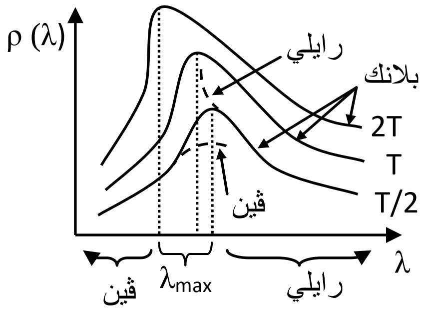
- المناقشة:

١- نحصل على علاقة (رايلي - جينز) في مجال الطاقات المنخفضة $h\nu << kT$ ، حيث يؤول التابع النيبري في (F) إلى الشكل: $e^{h\nu/kT}\approx 1+\frac{h\nu}{kT}$ وتصبح عبارة الكثافة الطيفية لطاقة الإشعاع بالشكل:

$$\rho(\nu)=\frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2$$

٢- نحصل على علاقة (ڤين) في مجال الطاقات العالية $h\nu >> kT$ ، حيث يكون $e^{h\nu/kT}>>1$ ويمكن إهمال الواحد في مقام العلاقة (F). وتصبح عبارة كثافة الطاقة الطيفية لإشعاع الجسم الأسود بالشكل:

$$\rho(\nu)=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}e^{-h\nu/kT}$$



- نمثل بيانياً عبارة بلانك (G) لكثافة الطاقة الطيفية لإشعاع الجسم الأسود بدلالة طول الموجة λ كما هو موضح بالشكل ( ).

ونستنتج مايلي:

- لا تتعلق كثافة الإشعاع بكتلة الجسم m.
- يتحقق قانون ڤين في الإزاحة

$$\boxed{\lambda_{\max}T=cte=2{,}897\times10^{-3}\,mk^o}$$

مثال: بمعرفة الطول الموجي $C=14\times10^{-6}\,m$ الموافق لكثافة الإشعاع القصوى الصادر عن سطح القمر نجد أن درجة حرارة سطح القمر : $T\approx 207k^o\approx -66C^o$

- تنزاح القيمة العظمى للأطوال الموجية بارتفاع درجات الحرارة نحو الأطوال الموجية القصيرة (الطاقات العالية).

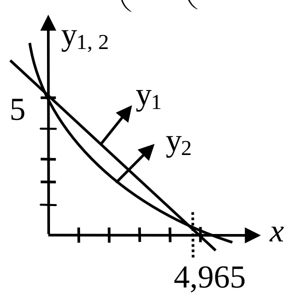
- استنتاج قانون ڤين في الإزاحة:

لاشتقاق قانون ڤين في الإزاحة من عبارة بلانك، نوجد النهاية الحدية لتابع الكثافة الطيفية لـ ماكس – بلانك $(\rho_\lambda)_{\max}$ (المعطى بدلالة الطول الموجي (G)) وذلك باشتقاقه بالنسبة لـ λ وإعدام المشتق كما يلي:

$$(\rho_\lambda)_{\max}\Leftrightarrow\frac{\partial\rho_\lambda(T)}{\partial\lambda}=0 \qquad ;\rho_\lambda(T)=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}}-1}$$

$$-\frac{5\lambda^4(8\pi hc)}{\lambda^{10}}\left(\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}}-1}\right)+\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\left(-\frac{-\frac{hcKT}{\lambda^2K^2T^2}e^{\frac{hc}{\lambda KT}}}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda KT}}-1\right)^2}\right)=0$$

$$\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\left(-\frac{-\frac{hcKT}{\lambda^2K^2T^2}e^{\frac{hc}{\lambda KT}}}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda KT}}-1\right)^2}\right)=\frac{5}{\lambda}\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\left(\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}}-1}\right)\Rightarrow\frac{hc}{\lambda^2KT}\frac{e^{\frac{hc}{\lambda KT}}}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}}-1}=\frac{5}{\lambda}\Rightarrow\frac{hc}{\lambda KT}\frac{e^{\frac{hc}{\lambda KT}}}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}}-1}=5$$



نفرض $x=\frac{hc}{\lambda KT}$ وبالتعويض نجد العلاقة التالية: $x\frac{e^x}{e^x-1}=5$

فنجد: $5e^x-5=xe^x$ وبالقسمة على e^x نجد: $5-5e^{-x}=x$

أو بالشكل $5-x=5e^{-x}$ و هذا يعني أن المساواة محققة عند نقاط تقاطع التابعين $y_1=5-x$ و $y_2=5e^{-x}$ التي نجدها بيانياً كما بالشكل.

وهي محققة عندما $x=0$ و $x=4{,}965$.

وبالتعويض في الفرض من أجل القيمة اللاصفرية $x = 4,965$ عند $\lambda_{\max}$

$$\frac{hc}{\lambda_{\max} KT} = 4,965 \Rightarrow \lambda_{\max} T = \frac{hc}{4,965 K} = \frac{6,63\times10^{-34}\ JS \times 3\times10^{8}\ m/S}{4,965\times1,38\times10^{-23}\ J/k^{o}} = 2,897\times10^{-3}\ m\,k^{o}$$

ومنه نحصل على قانون ڤين في الإزاحة التالي: $\boxed{\lambda_{\max} T = 2,897\times10^{-3}\ m\,k^{o}}$

<u>حساب كثافة طاقة الإشعاع (قانون ستيفان - بولتزمان):</u>

نوجد كثافة طاقة الإشعاع الكهرطيسي في وحدة الحجوم بمكاملة تابع الكثافة الطيفي لـ بلانك.

$$u = \int_0^{\infty} du = \int_0^{\infty} \rho(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

نحل التكامل بإجراء تغيير في المتحول. لذا نفرض:

$$x = \frac{h\nu}{KT} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{KT}{h} x \quad \Rightarrow \quad d\nu = \frac{KT}{h} dx$$

$$u = \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{KT}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

وبملاحظة أن قيمة التكامل $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x-1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{4-1}}{e^x-1} dx = \Gamma(4)\zeta(4) = 6\,\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}$ نجد بالتعويض:

$$u = \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{KT}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{15} = \frac{8\pi^5 K^4}{15\, h^3 c^3} T^4 = aT^4 \qquad ; \; a = \frac{8\pi^5 K^4}{15\, h^3 c^3}$$

ومن أجل الحجم V نجد $U = aVT^4$

تعبر الصيغة $u = aT^4$ عن قانون ستيفان للمساحة الذي ينص على أن " كثافة الطاقة الإشعاعية الكلية الصادرة عن وحدة الحجوم من الجسم الأسود تساوي المساحة المحصورة بين المنحني المحدد بدرجة الحرارة $T\,(k^o)$ ومحور الطول الموجي λ ".

نستنتج أن كثافة طاقة الإشعاع الكهرطيسي في وحدة الحجوم متناسبة مع الأس الرابع لدرجة الحرارة. وتأخذ ثابتة التناسب القيمة

$$a = \frac{8\pi^5 K^4}{15\, h^3 c^3} = \frac{8\,(3,14)^5 (1,38\times10^{-23}\ J/k^o)^4}{15\ (6,63\times10^{-34}\ J\,S)^3 (3\times10^8\ m/S)^3} = 7,57\times10^{-16}\ J/m^3k^4$$

<u>السعة الحرارية (الحرارة النوعية) لوحدة الحجوم من الجسم الأسود:</u> يمكن حسابها من العلاقة:

$$C_V = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V = 4aT^3$$

وهي تشبه علاقة ديباي في الأجسام الصلبة، حيث تؤول C_V للصفر عندما تنتهي درجة الحرارة للصفر المطلق.

<u>ثابتة ستيفان - بولتزمان:</u>

نعرف الانبعاثية الإشعاعية R_E (Radiation emittance) بأنها كمية الطاقة المنبعثة من وحدة السطوح لجسم تام السواد في الثانية الواحدة.

ترتبط الانبعاثية الإشعاعية R_E بكثافة طاقة الإشعاع الكهرطيسي في وحدة الحجوم u بواسطة ثابتة ستيفان – بولتزمان σ بالعلاقة:

$$R_E = \frac{c}{4} u = \frac{c\,a}{4} T^4 = \sigma\, T^4 \;\; \left(\frac{W}{m^2 k^4} k^4\right) \quad Or \quad \frac{J}{m^2\, S}$$

حيث

$$\sigma = \frac{c\,a}{4} = \frac{2\pi^5 K^4}{15\, h^3 c^2} = 5,67\times10^{-8}\ W/m^2k^4$$

أي أن الانبعاثية الإشعاعية R_E متناسبة مع الأس الرابع لدرجة الحرارة وثابتة التناسب هي σ .

ملاحظة: تنفرد الفوتونات من بين البوزونات المعروفة بعدم تكاثفها - بانخفاض درجة الحرارة - لأن عددها غير ثابت وظاهرة التكاثف تخص البوزونات ثابتة العدد فقط.

تمرين: برهن أن صيغة تابع تحاصص طاقم الفوتونات هي: $Z_{\Omega(ph)} = Z_{ph}^{N} = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-e^{\beta \varepsilon_{ph}}}$

- استنتج صيغة التابع في الحالة $\hbar\omega << KT$

الحل: يُعتبر الفوتون جسيم الطاقة الضوئية $\varepsilon_{ph} = n\hbar\omega$ وهو عديم الكتلة وينتمي لطائفة البوزونات (لا يخضع لمبدأ باولي ويمكن لسوية الطاقة الواحدة أن تكون مملوءة بالفوتونات) أي أن درجة تحلل سويات الطاقة الفوتونية تساوي الواحد $g_n = 1$. عموماً يمكن اعتبار الفوتون بمثابة نمط اهتزاز بتواتر محدد. فمن أجل فوتون واحد نجد

$$Z_{ph} = \sum_{n=0}^{N} g_n e^{\beta \varepsilon_{ph}} = \sum_{n=0}^{N} e^{-n\frac{\hbar\omega}{KT}} = 1 + e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}} + e^{-2\frac{\hbar\omega}{KT}} + ...$$

نطبق قانون مجموع سلسلة هندسية أساسها $e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}} < 1$ لأن $0 < \frac{\hbar\omega}{KT} < 1$ وحدها الأول واحد بالشكل:

$$Z_{ph} = 1\frac{1-\overbrace{(e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}})^{N}}^{\approx 0}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}}} \approx \frac{1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}}} = \frac{1}{1-e^{\beta \varepsilon_{ph}}}$$

ومن أجل N فوتون نحصل على صيغة تابع تحاصص طاقم الفوتونات بالشكل

$$Z_{\Omega(ph)} = Z_{ph}^{N} = \underbrace{\frac{1}{1-e^{\beta \varepsilon_{ph}}} \frac{1}{1-e^{\beta \varepsilon_{ph}}} .... \frac{1}{1-e^{\beta \varepsilon_{ph}}}}_{N \text{ مرة}} = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-e^{\beta \varepsilon_{ph}}}$$

- وفي الحالة $\hbar\omega << KT$ أي عندما $0 < \frac{\hbar\omega}{KT} << 1$ يمكن كتابة النتيجة بالشكل

$$Z_{\Omega(ph)} = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-e^{-\hbar\omega/KT}} \approx \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-(1-\frac{\hbar\omega}{KT})} = \prod_{n=1}^{N} \frac{KT}{\hbar\omega} = \prod_{n=1}^{N} \frac{T}{\theta_n}$$

حيث $\theta_n = \frac{\hbar\omega}{K}$ درجة الحرارة المميزة للحركات الاهتزازية

الغاز الفونوني والسعة الحرارية في الأجسام الصلبة:

الفونونات هي كمات طاقة الأمواج المرنة المنتشرة في الشبكة البلورية للأجسام الصلبة، وتتسبب في اهتزاز ذرات الشبكة حول مواضع اتزانها. وبالتالي فهي تشبه فوتونات طاقة الأمواج الكهرطيسية باعتبارها مقاديرها مكمة $\varepsilon_{ph} = n\hbar\omega$، لكنها تختلف عن الفوتونات من حيث أنها تتبادل التأثير فيما بينها، لذا تدعى أشباه جسيمات *quasi-particles*.

تتفق الفونونات والفوتونات (باعتبارهما بوزونات) بأن الكمون الكيميائي لهما معدوم $\mu = 0$ وبالتالي مضروب لاغرانج كذلك الأمر $\alpha = 0$، لأن عدد كلٍ منهما في جملته غير ثابت.

تشير نتائج الترموديناميك الكلاسيكي إلى ثبات السعة الحرارية في الأجسام الصلبة (قانون دولونغ وبتي $C_V = 3R$) بخلاف المبدأ الثالث في الترموديناميك $C_V(T \to 0k^o) \to 0$ أي أن الطاقة غير موزعة بالتساوي على درجات الحرارة المختلفة. لحل هذا التناقض تقدم آينشتين بالتفسير التالي:

تفسير آينشتين:

افترض آينشتين (اعتماداً على مفاهيم النظرية الكوانتية) أن ذرات الشبكة البلورية عبارة عن هزازات مرونة توافقية بسيطة، ومستقلة، وتهتز في الأبعاد الثلاثة حول مواضع اتزانها فتصدر عنها أمواج مرنة بتردد ثابت.

تعطى طاقة الهزاز الكوانتي بالصيغة

$$\varepsilon_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

أي أن للهزاز طاقة $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ في السوية الأرضية $n=0$ عند درجة الصفر المطلق $T = 0\ k^o$

يعطى تابع تحاص سويات الطاقة غير المتحللة للفونونات بصيغته المعروفة

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{g_n}_{1} e^{\beta\varepsilon_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta(n+\frac{1}{2})\hbar\omega} = e^{\beta\frac{\hbar\omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta n\hbar\omega} = e^{-\frac{\hbar\omega}{2KT}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{KT}} = e^{-\frac{\theta_E}{2T}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\frac{\theta_E}{T}}$$

حيث افترضنا درجة حرارة آينشتين $\theta_E = \frac{\hbar\omega}{K}$ مقدار ثابت، وبكتابة المجموع نجد

$$Z = e^{-\frac{\theta_E}{2T}} (1 + e^{-\frac{\theta_E}{T}} + e^{-2\frac{\theta_E}{T}} + e^{-3\frac{\theta_E}{T}} + ...)$$

السلسلة هندسية حدها الأول واحد وأساسها $e^{-\frac{\theta_E}{T}} < 1$ فيكون مجموعها $S = 1\frac{1-\overbrace{(e^{-\frac{\theta_E}{T}})^n}^{0}}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}} \approx \frac{1}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}}$ وبالتعويض

$$Z = \frac{e^{-\frac{\theta_E}{2T}}}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}}$$

نحسب الطاقة الوسطى للفونون (من أجل درجة حرية واحدة) من العلاقة $\bar{\varepsilon} = KT^2\left(\frac{\partial Ln Z}{\partial T}\right)_V$ لذا نوجد $Ln Z$

$$Ln Z = -\frac{\theta_E}{2T} - Ln[1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}}]$$

$$\frac{\partial Ln Z}{\partial T} = -(\frac{0-2\theta_E}{4T^2}) - \frac{[0-(-\frac{0-\theta_E}{T^2})e^{-\frac{\theta_E}{T}}]}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}} = \frac{\theta_E}{2T^2} + \frac{\theta_E\, e^{-\frac{\theta_E}{T}}}{T^2(1-e^{-\frac{\theta_E}{T}})}$$

بالتعويض في عبارة الطاقة الوسطى للفونون

$$\bar{\varepsilon} = \frac{K\theta_E}{2} + \frac{K\theta_E\ e^{-\frac{\theta_E}{T}}}{1-e^{-\frac{\theta_E}{T}}} \quad \Rightarrow \quad \bar{\varepsilon} = K\theta_E\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1}) \qquad (1)$$

نحسب الطاقة الداخلية لمول واحد من الفونونات N_A وبثلاث درجات حرية لكل فونون (مع اعتبار $R = N_A K$) نجد

$$U = 3N_A\,\bar{\varepsilon} = 3N_A\,K\theta_E\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1}) \Rightarrow \qquad U = 3R\,\theta_E\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1}) \qquad (2)$$

نحسب السعة الحرارية من العلاقة

$$C_V = (\frac{\partial U}{\partial T})_V = 3R\,\theta_E\,[0 + \frac{0-(\frac{0-\theta_E}{T^2}e^{\frac{\theta_E}{T}})}{(e^{\frac{\theta_E}{T}}-1)^2}] \Rightarrow \qquad \boxed{C_V = 3R(\frac{\theta_E}{T})^2 \frac{e^{\frac{\theta_E}{T}}}{(e^{\frac{\theta_E}{T}}-1)^2}} \qquad (3)$$

<u>المناقشة:</u>

أولاً: عند درجات الحرارة العالية (أكبر بكثير من درجة آينشتين) $T >> \theta_E$ ننشر التابع الأسي في المقام

$$C_V \approx 3R(\frac{\theta_E}{T})^2 \frac{(1+\frac{\theta_E}{T}+...)}{(1+\frac{\theta_E}{T}+....-1)^2} = 3R(1 + \underbrace{\frac{\theta_E}{T}}_{\to 0} + ...) \quad \Rightarrow \qquad \boxed{C_V \approx 3R}$$

ثانياً: عند درجات الحرارة المنخفضة $T << \theta_E$ يُهمل الواحد في المقام ونحصل على القيمة

$$C_V \approx 3R(\frac{\theta_E}{T})^2\, e^{-\frac{\theta_E}{T}} \Rightarrow \lim_{T\to 0\,k^o} C_V = 3R \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}}_{=0} \Rightarrow \boxed{\lim_{T\to 0\,k^o} C_V = 0}$$

يُلاحظ أن السعة الحرارية التجريبية عند درجات الحرارة المنخفضة $T << \theta_E$ تسعى إلى الصفر المطلق بشكل أبطأ مما هو عليه في نموذج آينشتين النظري $C_V \propto \frac{x^2}{e^x}$ كما هو موضح في الشكل أدناه ( ).

يعود فشل نموذج آينشتين في مقاربة النتائج التجريبية عند درجات الحرارة المنخفضة إلى اعتباره الهزازات تهتز بتواتر وحيد وثابت. وتصحيحاً لهذا الأمر قام ديباي بالمقاربة التالية

تفسير ديباي: Debye

اعتبر ديباي أن الأمواج المرنة - في مجال مستمر من التواترات - هي على نوعين: طولانية ذات اتجاهية استقطابية وحيدة، وعرضانية ثنائية الاتجاهية الاستقطابية، فيكون عدد اتجاهات الاستقطاب ثلاثة. (نضرب درجة التحلل بـ 3)

$$g(P)\,dP = 3C\,d\Gamma(P) = \frac{3}{h^3}dq_V\,dP_V = \frac{3V}{h^3}\,d(\frac{4}{3}\pi P^3) = \frac{3V}{h^3}4\pi P^2\,dP$$

فإذا اعتبرنا أن وسطي سرعة أمواج الفونونات (الطولانية والعرضانية) هو υ، وبما أنها مكممة نجد

$$\varepsilon = \hbar\omega = CP \Rightarrow P = \frac{\hbar\omega}{C} \quad \text{وذلك مقارنة بالفوتونات} \quad \varepsilon = \hbar\omega = \upsilon P \Rightarrow P = \frac{\hbar\omega}{\upsilon}$$

وبالتعويض في درجة التحلل (بتابعية التواتر ω) واعتبار $\hbar = h/2\pi$ نجد

$$g(\omega)\,d\omega = \frac{3V}{h^3}4\pi(\frac{\hbar\omega}{\upsilon})^2\frac{\hbar}{\upsilon}d\omega = \frac{3V}{h^3}4\pi\frac{h^3}{8\pi^3}\frac{\omega^2}{\upsilon^3}d\omega = \frac{3V}{2\pi^2}\;\frac{\omega^2}{\upsilon^3}d\omega \qquad (4)$$

وبإجراء التكامل على مجال التواترات المستمر $\omega \in [0 \to \omega_D]$ حيث ω_D تواتر ديباي

$$\int_0^{\omega_D} g(\omega)\,d\omega = \frac{3V}{2\pi^2}\;\frac{1}{\upsilon^3}\int_0^{\omega_D}\omega^2 d\omega = \frac{3V}{2\pi^2}\;\frac{1}{\upsilon^3}\frac{\omega_D^3}{3} = \frac{V}{2\pi^2}\;\frac{\omega_D^3}{\upsilon^3} \qquad (5)$$

ومن جهة أخرى فإن قيمة التكامل تساوي عدد أنماط الاهتزاز الحاصلة لـ N هزاز أي $3N$ بعدد درجات الحرية

$$\int_0^{\omega_D} g(\omega)\,d\omega = 3N \qquad (6)$$

بمساواة قيمتي التكامل نحصل على قيمة التواتر الزاوي لـ ديباي

$$\frac{V}{2\pi^2}\;\frac{\omega_D^3}{\upsilon^3} = 3N \Rightarrow \omega_D^3 = 6\pi^2\frac{N}{V}\upsilon^3 \Rightarrow \omega_D = (6\pi^2\frac{N}{V})^{1/3}\upsilon = (6\pi^2 n)^{1/3}\upsilon \qquad (7)$$

حيث $n = N/V$ تركيز الفونونات

لإيجاد الطاقة الكلية U نستفيد من عبارة الطاقة الوسطى للفونون $\bar{\varepsilon}$

$$\bar{\varepsilon} = K\theta_E(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\theta_E}{T}}-1}) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}-1} = \varepsilon_o + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}-1} \qquad (8)$$

ثم نضربها بعدد أنماط الاهتزاز $\int_0^{\omega_D} g(\omega)\,d\omega = 3N$ ونضيف إليها طاقة المستوى الصفري U_0 لأنها مستقلة عن درجة الحرارة بالشكل التالي

$$U = \underbrace{U_o}_{3N\varepsilon_o} + \int_0^{\omega_D}\bar{\varepsilon}\;g(\omega)\,d\omega = \underbrace{\frac{3V}{2\pi^2}\;\frac{1}{\upsilon^3}}_{3N/\omega_D^3}\int_0^{\omega_D}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}-1}d\omega = \frac{3N}{\omega_D^3}\int_0^{\omega_D}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}-1}d\omega$$

لحل التكامل نجري تحويلاً نعتبر فيه درجة حرارة ديباي $\theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{K}$ وفق ما يلي:

$$x = \frac{\hbar\omega}{KT} \Rightarrow \omega = \frac{KT}{\hbar}x \Rightarrow d\omega = \frac{KT}{\hbar}dx \quad \text{فيكون} \quad x_D = \frac{\hbar\omega_D}{KT} = \frac{\theta_D}{T} \quad \text{وبالتعويض نجد}$$

$$U = \underbrace{U_o}_{3N\varepsilon_o} + \frac{3N}{\omega_D^3}\hbar\frac{KT}{\hbar}(\frac{KT}{\hbar})^3\int_0^{x_D}\frac{x^3}{e^x-1}dx = U_o + 3NKT\;(\frac{KT}{\hbar\omega_D})^3\int_0^{x_D}\frac{x^3}{e^x-1}dx$$

فتكون عبارة الطاقة النهائية بالشكل

$$U = U_o + 3RT\ (\frac{T}{\theta_D})^3 \int_0^{x_D} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

نوجد السعة الحرارية

$$C_V = (\frac{\partial U}{\partial T})_V = 9R\ (\frac{T}{\theta_D})^3 \int_0^{x_D} \frac{x^4}{(e^x - 1)^2} dx$$

<u>المناقشة:</u>

أولاً: عند درجات الحرارة العالية (أكبر بكثير من درجة ديباي) $T >> \theta_D$ ننشر التابع الأسي في المقام

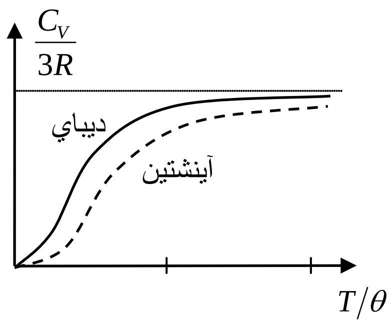
$$C_V = 9R\ \frac{1}{x_D^3} \int_0^{x_D} \frac{x^4}{(1 + x + ... - 1)^2} dx = 9R\ \frac{1}{x_D^3} \frac{x_D^3}{3} = 3R \Rightarrow \qquad \boxed{C_V \approx 3R}$$

ثانياً: عند درجات الحرارة المنخفضة $T << \theta_E$ يُهمل الواحد في المقام ونحصل على القيمة

$$C_V \approx \frac{12\pi^4}{5} R (\frac{T}{\theta_D})^3 \quad \Rightarrow \qquad \boxed{\lim_{T \to 0\, k^o} C_V = 0}$$

يُلاحظ أن السعة الحرارية التجريبية عند درجات الحرارة المنخفضة $T << \theta_E$ تسعى إلى الصفر المطلق بشكل أسرع مما هو عليه في نموذج آينشتين لكنه يتوافق مع التجربة كما هو موضح في الشكل ( ).

يمثل الخط المتقطع منحني آينشتين والمستمر ديباي



شكل ( )

<u>٢- إحصاء فيرمي - ديراك (F-D):</u>

<u>مقدمة:</u> يدرس هذا الإحصاء الفيرميونات. وهي جسيمات كمية غير متمايزة، وتشمل: الالكترونات، والبروتونات، والنترونات، وجسيمات أخرى. تتمتع الفيرميونات بالمواصفات الخاصة التالية:

١- لها عزم اندفاع (سبين S) عدد فردي من $\hbar/2$. بالشكل $S = n\hbar/2\ \ ; n = 1,3,5,7.....$.

٢- تخضع لمبدأ باولي في الاستبعاد (لا يمكن لدرجة التحلل الواحدة أن تحوي على جسيمين متماثلي الأعداد الكمية المعروفة: n, ℓ, m_ℓ, S).

٣- تابع موجة دي برولي المصاحبة للبوزون $\psi_{(n,\ell,m,S)}$ غير متناظر.

٤- متفاعلة مع بعضها البعض.

٥- يرتبط زخمها P بالطاقة E بالعلاقة: $E = P^2/2m$

٦- معظمها يحقق علاقة التشتت. $\omega = Ck$ ، حيث $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$ العدد الموجي (القيمة المطلقة لمتجهة الانتشار).

<u>عبارة الوزن الإحصائي لتوزع فيرمي - ديراك (F-D):</u>

نفرض جملة معزولة مكونة من N <u>فيرميون</u>، موزعة على ε_i سوية طاقة متحللة، ودرجة تحلل كلٍ منها g_i .

تحوي السوية الواحدة على N_i <u>فيرميون</u> (ندعوه رقم انشغال السوية). كما هو موضح بالشكل ( ).

يجري التوزع بحيث يتحقق قانوني انحفاظ عدد الجسيمات $N = \sum_i N_i$ وطاقتها $U = \sum_i N_i\, \varepsilon_i$

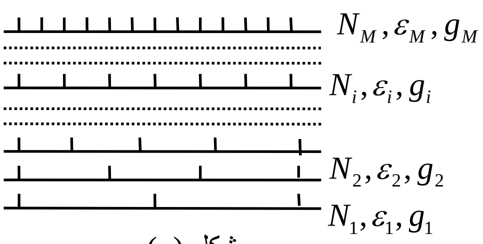
بما أن الفيرميونات جسيمات كمية، وتخضع لمبدأ باولي في الاستبعاد (لا يمكن لفيرميونين متماثلي الأعداد الكمية التواجد في درجة تحلل واحدة "حجرة واحدة ")، فإن نصيب الحجرة الواحدة من الفيرميونات سيكون صفر أو واحد على الأكثر. وهذا يعني أنه من أجل الـ N_i جسيم في السوية i المتحللة لـ g_i خلية (حجرة) وجوب تحقق الشرط التالي:

$$\boxed{g_i \geq N_i}$$

بدايةً: لإيجاد عدد طرق توزيع N_i جسيم في السوية i على g_i حجرة.

نلاحظ من الشرط أن الحجرات ستكون مملوءة بفيرميون واحد على الأكثر أو فارغة.

فيكون عدد حالات التوزع الميكروي w، الناتج عن توزيع N_i فيرميون على g_i حجرة، مساوياً لعدد التباديل المختلفة بين الحجرات المملوءة البالغ عددها N_i حجرة (بعدد الفيرميونات الشاغلة لها)، والحجرات الفارغة البالغ عددها $(g_i - N_i)$ حجرة.



شكل ( )

حسب العلاقة: العدد يساوي مجموع المتبادلات إلى جداءاتها. كما يلي:

$$w = \frac{[N_i + (g_i - N_i)]!}{N_i!\,(g_i - N_i)!} = \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i - N_i)!}$$

ومن أجل كافة السويات $i \in [1,2,......M]$ يصبح عدد حالات التوزع الميكروي مساوياً لمجموع جداءاتها بالشكل:

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{M} w_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{F-D} = \prod_{i=1}^{M} \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i - N_i)!}}$$

من الواضح أن الوزن الإحصائي W مقدار عديم البعد لأنه يعبر عن عدد.

<u>حالة التوازن:</u> هي الحالة الماكروية الموافقة لوزن إحصائي أعظمي $W_{F-D \atop \max}$.

<u>مثال:</u> جملة معزولة، مكونة من ثلاث فيرميونات. موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = \varepsilon_o$ و $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_o$، متحللتين بالشكل: $g_1 = 3$ و $g_2 = 1$. والمطلوب:

١- أوجد حالات التوزع الماكروي الممكنة، وطاقة كلٍ منها.

٢- أوجد الوزن الإحصائي لكل حالة توزع ماكروي (مع التمثيل). واستنتج حالة التوازن.

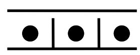
الحل: ١- عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي: $N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N!(N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(3+2-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$

حالات التوزع الماكروي الإجمالي $\{(3,0)\,(0,3)\,(2,1)\,(1,2)\}$

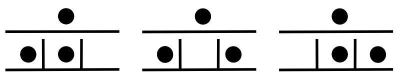
حالات التوزع الماكروي الممكنة فقط، هي المحققة للشرط $\boxed{g_i \geq N_i}$ وطاقاتها: $\left\{ (\overbrace{3,0}^{U=3\varepsilon_o})\ (\overbrace{2,1}^{U=4\varepsilon_o}) \right\}$

٢- الأوزان الإحصائية للحالات الماكروية الممكنة (مع التمثيل). بتطبيق $\boxed{W_{F-D} = \prod_{i=1}^{M} \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i - N_i)!}}$

$$W_{(3,0)} = \frac{3!}{3!(3-3)!}\,\frac{1!}{0!(1-0)!} = 1 \quad \Leftrightarrow$$



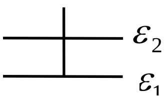
$$W_{(2,1)} = \frac{3!}{2!(3-2)!}\,\frac{1!}{1!(1-1)!} = 3 \quad \Leftrightarrow$$



حالة التوازن هي الحالة الماكروية الأكثر احتمالاً $(2,1)$، لأنها توافق وزن إحصائي أعظمي $W_{\max} = 3$.

<u>مثال:</u> يوزع ثلاث فيرميونات على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ و $\varepsilon_2 = 2\,\varepsilon_0$ متحللة ودرجة تحلل كل منها ($g_1 = g_2 = 2$)

والمطلوب: إيجاد الحالات الماكروية الممكنة، وطاقة كل منها، وعدد الحالات الميكروية الموافقة لكل حالة توزع ماكروي، ومثلها، وأوجد الحالة الأكثر احتمالاً.



الحل: نحسب عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي من العلاقة :

$$N_{Mac} = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N!(N_\varepsilon - 1)!} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

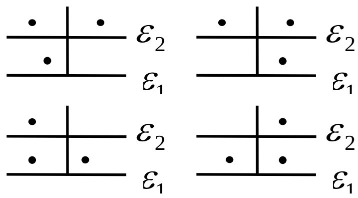
نستعرض هذه الحالات ونختار منها فقط تلك التي تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ لأن الجسيمات فيرميونات (غير متمايزة).

$$\left\{\underbrace{(3,0)}_{NO},\underbrace{(0,3)}_{NO},\underbrace{(2,1)}_{OK},\underbrace{(1,2)}_{OK}\right\}$$

نستنتج أن الحالات الممكنة هي $\underbrace{(2,1)}_{OK},\underbrace{(1,2)}_{OK}$ فقط

نحسب طاقة أي حالة ماكروية بتطبيق العلاقة : $U=\sum_i N_i\,\varepsilon_i$

والوزن الإحصائي بتطبيق إحصاء فيرمي – ديراك $W_{(F-D)}=\prod_i \dfrac{g_i\,!}{N_i\,!\,(g_i-N_i)!}$



$$U_{(1,2)}=5\varepsilon_o \quad \text{و} \quad W_{(1,2)}=\frac{2!}{1!\,(2-1)!}\;\frac{2!}{2!\,(2-2)!}=2$$

$$U_{(2,1)}=4\varepsilon_o \quad \text{و} \quad W_{(2,1)}=\frac{2!}{2!\,(2-2)!}\;\frac{2!}{1!\,(2-1)!}=2$$

الحالة الأكثر احتمالاً (حالة التوازن) هي (2,1) لأن طاقتها هي الأقل.

<u>عبارة أرقام انشغال السويات في الحالة المتوازنة (الأكثر احتمالاً)، أي توزع فيرمي - ديراك (*F-D*):</u>

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (F-D). المعطاة بالعلاقة: $W_{F-D}=\prod_i \dfrac{g_i\,!}{N_i\,!\,(g_i-N_i)!}$

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التحلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i . أي $\boxed{g_i>>N_i}$.

نوجد بدايةً $Ln\,(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d\,Ln\,(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d\,Ln\,(W_{F-D})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0 \qquad (1)$$

$$Ln\,(W_{F-D})\approx Ln\prod_i \frac{g_i\,!}{N_i\,!\,(g_i-N_i)!}=\sum_i\left[Ln\,g_i\,!-Ln\,N_i\,!-Ln\,(g_i-N_i)!\right]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنغ $Ln\,x!\approx x\,Ln\,x$ نجد:

$$Ln\,(W_{F-D})\approx\sum_i\left[g_iLn\,g_i-N_i\,Ln\,N_i-g_iLn\,(g_i-N_i)+N_i\,Ln\,(g_i-N_i)\right]$$

بما أن W_{F-D} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d\,Ln\,(W_{F-D})=\frac{\partial\,Ln\,(W_{F-D})}{\partial N_i}dN_i\approx\frac{\partial}{\partial N_i}\sum_i\left[g_iLn\,g_i-N_i\,Ln\,N_i-g_iLn\,(g_i-N_i)+N_i\,Ln\,(g_i-N_i)\right]dN_i$$

$$\approx\sum_i\left[-Ln\,N_i-1+\frac{g_i}{g_i-N_i}+Ln\,(g_i-N_i)-\frac{N_i}{g_i-N_i}\right]dN_i=\sum_i\left(Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}-1+\frac{g_i-N_i}{g_i-N_i}\right)dN_i$$

$$d\,Ln\,(W_{F-D})\approx\sum_i Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}\,dN_i$$

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$N=\sum_i N_i\;\Rightarrow\;dN=\sum_i dN_i \qquad \text{و} \qquad U=\sum_i\varepsilon_i\,N_i\;\Rightarrow\;dU=\sum_i\varepsilon_i\,dN_i$$

$$d\,Ln\,(W_{F-D})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0$$

$$\sum_i\left(Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}+\alpha+\beta\,\varepsilon_i\right)dN_i=0\;\Rightarrow Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\,\varepsilon_i)\;\Rightarrow\;\frac{g_i-N_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\,\varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow\;\frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\,\varepsilon_i)}+1\;\Rightarrow\;\boxed{N_{\substack{i(F-D)\\ \max}}=\frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\,\varepsilon_i)}+1}}$$

وفي الحالة المستمرة يصبح عدد الفيرميونات التي تملك طاقة في المجال $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$ وفقاً لتوزع (F-D) بالشكل:

$$\boxed{N_{\substack{(F-D)\\ \max}}=\frac{g\,(\varepsilon)}{e^{-(\alpha+\beta\,\varepsilon)}+1}}$$

دراسة تابع مشغولية درجة التحلل لكافة التوزعات:

نستنتج مما سبق أن الصيغة العامة لكافة التوزعات تأخذ الشكل

$$\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}\pm m}$$

حيث يأخذ الثابت m القيمة صفر في توزع مكسويل والقيمة واحد في توزعي بوزة وفيرمي، والإشارة السالبة لبوزة والموجبة لفيرمي. فإذا أخذنا قيمة مضروب لاغرانج α مساوية لنسبة الكمون الكيميائي μ (الطاقة الكيميائية) إلى الطاقة الحرارية KT مع اعتبار المضروب $\beta=-1/KT$ نجد:

$$\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}\pm m}$$

فإذا اعتبرنا أن قيمة μ صغيرة جداً (أقل بكثير من الطاقة الإشعاعية ε_i) أي $\mu<<\varepsilon_i$ فيكون الفرق $(\varepsilon_i-\mu)>0$

وفيما يلي نرسم تحولات المشغولية N_i/g_i كتابع للطاقة الحرارية KT

- عند الطاقات العالية $(\varepsilon_i-\mu)>>KT$ يؤول توزعي بوزة وفيرمي إلى توزع مكسويل (يُهمل الواحد في المقام)

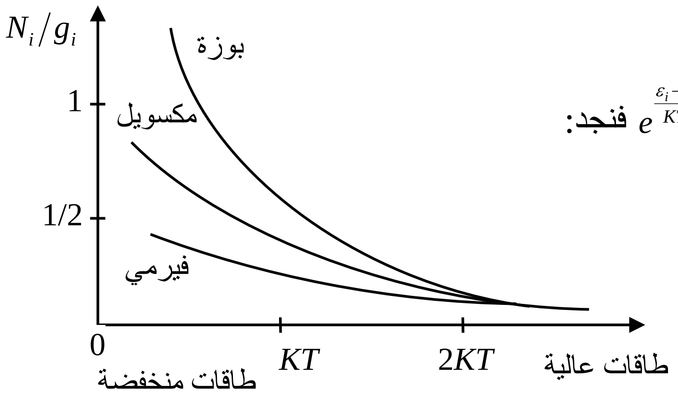
$$\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}\pm 1}\approx\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}}<<1$$

- عند الطاقات المنخفضة $(\varepsilon_i-\mu)<<KT$ يكون $e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}\geq 1$ فنجد:

- من أجل مكسويل $\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}}\leq 1$

- من أجل بوزة $\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}-1}>>1$

- من أجل فيرمي $\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}+1}\geq\frac{1}{2}$



شكل ( )

سوية فيرمي للطاقة وتابع فيرمي:

من المعلوم أن الطاقة الحركية لجسيمات أي جملة تؤول للصفر عندما تسعى درجة حرارتها للصفر المطلق.

أي: $\varepsilon(T\to 0k^o)=0$. وقد اكتشف فيرمي أن هذه القاعدة غير صحيحة بالنسبة للفيرميونات، حيث يمكن لبعض الفيرميونات امتلاك طاقات لاصفرية (غير معدومة). فنسَبَها إليه وأسماها سوية فيرمي للطاقة $\varepsilon_f(T=0)$.

نعرف سوية فيرمي للطاقة $\varepsilon_f(0)$: بأنها الطاقة القصوى التي يمكن للفيرميونات امتلاكها عندما تقع الجملة في درجة الصفر المطلق.

ملاحظة: يرتبط الكمون الكيميائي μ بسوية فيرمي للطاقة $\varepsilon_{f(0)}$ (كما سنرى لاحقاً) وفق العلاقة

$$\mu\approx\varepsilon_{f(0)}[1-\frac{\pi^2}{12}(\frac{KT}{\varepsilon_{f(0)}})^2]$$

وكما هو ملاحظ فإن $\mu=\varepsilon_{f(0)}$ عند الصفر المطلق $(T=0)$، وأن الكمون الكيميائي ينخفض بارتفاع درجة الحرارة، غير أن هذا الانخفاض يكون صغير جداً لدرجة يمكن إهماله، وبالتالي يمكن اعتبار $\mu\approx\varepsilon_{f(0)}\approx\varepsilon_{f(T)}$.

لكتابة رقم الانشغال بدلالة سوية فيرمي: نعرف مضروب لاغرانج α بدلالة هذه السوية بالشكل:

$\alpha=\varepsilon_f/kT$ أما المضروب β فيبقى على حاله $\beta=-1/kT$.

ويصبح رقم الانشغال $N_{\underset{\max}{(F-D)}}$ في حالتي التوزع المنفصل والمستمر بالشكل:

للمستمر $N_{\underset{\max}{(F-D)}}=\frac{g(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(0)}{kT}}+1}$ للمنفصل $N_{\underset{\max}{i(F-D)}}=\frac{g_i}{e^{\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_f(0)}{kT}}+1}$

فيصبح عدد الفيرميونات $dN_{\underset{\max}{(F-D)}}$ الموزعة في الحالة الأكثر احتمال توزعاً مستمراً في المجال $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$ كالتالي:

$$dN_{\underset{\max}{(F-D)}}=\frac{dg(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(0)}{kT}}+1}=\frac{g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(0)}{kT}}+1}$$

وللسهولة: نعرف تابع فيرمي (مشغولية درجة التحلل في درجة الصفر المطلق) بالشكل التالي:

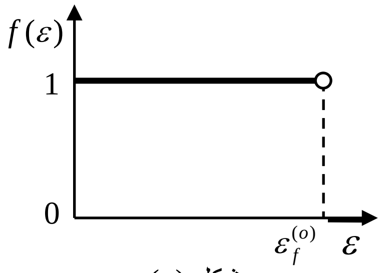
$$f(\varepsilon)=\frac{N_i}{g_i}\;\Rightarrow\;\boxed{f(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(0)}{kT}}+1}}$$

بحيث يمكننا كتابة رقم الانشغال في الحالة المستمرة بالشكل التالي:

$$\boxed{dN_{\underset{\max}{(F-D)}}=f(\varepsilon)\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon}\qquad\text{(A)}$$

يمكن البرهان على أن تابع فيرمي $f(\varepsilon)$ هو تابع كثافة احتمال لأنه يعبر عن احتمال شغل أحد الفيرميونات لواحدة من درجات التحلل $(g=1)$ بطاقة ε عندما تقع الجملة في درجة الصفر المطلق. كما يلي:

لتكن $\varepsilon_{f(o)}$ سوية فيرمي عند درجة الصفر المطلق $T=0k^o$ ، فنجد:



شكل ( )

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_{f(o)}}{KT}}+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{-\infty}+1}=1 & ;\ \varepsilon<\varepsilon_f\\[2mm] \dfrac{1}{e^{+\infty}+1}=0 & ;\ \varepsilon>\varepsilon_f\\[2mm] \dfrac{1}{e^{0/0}+1}=XX & ;\ \varepsilon=\varepsilon_f\end{cases}$$

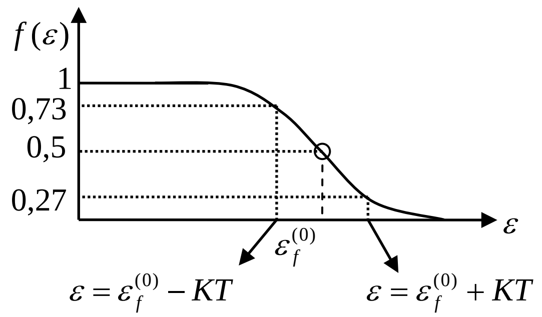
نستنتج أن تابع فيرمي هو تابع كثافة احتمال لأنه يأخذ قيمه في المجال [1 - 0].

إذن بالنسبة للجملة الواقعة في درجة الصفر المطلق:

تكون كافة سويات الطاقة الواقعة دون سوية فيرمي $\varepsilon<\varepsilon_f$ مشغولة بالفيرميونات، بمعدل فيرميون واحد لكل درجة تحلل. أما السويات الأعلى من سوية فيرمي $\varepsilon>\varepsilon_f$ فتكون فارغة كما هو موضح في الشكل ( ).

وفي جوار سوية فيرمي، من أجل $T\neq 0k^o$، أي عندما يُتاح للفيرميونات امتلاك طاقة حركية $\varepsilon=\varepsilon_f^{(o)}\pm KT$.

يأخذ تابع فيرمي الاحتمالات التالية:



شكل ( )

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f^{(o)}}{KT}}+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{-1}+1}\approx 0{,}73 & ;\ \varepsilon=\varepsilon_f^{(o)}-KT\\[2mm] \dfrac{1}{e^{0}+1}=0{,}5 & ;\ \varepsilon=\varepsilon_f^{(o)}\\[2mm] \dfrac{1}{e^{+1}+1}\approx 0{,}27 & ;\ \varepsilon_f^{(o)}+KT\end{cases}$$

وهنا يمكن إضافة تعريف آخر لسوية فيرمي للطاقة:

بأنها الطاقة الموافقة لقيمة تابع فيرمي الاحتمالي $f(\varepsilon)=0{,}5$

وكخلاصة: يمكن تعريف سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(o)}$ بإحدى الصيغتين التاليتين:

١- هي أعلى سويات الطاقة المشغولة بالكامل بالفيرميونات (عندما تقع الجملة في درجة الصفر المطلق $T=0k^o$) بمعدل فيرميون واحد لكل حالة مسموحة (درجة تحلل) من أجل $\varepsilon<\varepsilon_f^{(o)}$، وفارغة من أجل $\varepsilon>\varepsilon_f^{(o)}$.

٢- هي الطاقة الموافقة لقيمة تابع فيرمي الاحتمالي $f(\varepsilon)=0{,}5$

<u>درجة حرارة فيرمي T_f:</u> بالتعريف: هي درجة الحرارة T_f الموافقة لسوية فيرمي للطاقة $\varepsilon_f^{(o)}$. ونحسبها من العلاقة:

$$\varepsilon_f^{(o)}=KT_f\qquad ;\ K=1{,}38\times10^{-23}\,J/k^o$$

ونظراً لاختلاف قيم سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(o)}$ باختلاف المواد ذات الطبيعة الفيرميونية (التي مكوناتها فيرميونات)، فإن درجات الحرارة الموافقة T_f ستكون مختلفة أيضاً كما هو موضح في الجدول التالي:

حيث تأخذ ثابتة بولتزمان مقدرة بالإلكترون ڤولط لكل كلڤن القيمة $K=\frac{1,38\times10^{-23}}{1,6\times10^{-19}}\ eV/k^o \approx 0,86\times10^{-4}\ eV/k^o$

اسم الغاز	سوية فيرمي $\varepsilon_{f(0)}\ (eV)$	درجة حرارة فيرمي T_f
غاز الهيليوم ونظائره $^{3}_{2}He$	$0,94\times10^{-3}eV$	$10\ k^o$
الغاز الإلكتروني في الليثيوم	$4,7\,eV$	$54\times10^{3}\ k^o$
الغاز الإلكتروني في البوتاسيوم	$2,1eV$	$24\times10^{3}\ k^o$
الغاز الإلكتروني في الصوديوم	$3,12\,eV$	$37\times10^{3}\ k^o$
الغاز الإلكتروني في النحاس	$7,04\,eV$	$82\times10^{3}\ k^o$

خواص غاز الفيرميون (الغاز الإلكتروني):

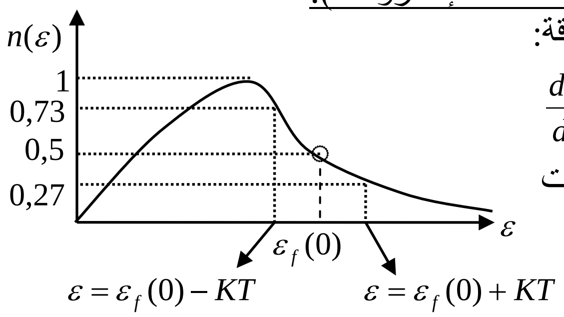
- التوزع الحقيقي للإلكترونات على سويات الطاقة: (توزع كثافة سويات طاقة الإلكترونات):

نشتق طرفي عبارة توزع الجسيمات بدلالة سوية فيرمي بالنسبة للطاقة:

$$\frac{dN}{d\varepsilon}=n(\varepsilon)=4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\varepsilon_f^{1/2}=\delta\ \varepsilon_f^{1/2} \qquad ;\ \delta=4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}$$

حيث δ ثابت. و $n(\varepsilon)=\delta\ \varepsilon_f^{1/2}$ تمثل كثافة سويات طاقة الإلكترونات التي يمكن تمثيلها بالشكل ( ). وهي معادلة قطع مكافئ.

ويلاحظ الانهيار بجوار $\varepsilon_f(0)$ في المجال $\pm KT$.



شكل ( )

- **الطاقة الوسطى للإلكترونات عند الدرجة صفر كلڤن:**

بالاعتماد على تعريف القيمة الوسطى:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\int_0^\infty \varepsilon\,dN}{\int_0^\infty dN}=\frac{\int_0^\infty \varepsilon\, f(\varepsilon)\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\int_0^\infty f(\varepsilon)\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon}=\frac{\int_0^{\varepsilon_f}\varepsilon\,\underbrace{f(\varepsilon)}_{1}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon+\int_{\varepsilon_f}^{\infty}\varepsilon\,\underbrace{f(\varepsilon)}_{0}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_f}\underbrace{f(\varepsilon)}_{1}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon+\int_{\varepsilon_f}^{\infty}\underbrace{f(\varepsilon)}_{0}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon}=\frac{\int_0^{\varepsilon_f}\varepsilon\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_f}g(\varepsilon)\,d\varepsilon}=$$

$$=\frac{\int_0^{\varepsilon_f}\varepsilon\,C\,d\Gamma(\varepsilon)}{\int_0^{\varepsilon_f}C\,d\Gamma(\varepsilon)}=\frac{4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^{\varepsilon_f}\varepsilon\ \varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^{\varepsilon_f}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}=\frac{\int_0^{\varepsilon_f}\varepsilon^{3/2}d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_f}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}=\frac{\frac{2}{5}\varepsilon_f^{5/2}}{\frac{2}{3}\varepsilon_f^{3/2}}=\frac{3}{5}\varepsilon_{f(0)}$$

١- غاز الفيرميون عند الصفر المطلق: (عندما تمتلك كافة الفيرميونات طاقة أقل من طاقة فيرمي)

إيجاد عدد الجسيمات N بدلالة سوية فيرمي $\varepsilon_{f(0)}$، وبالعكس:

نوجد عبارة عدد الجسيمات N بدلالة سوية فيرمي $\varepsilon_f(0)$ بمكاملة العلاقة (A) في المجال $]0,\infty[$:

واعتبار قيمة تابع فيرمي $f(\varepsilon)=\begin{cases}1 & ;\ \varepsilon<\varepsilon_f^{(o)}\\ 0 & ;\ \varepsilon>\varepsilon_f^{(o)}\end{cases}$

$$N=\int_0^\infty dN=\int_0^\infty f(\varepsilon)\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon=\int_0^{\varepsilon_{f(0)}}\underbrace{f(\varepsilon)}_{1}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon+\int_{\varepsilon_{f(0)}}^{\infty}\underbrace{f(\varepsilon)}_{0}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon=\int_0^{\varepsilon_{f(0)}}g(\varepsilon)\,d\varepsilon=\int_0^{\varepsilon_{f(0)}}C\,d\Gamma(\varepsilon) \qquad (*)$$

نوجد درجة التحلل $g(\varepsilon)\,d\varepsilon$ بدلالة عنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma(\varepsilon)$. ونضربه بـ 2 نظراً لتمتع الفيرميون بسبين مزدوج $S=\pm\hbar/2$ ، (يعبر الرقم 2 عن تحلل سبين الإلكترون $g_S=2S+1=2$)

واعتبار أن $C=1/h^3$ (لأن الجسيمات كمية) بالشكل :

$$C\,d\Gamma(\varepsilon)=2C\,dq_V\,dp_V=\frac{2V}{h^3}d\left(\frac{4}{3}\pi\ p^3\right)=\frac{2V}{h^3}4\pi\ p^2dp \qquad (**)$$

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم هي طاقة حركية فقط

$$\varepsilon = m\vartheta^2/2 = p^2/2m \Rightarrow p^2 = 2m\varepsilon \quad \wp \quad p = \sqrt{2m\varepsilon} \Rightarrow dp = m\,d\varepsilon/\sqrt{2m\varepsilon}$$

بالتعويض في (**)

$$C\,d\Gamma(\varepsilon) = \frac{2V}{h^3} 4\pi\, 2m\,\varepsilon \frac{m\,d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$$

بالتعويض في (*)

$$N = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_{f(0)}} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \Rightarrow \boxed{N = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \frac{2}{3} \varepsilon_{f(0)}^{3/2}} \qquad (A)$$

تشير العبارة الحاصلة إلى توزع الجسيمات بدلالة سوية فيرمي $\varepsilon_{f(0)}$ عند درجة الصفر المطلق.

وفي الحالة المعاكسة: يمكننا كتابة سوية فيرمي $\varepsilon_{f(0)}$ بدلالة توزع الجسيمات

$$\varepsilon_{f(0)} = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3} \qquad (B)$$

تشير العبارة الحاصلة على اعتماد سوية فيرمي على الكثافة الحجمية N/V للدلالة على تراص الجسيمات.

فتكون درجة فيرمي

$$T_f = \frac{\varepsilon_{f(0)}}{K} = \frac{h^2}{2mK}\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3} \qquad (C)$$

مثال: احسب سوية فيرمي $\varepsilon_{f(0)}$ ودرجة حرارة فيرمي T_f وسرعة الإلكترونات عند هذه الطاقة υ_f لعنصر البوتاسيوم علماً أن كثافة البوتاسيوم $\rho = 0{,}86\times10^3\ kg/m^3$ وكتلته المولية $M = 39\ gr/mol$ علماً أن: لكل ذرة بوتاسيوم إلكترون تكافؤ وحيد (حر)، وكتلة الإلكترون $m_e = 9{,}11\times10^{-31}\ kg$ وثابتة بلانك $6{,}62\times10^{-34}\ JS$ وعدد أفوكادرو $N_A = 6{,}02\times10^{23}\ Electron/mol$

الحل: نحسب الكثافة الحجمية لمول واحد من إلكترونات البوتاسيوم (النسبة N_A/V) من المعطيات

$$\frac{N_A}{V} = \frac{N_A}{M/\rho} = \frac{N_A\rho}{M} = \frac{6{,}02\times10^{23}\ Electron/mol \times 0{,}86\times10^3\ kg/m^3}{39\times10^{-3}\ kg/mol} \approx 1{,}33\times10^{28}\ Electron/m^3$$

نعوض عن كل بقيمته في علاقة سوية فيرمي

$$\varepsilon_{f(0)} = \frac{h^2}{2m_e}\left(\frac{3N_A}{8\pi V}\right)^{2/3} = \frac{(6{,}62\times10^{-34}\ JS)^2}{2\times9{,}11\times10^{-31}\ kg}\left(\frac{3}{8\pi}\times1{,}33\times10^{28}\ Elec/m^3\right)^{2/3} \approx 3{,}28\times10^{-19}\ J$$

$$\varepsilon_{f(0)} \approx \frac{3{,}28\times10^{-19}}{1{,}6\times10^{-19}}\ eV \approx 2{,}05\ eV$$

نحسب درجة حرارة فيرمي T_f للإلكترونات من العلاقة

$$T_f = \frac{\varepsilon_{f(0)}}{K} = \frac{3{,}28\times10^{-19}\ J}{1{,}38\times10^{-23}\ J/k^o} \approx 2{,}3\times10^4\ k^o$$

تشير درجة حرارة فيرمي T_f المرتفعة لإلكترونات البوتاسيوم (عند الصفر المطلق) إلى وجوب التعامل مع هذا المعدن وفقاً لقوانين ميكانيكا الكم حتى عند درجة حرارة الغرفة.

لحساب سرعة الإلكترونات عند سوية فيرمي، نفرض أن طاقة هذه السوية هي طاقة حركية يكتسبها الإلكترون، فنجد:

$$\varepsilon_{f(0)} \approx \frac{1}{2} m_e\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{f(0)}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2\times3{,}28\times10^{-19}\ J}{9{,}11\times10^{-31}\ kg}} \approx 8{,}5\times10^5\ m/s$$

حساب الطاقة الداخلية:

طريقة ١: نجدها من العلاقة $U_o = N\varepsilon$ وذلك بالتعويض عن عبارة N التكاملية (A) بقيمتها

$$U_o = N\varepsilon = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_{f(0)}} \varepsilon\,\varepsilon^{1/2}\, d\varepsilon = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_{f(0)}} \varepsilon^{3/2}\, d\varepsilon = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \frac{2}{5}\varepsilon_{f(0)}^{5/2}$$

نكتب النتيجة بدلالة N الواردة في العلاقة (A) بالشكل التالي

$$U_o = \underbrace{4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \varepsilon_{f(0)}^{3/2}}_{\frac{3}{2}N} \frac{2}{5}\varepsilon_{f(0)} = \frac{3}{2}N\frac{2}{5}\varepsilon_{f(0)} = \frac{3}{5}N\varepsilon_{f(0)} \qquad (D)$$

<u>طريقة ٢</u>: نجدها من العلاقة $U_o = N\bar{\varepsilon}$ وذلك بالتعويض عن $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{5}\varepsilon_{f(0)}$ بقيمتها فنجد $U_o = \frac{3}{5}N\varepsilon_{f(0)}$

<u>حساب الأنتروبية</u>: نجدها من العلاقة $S_o = K\,LnW_o = K\,Ln1 = 0$ (الجملة في حالة توزع ميكروي وحيدة $W_o = 1$).

<u>معادلة الحالة</u>: نجدها من العلاقة $\Omega_o = -PV = U_o - S_o - N\varepsilon_{f(0)} = \frac{3}{5}N\varepsilon_{f(0)} - 0 - N\varepsilon_{f(0)} = -\frac{2}{5}N\varepsilon_{f(0)}$

<u>حساب الضغط</u>: نجده من العلاقة $P = -\frac{\Omega_o}{V} = \frac{2}{5}\varepsilon_{f(0)}\frac{N}{V}$

يُقدر الضغط الذي تسببه الفيرميونات (الإلكترونات) داخل المعدن بحدود $10^6\ atm$ و هذا يُفسر قوى التوتر السطحي الكبيرة في المعادن التي تحول دون هروب الإلكترونات إلى خارج المعدن.

مثال: من أجل مول واحد من المادة

$$P = \frac{2}{5}\varepsilon_{f(0)}\frac{N_A}{V} = \frac{2}{5}\times 3{,}28\times 10^{-19}\ J\times 1{,}33\times 10^{28}\ Electron/m^3 \approx 1{,}74\times 10^{9}\ pascal \approx 10^{4}\ atm$$

<u>٢- غاز الفيرميون عند درجة حرارة تفوق الصفر المطلق:</u>

(عندما تمتلك بعض الفيرميونات طاقة أكبر من سوية فيرمي $\varepsilon_{f(0)}$)

<u>عبارة عدد الجسيمات N بدلالة سوية فيرمي عند الدرجة $T \neq 0$ أي $\varepsilon_{f(T\neq 0)}$</u>

عندما $T \neq 0$ يأخذ تابع فيرمي الصيغة $f(\varepsilon) = \dfrac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_{f(T)}}{kT}} + 1}$

نوجد العدد بمكاملة العبارة التالية على كافة سويات الطاقة

$$N = \int_0^\infty dN = \int_0^\infty f(\varepsilon)\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_{f(T)}}{kT}} + 1}$$

وباتباع ما سبق في إيجاد قيمة درجة التحلل $g(\varepsilon)\,d\varepsilon = C\,d\Gamma(\varepsilon) = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$ وبالتعويض نجد

$$N = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_{f(T)}}{kT}} + 1} \qquad (E)$$

وباعتبار $x = \varepsilon/KT$ و $x_T = \varepsilon_{f(T)}/KT$ فيكون $d\varepsilon = KT\,dx$ و $\varepsilon^{1/2} = \sqrt{KT}\ x^{1/2}$ والتعويض نجد:

$$N = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}(KT)^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}\,dx}{e^{(x - x_T)} + 1}$$

نوجد قيمة التكامل باستخدام تكامل سمرفيلد التالي:

$$\int_0^\infty f(x - x_T)\,x^n\,dx = \frac{x_T^{n+1}}{n+1}[1 + \frac{\pi^2}{6}\frac{n(n+1)}{x_T^2} + ...]$$

نأخذ التابع $f(x - x_T) = \dfrac{1}{e^{(x - x_T)} + 1}$ و $n = 1/2$ نجد:

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}\,dx}{e^{(x - x_T)} + 1} = \frac{2}{3}x_T^{3/2}[1 + \frac{\pi^2}{8x_T^2} + ...]$$

وبالتعويض نجد:

$$N=4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}(KT)^{3/2}\frac{2}{3}\left(\frac{\varepsilon_{f(T)}}{KT}\right)^{3/2}[1+\frac{\pi^2}{8}(\frac{KT}{\varepsilon_{f(T)}})^2+....]$$

$$\boxed{N=4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\frac{2}{3}\varepsilon_{f(T)}^{3/2}[1+\frac{\pi^2}{8}(\frac{KT}{\varepsilon_{f(T)}})^2+....]} \qquad (F)$$

عبارة سوية فيرمي عند الدرجة $T\neq 0$ أي $\varepsilon_{f(T)}$ بدلالة سوية فيرمي عند الدرجة $T=0$ أي $\varepsilon_{f(0)}$

نساوي بين قيمتي N في العبارتين (A) و (F) لأن عدد الجسيمات ثابت (لايتغير بتغير درجة الحرارة)

$$4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\frac{2}{3}\varepsilon_{f(0)}^{3/2}=4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\frac{2}{3}\varepsilon_{f(T)}^{3/2}[1+\frac{\pi^2}{8}(\frac{KT}{\varepsilon_{f(T)}})^2+....]$$

وباختزال الطرفين

$$\varepsilon_{f(0)}^{3/2}=\varepsilon_{f(T)}^{3/2}[1+\frac{\pi^2}{8}(\frac{KT}{\varepsilon_{f(T)}})^2+....]$$

نُجري تقريب نعتبر فيه $\varepsilon_{f(T)}=\varepsilon_{f(0)}=KT_f$ (داخل القيمة التربيعية فقط).

$$\varepsilon_{f(T)}^{3/2}=\varepsilon_{f(0)}^{3/2}[1+\frac{\pi^2}{8}(\frac{KT}{KT_f})^2+....]^{-1}$$

وبقسمة الأسس على $3/2$

$$\varepsilon_{f(T)}=\varepsilon_{f(0)}[1+\frac{\pi^2}{8}(\frac{T}{T_f})^2+....]^{-2/3}$$

وبنشر القوس المتوسطة

$$\varepsilon_{f(T)}\approx\varepsilon_{f(0)}[1-\frac{2}{3}\frac{\pi^2}{8}(\frac{T}{T_f})^2+....]$$

$$\boxed{\varepsilon_{f(T)}\approx\varepsilon_{f(0)}[1-\frac{\pi^2}{12}(\frac{T}{T_f})^2+....]} \qquad (G)$$

نتيجة: نلاحظ أن $\mu=\varepsilon_{f(T)}<\varepsilon_{f(0)}$ ويكون هذا النقص طفيف لأن $T<T_f$

مثال: احسب سوية فيرمي $\varepsilon_{f(T)}$ لمعدن البوتاسيوم عند درجة الحرارة $T=3\times10^3\ k^o$، علماً أن سوية فيرمي عند درجة الصفر المطلق $\varepsilon_{f(0)}\approx 2{,}05\ eV$ ودرجة حرارة فيرمي الموافقة للإلكترونات $T_{f(0)}=2{,}3\times10^4\ k^o$

الحل: نطبق العلاقة

$$\varepsilon_{f(T)}\approx\varepsilon_{f(0)}[1-\frac{\pi^2}{12}(\frac{T}{T_f})^2+....]=2{,}05\ eV[1-\frac{\pi^2}{12}(\frac{3\times10^3}{2{,}3\times10^4})^2+....]=2{,}05\ eV\times0{,}986\approx2{,}02\ eV$$

فتكون درجة فيرمي الجديدة $T_{f(T)}=\dfrac{\varepsilon_{f(T)}}{K}=\dfrac{2{,}02\times1{,}6\times10^{-19}\ J}{1{,}38\times10^{-23}\ J/k^o}\approx2{,}3\times10^4\ k$

نلاحظ أن سوية فيرمي انخفضت بمقدار طفيف جداً، وأن درجة حرارة فيرمي الجديدة بقيت كما هي، لذا يمكن اعتبار (لمعدن البوتاسيوم) $\varepsilon_{f(T)}\approx\varepsilon_{f(0)}$

حساب الطاقة الداخلية: نجدها من العلاقة $U_T=N\,\bar{\varepsilon}_T$

نوجد الطاقة الوسطى للإلكترونات عند الدرجة $T\neq0$: (بالاعتماد على تعريف القيمة الوسطى)

$$\bar{\varepsilon}_T=\frac{\int_0^\infty\varepsilon\,dN}{\int_0^\infty dN}=\frac{\int_0^\infty\varepsilon\,f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon}{\int_0^\infty f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon}=\frac{4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_{f(T)}}{kT}}+1}d\varepsilon}{4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_{f(T)}}{kT}}+1}d\varepsilon}$$

وباعتبار $x=\varepsilon/KT$ و $x_T=\varepsilon_{f(T)}/KT$ فيكون $d\varepsilon=KT\,dx$ و $\varepsilon^{3/2}=(KT)^{3/2}\,x^{3/2}$ و $\varepsilon^{1/2}=(KT)^{1/2}\,x^{1/2}$
والتعويض نجد:

$$\bar{\varepsilon}_T=\frac{(KT)^{5/2}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^{x-x_T}+1}dx}{(KT)^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^{x-x_T}+1}dx}=$$

نوجد قيمة التكاملين باستخدام تكامل سمرفيلد:

نأخذ التابع $f(x-x_T)=\frac{1}{e^{(x-x_T)}+1}$ و $n=3/2$ للبسط و $n=1/2$ للمقام فنجد:

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}\,dx}{e^{(x-x_T)}+1}=\frac{2}{3}x_T^{3/2}[1+\frac{\pi^2}{8x_T^2}+....] \quad \text{و} \quad \int_0^\infty \frac{x^{3/2}\,dx}{e^{(x-x_T)}+1}=\frac{2}{5}x_T^{5/2}[1+\frac{5\pi^2}{8x_T^2}+....]$$

$$\bar{\varepsilon}_T=KT\frac{\frac{2}{5}x_T^{5/2}[1+\frac{5\pi^2}{8x_T^2}+....]}{\frac{2}{3}x_T^{3/2}[1+\frac{\pi^2}{8x_T^2}+....]}=\frac{3}{5}KT\frac{\varepsilon_{f(T)}}{KT}\frac{[1+\frac{5\pi^2}{8}(\frac{KT}{\varepsilon_{f(T)}})^2+....]}{[1+\frac{\pi^2}{8}(\frac{KT}{\varepsilon_{f(T)}})^2+....]}$$

$$\bar{\varepsilon}_T=\underbrace{\frac{3}{5}\varepsilon_{f(0)}[1+\frac{\pi^2}{8}(\frac{T}{T_f})^2+....]^{-2/3}}_{\varepsilon_{f(T)}}\frac{[1+\frac{5\pi^2}{8}(\frac{T}{T_f})^2+....]}{[1+\frac{\pi^2}{8}(\frac{T}{T_f})^2+....]}=\frac{3}{5}\varepsilon_{f(0)}\frac{[1+\frac{5\pi^2}{8}(\frac{T}{T_f})^2+....]}{[1+\frac{\pi^2}{8}(\frac{T}{T_f})^2+....]^{5/3}}$$

$$\bar{\varepsilon}_T\approx\frac{3}{5}\varepsilon_{f(0)}[1+\frac{5\pi^2}{8}(\frac{T}{T_f})^2+....][1-\frac{5\pi^2}{24}(\frac{T}{T_f})^2+....]$$

$$\bar{\varepsilon}_T\approx\frac{3}{5}\varepsilon_{f(0)}[1+(\frac{5\pi^2}{8}-\frac{5\pi^2}{24})(\frac{T}{T_f})^2-(\frac{5\pi^2}{8}\frac{5\pi^2}{24})(\frac{T}{T_f})^4....]$$

$$\bar{\varepsilon}_T\approx\frac{3}{5}\varepsilon_{f(0)}[1+\frac{10\pi^2}{24}(\frac{T}{T_f})^2-\frac{25\pi^4}{192}(\frac{T}{T_f})^4....]$$

$$\bar{\varepsilon}_T\approx\frac{3}{5}\varepsilon_{f(0)}[1+\frac{5\pi^2}{12}(\frac{T}{T_f})^2-\frac{\pi^4}{8}(\frac{T}{T_f})^4....]$$

$$U_T=N\,\bar{\varepsilon}_T=\underbrace{\frac{3}{5}N\,\varepsilon_{f(0)}}_{U_o}[1+\frac{5\pi^2}{12}(\frac{T}{T_f})^2-\frac{\pi^4}{8}(\frac{T}{T_f})^4....]$$

$$U_T\approx U_o[1+\frac{5\pi^2}{12}(\frac{T}{T_f})^2-\underbrace{\frac{\pi^4}{8}(\frac{T}{T_f})^4}_{\approx 0}....] \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_T\approx U_o[1+\frac{5\pi^2}{12}(\frac{T}{T_f})^2]}$$

المقدار المهمل بسبب كون النسبة $(T/T_f)<1$ فيكون الأس الرابع صغير جداً ويهمل.

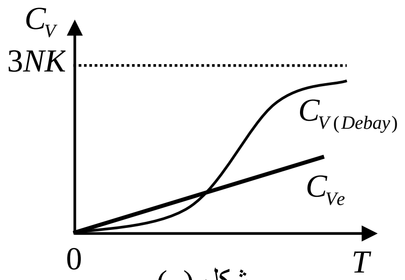
تشير العلاقة الناتجة إلى تزايد الطاقة الداخلية بزيادة درجة الحرارة (بسبب انتقال الفيرميونات إلى سويات طاقة أعلى).

حساب الحرارة النوعية للإلكترونات: نجدها من العلاقة (باعتبار U_o ثابت ودون إهمال حد الأس الرابع)

$$C_{Ve}=(\frac{\partial U_T}{\partial T})_V=\frac{5\pi^2}{6}\frac{U_o}{T_f^2}T-\frac{\pi^4}{2}\frac{U_o}{T_f^4}T^3 \qquad ;U_o=NKT_f$$

$$C_{Ve}\approx\pi^2 NK(\frac{T}{T_f})-\frac{\pi^4}{2}NK(\frac{T}{T_f})^3=AT+BT^3$$

حيث A و B ثوابت، يشير الحد الأول إلى التغير الخطي للسعة عند $T << T_F$ والحد الثاني يدعى حد ديباي الناتج عن توسع الشبكة البلورية كما بالشكل ( )



شكل ( )

يمكن إهمال الحد الثاني عند درجات الحرارة المنخفضة $T << T_F$
وتأخذ القيمة $3NK$ عند درجات الحرارة المرتفعة $T >> T_F$
(من المعلوم من دراسة الجسم الصلب أن السعة الحرارية تأخذ قيمة ثابتة $3NK$ عند درجات الحرارة المرتفعة، وتسهم الإلكترونات الحرة بمقدار $3NK/2$ "تبعاً لعدد درجات الحرة").
أما هنا فنلاحظ أن مساهمة الإلكترونات الحرة في السعة عند درجات الحرارة المنخفضة فهو مقدار مهم من خلال المثال التالي

مثال: احسب السعة الحرارية النوعية للإلكترونات الحرة لمعدن البوتاسيوم عند درجة حرارة الغرفة $T = 3\times10^2\ k^o$ علماً أن درجة حرارة فيرمي للإلكترونات $T_{f(0)} = 2{,}3\times10^4\ k^o$

الحل: نطبق العلاقة $C_{Ve} \approx \pi^2 NK(\frac{T}{T_f}) \approx 9{,}87\,(\frac{3\times10^2}{2{,}3\times10^4})\,NK \approx 0{,}1\ NK$

ملاحظة: لقياس الثابتين A و B، تُحسب C_V عند درجات حرارة مختلفة، ثم تُحسب النسبة C_V/T وتُمثل بيانياً بدلالة T^2 فنحصل على العلاقة الخطية $\frac{C_{Ve}}{T} = BT^2 + A \quad \Leftrightarrow \quad y = Bx + A$

وكما هو ملاحظ من الشكل أن $\lim\limits_{T\to0} \frac{C_{Ve}}{T} = A = \pi^2(\frac{NK}{T_f})$

وبمعرفة A نستطيع معرفة T_f، والتي منها نحسب سوية فيرمي $\varepsilon_{f(0)} = KT_f$

وأن ميل الخط البياني يساوي B أي $B = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

حساب الأنتروبية: نجدها من العلاقة

$$S = \int_0^T C_{Ve}\frac{dT}{T} = \pi^2(\frac{NK}{T_f})\int_0^T T\frac{dT}{T} - \frac{\pi^4}{2}(\frac{NK}{T_f^3})\int_0^T T^3\frac{dT}{T}$$

$$S = \pi^2(\frac{NK}{T_f})\int_0^T dT - \frac{\pi^4}{2}(\frac{NK}{T_f^3})\int_0^T T^2 dT$$

$$S = \pi^2(\frac{NK}{T_f})T - \frac{\pi^4}{2}(\frac{NK}{T_f^3})\frac{T^3}{3} = \pi^2 NK[(\frac{T}{T_f}) - \frac{\pi^2}{6}(\frac{T}{T_f})^3]$$

حساب الطاقة الحرة (هلمهولتز): نجدها من العلاقة $F = U - TS$ حيث $U_o = NKT_f$

$$F \approx U_o[1 + \frac{\pi^2}{6}(\frac{T}{T_f})^2 - \frac{\pi^4}{8}(\frac{T}{T_f})^4 + ...] - \pi^2 NK[(\frac{T^2}{T_f}) - \frac{\pi^2}{6}\frac{T^4}{T_f^3}]$$

$$F \approx NKT_f[1 + (\frac{\pi^2}{6} - \pi^2)\frac{T^2}{T_f^2} + (\frac{\pi^4}{6} - \frac{\pi^4}{8})\frac{T^4}{T_f^4}]$$

$$F \approx NKT_f[1 - \frac{5\pi^2}{6}\frac{T^2}{T_f^2} + \frac{\pi^4}{24}\frac{T^4}{T_f^4}]$$

٣- غاز الفيرميون عند درجات الحرارة العالية:

يتحول غاز فيرمي الكمي إلى غاز مكسويل الكلاسيكي في مجال الطاقات العالية فقط.

أي من أجل $\varepsilon - \varepsilon_f^{(o)} >> kT$ يكون: $e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f^{(o)}}{kT}} >> 1$ وبالتالي يمكن إهمال الواحد في مقام عبارة رقم الانشغال.
وتصبح بالشكل التالي:

$$N_{\underset{\max}{(F-D)}} \approx \frac{g}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f^{(o)}}{kT}}} \Rightarrow \qquad N_{\underset{\max}{(F-D)}} \Rightarrow N_{M-B} = g\; e^{\frac{\varepsilon_f^{(o)}-\varepsilon}{kT}} = g\; e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}$$

ملاحظة: يتحول الغاز الكمي (بوزونات أو فيرميونات) إلى غاز مكسويل الكلاسيكي في الحالة التي تكون فيها سويات الطاقة متعرضة، أي عندما تكون الطاقة الإشعاعية أكبر بكثير من الطاقة الحرارية.

$$\varepsilon = \hbar\omega >> KT$$

حيث يمكننا في هذه الحالة إهمال الواحد (± 1) الموجود في مقام عبارة التوزع لأن $1 << e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}$ بالشكل التالي:

$$N_{\underset{\max}{qua}} = \frac{g}{e^{-\alpha}e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} \pm 1} \approx \frac{g}{e^{-\alpha}e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}} = g\,e^{\alpha}\,e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}} = g\,e^{\alpha}\,e^{\beta\varepsilon} = g\,e^{\alpha+\beta\varepsilon} = N_{\underset{\max}{clas}}$$

تطبيقات إحصاء فيرمي – ديراك: *Application of Fermi – Dirac Statistics*

الانبعاث الإلكتروني الحراري (صيغة ريتشاردسون – دخمان *Richardson – Duchman formula*):

يُعرف الانبعاث الإلكتروني الحراري *Thermoionic Emission* بأنه عملية تحرير إلكترونات الطبقة السطحية من المادة (معدن أو فلز أو شبه موصل) نتيجةً لاكتسابها طاقة حرارية. وهو يختلف عن الانبعاث الكهرضوئي *Photoelectric –Emission* الذي يحدث عند تواترات وشدات ضوء محددة.

تُحسب الكثافة السطحية للتيار الإلكتروني J_x من العلاقة المعروفة في الكهرباء

$$J_x = \frac{I\,(A)}{S\,(m^2)} = \frac{Q_e\,(col)/t\,(s)}{S\,(m^2)} = \frac{N_e\,q\,(col)/t\,(s)}{V\,(m^3)/\ell_x} = \frac{N_e\,q\,(col)/t\,(s)}{V\,(m^3)/\upsilon_x\,(m/s)\,t\,(s)} = \frac{N_e\,q\,(col)}{V\,(m^3)}\upsilon_x\,(m/s)$$

واختصاراً بالشكل

$$J_x = \frac{N_e}{V}q\,\upsilon_x = n_e\;\upsilon_x\,q \qquad (*)$$

حيث N_e عدد الإلكترونات في الحجم V (شحنة كل منها q) وتتحرك وفق المحور ox عمودياً على السطح S بسرعة υ_x فتقطع مسافة ℓ_x خلال زمن t.

نحسب الكثافة الإلكترونية $n_e = N_e/V$ الواردة في (*) بتطبيق توزع فيرمي – ديراك

$$n_e = \frac{N}{V} = \frac{1}{V}\int f(P)\,g\,(P)\,dP \qquad (**)$$

حيث $f(P) = f(\varepsilon) = \dfrac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(T)}{kT}}+1} = \dfrac{1}{e^{-\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}+1}$ تابع فيرمي واعتبار $\beta = -1/KT$

كما نوجد درجة التحلل $g(P)\,dP$ بدلالة عنصر فراغ الاندفاع الطوري $d\Gamma(P)$. ونضربه بـ 2 نظراً لتمتع الفيرميون بسبين مزدوج $S = \pm\hbar/2$ ، (يعبر الرقم 2 عن تحلل سبين الإلكترون $g_S = 2S+1 = 2$)

واعتبار أن $C = 1/h^3$ (لأن الجسيمات كمية) بالشكل:

$$g(P)\,dP = C\,d\Gamma(P) = 2C\,dq_V\,dp_V = \frac{2V}{h^3}dp_V = \frac{2V}{h^3}dP_x\,dP_y\,dP_Z$$

بالتعويض في (**) عن كلٍ بقيمته واعتبار التكامل على الحجم (الأبعاد الثلاثة) نجد

$$n_e = \frac{2}{h^3}\int_{P_z}\int_{P_y}\int_{P_x}\frac{1}{e^{-\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}+1}dP_x\,dP_y\,dP_Z$$

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم المقتلع هي طاقة حركية فقط

$$\varepsilon = m\,\vartheta^2/2 = p^2/2m \Rightarrow p^2 = 2m\varepsilon \quad \wp \quad p = \sqrt{2m\varepsilon}$$

وهذا يعني أن كمية الحركة وفق المحور ox (باتجاه سطح الانبعاث) ستكون في المجال $p_x \in [\sqrt{2m\varepsilon} \to \infty[$

أما المركبات الأخرى لكمية الحركة فستكون في المجال $p_{y,z} \in [-\infty \to +\infty[$

وبالعودة لـ (*) نجد كثافة التيار الإلكتروني وفق المحور ox

$$J_x = n_e \upsilon_x q = \frac{2q}{h^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\sqrt{2m\varepsilon}}^{+\infty} \frac{\upsilon_x}{e^{-\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}+1} dP_x\, dP_y\, dP_Z$$

لانجاز التكامل على المحور ox (الذي يجري عليه تغير في كمية حركة الإلكترون) نلاحظ من تعريف الطاقة بدلالة مركبات كمية الحركة أن تفاضل الطاقة يكون فقط بالنسبة للمركبة P_x لأن بقية المركبات تعتبر ثوابت

$$\varepsilon = \frac{P^2}{2m} = \frac{P_x^2+P_y^2+P_z^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial P_x} dP_x = \frac{P_x}{m} dP_x = \frac{m\upsilon_x}{m} dP_x = \upsilon_x\, dP_x$$

وباعتبار أن المقدار $\varepsilon' = \sqrt{2m\varepsilon}$ هو طاقة والتعويض نجد

$$J_x = \frac{2q}{h^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\varepsilon'}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{e^{-\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}+1} dP_y\, dP_Z$$

نوجد قيمة التكامل المتعلق بالطاقة الذي نعتبره لا محدود

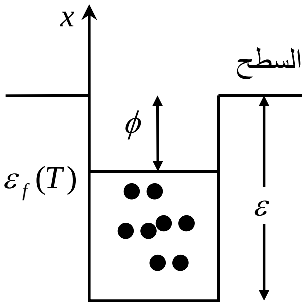
$$\int_{\varepsilon'}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{e^{-\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}+1} = \frac{1}{\beta}\int d\, Ln\,(e^{\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}+1) = \frac{1}{\beta} Ln\,(\underbrace{e^{\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}}_{<<1}+1) \approx \frac{1}{\beta} e^{\beta[\varepsilon'-\varepsilon_f(T)]}$$

حيث استفدنا من التقريب $Ln\,(1+x) \approx x \quad ; x<<1$

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta[\varepsilon-\varepsilon_f(T)]}\, dP_y\, dP_Z$$

لحساب كثافة التيار الإلكتروني J_x المنبعث بفعل التأثيرات الحرارية من سطح معدن (موصل) S نفرض بئر كموني عميق كما بالشكل ()، وعلى الإلكترون القادر على الوصول إلى السطح امتلاك طاقة حرارية ε كافية لتحريره من ذرته (تساوي على الأقل طاقة ارتباط الإلكترون بالذرة) وتُكسبه طاقة حركية لاجتياز البئر والوصول إلى السطح.
تدعى طاقة التحرير هذه وفقاً لآينشتين (في المفعول الكهرضوئي) تابع العمل ϕ *Work function* عندما تمتلك الإلكترونات طاقة قريبة من سوية فيرمي $\varepsilon_f(T)$ (في الدرجة T)، ونكتب هذه العلاقة بالشكل

$$\varepsilon = \varepsilon_f(T) + \phi + P^2/2m \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon - \varepsilon_f(T) = \phi + P^2/2m$$



شكل ( )

وبما أن كمية الحركة المتبقية هي المتعلقة بالمركبتين x و y أي أن علاقة فرق الطاقة

$$\varepsilon - \varepsilon_f(T) = \phi + \frac{P_y^2+P_z^2}{2m}$$

بالتعويض في عبارة التكامل الأخيرة نجد

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta[\phi+\frac{P_y^2+P_z^2}{2m}]}\, dP_y\, dP_Z$$

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3} e^{\beta\phi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{P_y^2}{2m\,KT}}\, dP_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{P_z^2}{2m\,KT}}\, dP_Z$$

وبالاستفادة من تكاملات بواسون

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = 2\int_{0}^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = 2\left(\frac{0!}{0!\,2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad ; n=0 \;(\text{زوجي})$$

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3} e^{-\phi/KT}\sqrt{2\pi\, m KT}\sqrt{2\pi\, m KT}$$

وباعتبار $\beta = |1/KT|$ نجد صيغة ريتشاردسون – دخمان المطلوبة

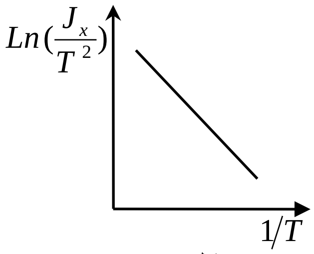
$$J_x = \frac{4\pi\, m\, q}{\beta^2 h^3} e^{-\phi/KT} = \frac{4\pi\, m\, q}{h^3} (KT)^2\; e^{-\phi/KT}$$

أو بالشكل

$$J_x = \frac{4\pi\, m K^2 q}{h^3} T^2\; e^{-\phi/KT} = \lambda\, T^2\; e^{-\phi/KT} \qquad ;\ \lambda = \frac{4\pi\, m_e K^2 q_e}{h^3} \approx 1{,}2\times 10^6\ A/m^2 k^2$$

لحساب تابع العمل ϕ نأخذ الصيغة $J_x = \lambda\, T^2\; e^{-\phi/KT}$ بالشكل $J_x/T^2 = \lambda\;\; e^{-\phi/KT}$ ثم نأخذ لغارتم الطرفين

$Ln\,(J_x/T^2) = Ln\lambda - \dfrac{\phi}{KT}$ وهي علاقة خطية (معادلة مستقيم $y = -\dfrac{\phi}{K} x + \underbrace{Ln\lambda}_{c}$)



شكل ( )

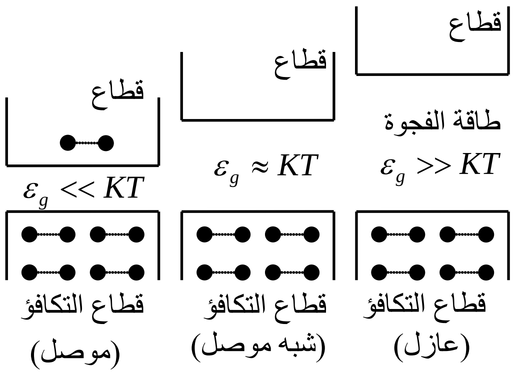
لرسم العلاقة الخطية $Ln\,(J_x/T^2) = f\,(\frac{1}{T})$ (المستقيم) تُقاس قيم كثافة التيار J_x عند مختلف درجات الحرارة T
ثم نحسب ميل المستقيم M من الرسم ونساويه بأمثال x فنجد

$$M = -\frac{\phi}{K} \quad \Rightarrow \quad \phi = -M\, K$$

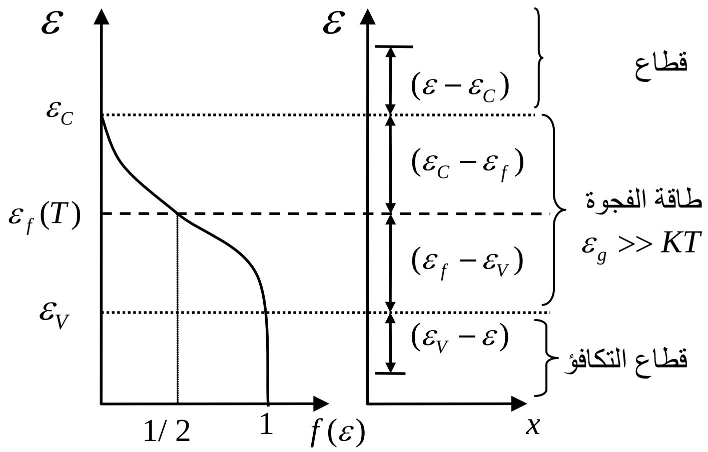
أشباه المواصلات:

تسلك أشباه الموصلات سلوك العوازل عند الدرجات المنخفضة وسلوك الموصلات عند الدرجات المرتفعة.

وكما هو معلوم فإن عرض القطاع المحظور ε_g (الفجوة الطاقية) بين قطاعي التكافؤ المملوء بالإلكترونات وقطاع التوصيل (الذي يحوي على بعض الإلكترونات في النواقل وفارغ تماماً في أشباه الموصلات والعوازل) يحدد طبيعة المواد كما هو موضح بالشكل ().



شكل ( )



شكل ( )

<u>تحديد موقع سوية فيرمي في أشباه الموصلات:</u>

عند ارتفاع درجة الحرارة في أشباه الموصلات وانتقال الإلكترون من قطاع التكافؤ *Valency band* إلى قطاع التوصيل *Conduction band* يترك مكانه فراغاً يدعى ثقب *Hole* موجب الشحنة e^+ يتحرك في قطاع التكافؤ.

يُعطى احتمال انشغال سوية الطاقة ε في قطاع التوصيل بإلكترون (في الدرجة T) وفق تابع فيرمي الاحتمالي بالشكل

$$f_e(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(T)}{kT}} + 1}$$

يمتلك الإلكترون في قطاع التوصيل طاقة $(\varepsilon - \varepsilon_C)$ كما هو موضح بالشكل (). فتكون درجة تحلل السوية ε (بعد الضرب بـ 2 لأنها إلكترونات)

$$g_e(\varepsilon)\, d\varepsilon = C\, d\Gamma(\varepsilon) = 4\pi V \left(\frac{2\, m_e}{h^2}\right)^{3/2} (\varepsilon - \varepsilon_C)^{1/2}\, d\varepsilon$$

نحسب الكثافة الإلكترونية $n_e = N_e/V$ في قطاع التوصيل في المجال $[\varepsilon_C \to \infty]$ بتطبيق توزع فيرمي – ديراك التالي ومن ثم التعويض عن كل بقيمته

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{1}{V}\int_{\varepsilon_C}^{\infty} f_e(\varepsilon)\, g_e(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$n_e = 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2}\right)^{3/2} \int_{\varepsilon_C}^{\infty} \frac{(\varepsilon-\varepsilon_C)^{1/2}}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(T)}{KT}}+1}\, d\varepsilon$$

وبما أن فارق الطاقة $\varepsilon - \varepsilon_f(T) >> KT$ يمكن إهمال الواحد في المقام

$$n_e \approx 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2}\right)^{3/2} \int_{\varepsilon_C}^{\infty} \frac{(\varepsilon-\varepsilon_C)^{1/2}}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(T)}{KT}}}\, d\varepsilon$$

$$n_e \approx 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2}\right)^{3/2} e^{\frac{\varepsilon_f(T)}{KT}} \int_{\varepsilon_C}^{\infty} (\varepsilon-\varepsilon_C)^{1/2}\, e^{-\frac{\varepsilon}{KT}}\, d\varepsilon$$

وبطرح وإضافة المقدار ε_C في أس التابع النيبيري

$$n_e \approx 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2}\right)^{3/2} e^{\frac{\varepsilon_f(T)}{KT}} \int_{\varepsilon_C}^{\infty} (\varepsilon-\varepsilon_C)^{1/2}\, e^{-\frac{\varepsilon-\varepsilon_C+\varepsilon_C}{KT}}\, d\varepsilon$$

وبإخراج المقدار $e^{-\varepsilon_C/KT}$ خارج التكامل

$$n_e \approx 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon_C-\varepsilon_f(T)}{KT}} \int_{\varepsilon_C}^{\infty} (\varepsilon-\varepsilon_C)^{1/2}\, e^{-\frac{\varepsilon-\varepsilon_C}{KT}}\, d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتكامل غاما وذلك بفرض

$$x = \frac{\varepsilon-\varepsilon_C}{KT} \;\Rightarrow\; (\varepsilon-\varepsilon_C)^{1/2} = (KT)^{1/2}\, x^{1/2} \quad \wp \quad d\varepsilon = KT\, dx$$

وبمراعاة حدود التكامل نجد

$$n_e \approx 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2}\right)^{3/2} (KT)^{3/2}\, e^{-\frac{\varepsilon_C-\varepsilon_f(T)}{KT}} \underbrace{\int_0^{\infty} x^{1/2}\, e^{-x}\, dx}_{\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$n_e \approx \underbrace{2\left(\frac{2\pi\, m_e\, KT}{h^2}\right)^{3/2}}_{n_{CB}} e^{-\frac{\varepsilon_c-\varepsilon_f(T)}{KT}} \approx n_{CB}\, e^{-\frac{\varepsilon_c-\varepsilon_f(T)}{KT}} \qquad (*)$$

يدعى المقدار $n_{CB} = 2\left(\frac{2\pi\, m_e\, KT}{h^2}\right)^{3/2}$ التركيز الكمي للإلكترونات في قطاع التوصيل CB في الدرجة T

تشير النتيجة إلى أن الكثافة الإلكترونية في قطاع التوصيل متناسبة طرداً مع $T^{3/2}$ (تابعة لدرجة الحرارة).

وبنفس الأسلوب نحسب كثافة الثقوب $n_h = N_h/V$ في قطاع التكافؤ

فيكون احتمال انشغال سوية الطاقة ε في قطاع التكافؤ بثقب (في الدرجة T) وفق تابع فيرمي الاحتمالي بالشكل

$$f_h(\varepsilon)=1-f_e(\varepsilon)=1-\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(T)}{kT}}+1}=\frac{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(T)}{kT}}}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(T)}{kT}}+1}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_f(T)-\varepsilon}{kT}}+1}$$

حيث ضربنا البسط والمقام بمرافق النيبيري

يمتلك الإلكترون في قطاع التكافؤ طاقة $(\varepsilon_V-\varepsilon)$ كما هو موضح بالشكل السابق (). فتكون درجة تحلل السوية ε (بعد الضرب بـ 2 لأنها ثقوب كما هو الحال في الإلكترونات)

$$g_h(\varepsilon)\,d\varepsilon=C\,d\Gamma(\varepsilon)=4\pi V\left(\frac{2m_h}{h^2}\right)^{3/2}(\varepsilon_V-\varepsilon)^{1/2}d\varepsilon$$

بتطبيق توزع فيرمي – ديراك في المجال $]-\infty\to 0[$ (لأن قطاع التكافؤ في الأسفل وعريض) ومن ثم التعويض عن كل بقيمته

$$n_h=\frac{N_h}{V}=\frac{1}{V}\int_{-\infty}^{0}f_h(\varepsilon)\,g_h(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

$$n_h=4\pi\left(\frac{2m_h}{h^2}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{0}\frac{(\varepsilon_V-\varepsilon)^{1/2}}{e^{\frac{\varepsilon_f(T)-\varepsilon}{KT}}+1}d\varepsilon$$

وبما أن فارق الطاقة $\varepsilon_f(T)-\varepsilon>>KT$ يمكن إهمال الواحد في المقام

$$n_h=4\pi\left(\frac{2m_h}{h^2}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{0}\frac{(\varepsilon_V-\varepsilon)^{1/2}}{e^{\frac{\varepsilon_f(T)-\varepsilon}{KT}}}d\varepsilon$$

$$n_h=4\pi\left(\frac{2m_h}{h^2}\right)^{3/2}e^{-\frac{\varepsilon_f(T)}{KT}}\int_{-\infty}^{0}(\varepsilon_V-\varepsilon)^{1/2}e^{-\frac{-\varepsilon}{KT}}d\varepsilon$$

وبإضافة وطرح المقدار ε_V في أس التابع النيبيري

$$n_h=4\pi\left(\frac{2m_h}{h^2}\right)^{3/2}e^{-\frac{\varepsilon_f(T)}{KT}}\int_{-\infty}^{0}(\varepsilon_V-\varepsilon)^{1/2}e^{-\frac{\varepsilon_V-\varepsilon-\varepsilon_V}{KT}}d\varepsilon$$

وبإخراج المقدار $e^{\varepsilon_V/KT}$ خارج التكامل

$$n_h=4\pi\left(\frac{2m_h}{h^2}\right)^{3/2}e^{\frac{\varepsilon_V-\varepsilon_f(T)}{KT}}\int_{-\infty}^{0}(\varepsilon_V-\varepsilon)^{1/2}e^{-\frac{\varepsilon_V-\varepsilon}{KT}}d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتكامل غاما وذلك بفرض

$$x=\frac{\varepsilon_V-\varepsilon}{KT}\;\Rightarrow\;(\varepsilon_V-\varepsilon)^{1/2}=(KT)^{1/2}x^{1/2}\;\wp\;d\varepsilon=-KT\,dx$$

وبمراعاة حدود التكامل لتصبح في المجال $]0\to\infty[$ (بسبب الإشارة السالبة) نجد

$$n_h\approx 4\pi\left(\frac{2m_h}{h^2}\right)^{3/2}(KT)^{3/2}e^{\frac{\varepsilon_V-\varepsilon_f(T)}{KT}}\underbrace{\int_0^{\infty}x^{1/2}e^{-x}dx}_{\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$n_h\approx\underbrace{2\left(\frac{2\pi m_h KT}{h^2}\right)^{3/2}}_{n_{VB}}e^{\frac{\varepsilon_V-\varepsilon_f(T)}{KT}}\approx n_{VB}\,e^{\frac{\varepsilon_V-\varepsilon_f(T)}{KT}}\qquad(**)$$

يدعى المقدار $n_{VB} = 2\left(\frac{2\pi\, m_h\, KT}{h^2}\right)^{3/2}$ التركيز الكمي للثقوب في قطاع التكافؤ VB في الدرجة T

تشير النتيجة إلى أن كثافة الثقوب في قطاع التكافؤ متناسبة طرداً مع $T^{3/2}$ (تابعة لدرجة الحرارة).

بنسبة العلاقتين (*) و (**)

$$\frac{n_e}{n_h} \approx \left(\frac{m_e}{m_h}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon_C - \varepsilon_f(T)}{KT}}\, e^{-\frac{\varepsilon_V - \varepsilon_f(T)}{KT}} = \left(\frac{m_e}{m_h}\right)^{3/2} e^{\frac{2\,\varepsilon_f(T) - (\varepsilon_V + \varepsilon_C)}{KT}}$$

بأخذ لغارتم الطرفين

$$Ln\frac{n_e}{n_h} \approx \frac{3}{2} Ln\frac{m_e}{m_h} + \frac{2\,\varepsilon_f(T) - (\varepsilon_V + \varepsilon_C)}{KT}$$

وباعتبار $m_e \approx m_h$ و $n_e \approx n_h$ (عند نفس درجة الحرارة) نجد (باعتبار $Ln1 = 0$)

$$\varepsilon_f(T) \approx \frac{1}{2}(\varepsilon_V + \varepsilon_C)$$

وبما أن عرض فجوة الطاقة (القطاع المحظور) $\varepsilon_C = \varepsilon_g + \varepsilon_V \;\; \Rightarrow \;\; \varepsilon_g = \varepsilon_C - \varepsilon_V$ وبالتعويض

$$\varepsilon_f(T) \approx \frac{1}{2}(2\,\varepsilon_V + \varepsilon_g)$$

$$\varepsilon_f(T) \approx \varepsilon_V + \frac{1}{2}\varepsilon_g$$

أي أن سوية فيرمي في أشباه الموصلات (أنصاف النواقل) تقع في منتصف قطاع التكافؤ (فجوة الطاقة) تماماً وقيمتها لا تعتمد على درجة الحرارة. وهذا واضح تماماً في الرسم البياني الموضح في الشكل السابق، كما يؤكد على أن سوية فيرمي $\varepsilon_f(T)$ عند الدرجة T تقابل القيمة $f(\varepsilon) = \frac{1}{2}$ لتابع فيرمي الاحتمالي.

ملاحظة: نعتبر كثافة الأيونات (حاملات الشحنة) n_i مساوية لكثافة كل من الإلكترونات والثقوب $n_e \approx n_h \approx n_i$

فيكون $n_i^{\,2} = n_e \times n_h$

$$n_i^{\,2} = \underbrace{2\left(\frac{2\pi\, m_e\, KT}{h^2}\right)^{3/2}}_{n_{CB}} \underbrace{2\left(\frac{2\pi\, m_h\, KT}{h^2}\right)^{3/2}}_{n_{VB}} e^{\frac{\varepsilon_V - \varepsilon_f(T)}{KT}}\, e^{-\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_f(T)}{KT}} \approx n_{CB}\, n_{VB}\, e^{-\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_V}{KT}}$$

$$n_i^{\,2} = 4\left(\frac{2\pi\, KT}{h^2}\right)^{3} (m_e\, m_h)^{3/2}\, e^{-\frac{\varepsilon_g}{KT}} \approx n_{CB}\, n_{VB}\, e^{-\frac{\varepsilon_g}{KT}}$$

$$n_i = 2\left(\frac{2\pi\, KT}{h^2}\right)^{3/2} (m_e\, m_h)^{3/4}\, e^{-\frac{\varepsilon_g}{2KT}} \approx n_{CB}\, n_{VB}\, e^{-\frac{\varepsilon_g}{2KT}}$$

تطور حياة النجوم: Stellar evolution

تولد النجوم عادةً عن تكاثف (تقلص) مادة السحابة البينجمية (السديم الغازي عالي الكثافة) المكونة من نسبة عالية من الهيدروجين ونسبة قليلة من الهليوم وبعض العناصر الأخرى. وبفعل محصلة قوى الجذب الثقالية الهائلة يزداد التقلص وترتفع قيم الضغط والحرارة في مركز السديم إلى قيم قصوى، تسمح ببدء تفاعلات الاندماج النووي، التي يتحول فيها الهيدروجين $^{1}_{1}H$ إلى هليوم مستقر $^{4}_{2}He$.

$$4\,{}^{1}_{+1}H \rightarrow {}^{4}_{+2}He + 2\,{}^{0}_{+1}e + \nu + \gamma + Q\,MeV$$

يعمل النجم كمفاعل نووي ناشر للطاقة (حرارة وإشعاع) مليارات من السنين، إلى أن ينتهي وقوده (الهيدروجين).
يستقر النجم في حالة من التوازن والثبات بفعل تساوي قوتي الثقالة التي تعمل على انهيار النجم نحو داخله، وقوة ضغط الإشعاع الناجمة عن الانفجارات النووية الشديدة في باطنه.
عند نفاذ الهيدروجين تنتهي تفاعلات اندماج الهيدروجين ويبدأ النجم بالانكماش على نفسه بفعل تفوق قوى الثقالة على قوى الضغط الداخلي، يدعى ضغط الإشعاع المعاكس لضغط الجاذبية في هذه المرحلة ضغط غاز فيرمي.
يسبب انهيار النجم على نفسه ضغطاً هائلاً وارتفاعاً كبيراً في درجة الحرارة، الأمر الذي يسمح ببدء تفاعلات اندماج الهليوم الجديدة لتكوين البيريليوم ثم الكربون كما يلي:

$$2\,{}^{4}_{+2}He \rightarrow {}^{8}_{4}Be + Q\,MeV$$

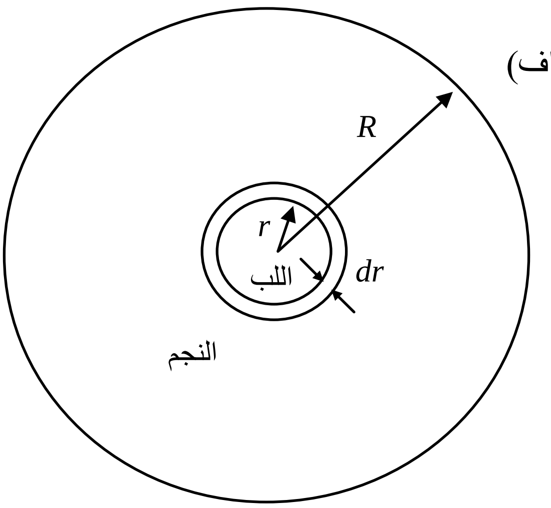
$${}^{4}_{+2}He + {}^{8}_{+4}Be \rightarrow {}^{12}_{6}C + Q\,MeV$$

وعند نفاذ وقود الهليوم (انتهاء تفاعلات اندماج الهليوم) يتكدس الكربون (كناتج تفاعل) في اللب، ويعود النجم لينكمش وينهار على نفسه ثانية. ويتقابل ضغط الثقالة مع ضغط غاز فيرمي المعاكس.

إذا كانت كتلة النجم خفيفة (في المجال $M_\odot$ [0,4-4] من كتلة الشمس) فإن الضغط الناتج يكون أقل من الضغط اللازم لرفع درجة حرارة اللب إلى الدرجة اللازمة لبدء تفاعلات اندماج الكربون الجديدة (التي تنتهي بتكوين عنصر الحديد)، فيتابع النجم الخفيف الانهيار على نفسه ويتشكل في اللب جرم صغير الحجم عالي الكثافة، مادته منحلة الكترونياً (*electron degenerate*)، أي مكونة من نوى الكربون فقط (ذرات كربون دون إلكترونات)، يدعى القزم الأبيض (*white dwarf*)، كتلته $0,8\ M_\odot$ وهي أقل من حد تشاندرا سيخار *Chandrasekhar limit* البالغ $1,44\ M_\odot$.
وباستمرار الانهيار يعمل ضغط غاز فيرمي المعاكس لضغط الثقالة على تشظي النجم في انفجار عنيف جداً يدعى السوبرنوفا ولا يبقى منه سوى القزم الأبيض عالي الكثافة والحرارة.

أما إذا كانت كتلة النجم متوسطة (في المجال $M_\odot$ [4-10]) فإن الضغط الناتج يرفع درجة حرارة اللب إلى الدرجة اللازمة لبدء تفاعلات اندماج الكربون الجديدة (التي تنتهي بتكوين عنصر الحديد). وينتهي الأمر بتشكل الجرم (القزم) النتروني ذي الكتلة $M_\odot$ [3 - 1,44] والنوى المكونة من النترونات فقط

أما إذا كانت كتلة النجم كبيرة (تفوق $10\ M_\odot$) فإن الضغط الناتج يكون كبيراً جداً لدرجة سحق المادة النترونية وتقليص حجمها للصفر. فتتغير الخواص الفيزيائية المعهودة للمادة، وتدعى المادة الناتجة بالمتفرد *Singularity* (الثقب الأسود).
يتمتع الثقب بكثافة وقوة جذب هائلتين، يستطيع بهما ابتلاع كافة أشكال المادة والطاقة، حتى أن الضوء لا يستطيع الفرار منه. تقع كتلة الثقب الأسود وفقاً لتشاندرا سيخار فوق $3\ M_\odot$.
نعود لحساب ضغط غاز فيرمي حيث نعتبر فرضيتين
الأولى: السديم النجمي كروي الشكل
الثانية: كثافة مادة النجم ρ ثابتة (تأخذ قيمة واحدة في اللب وعند الأطراف)
نحسب طاقة التجاذب الكتلي بين كتلة اللب M وباقي الكتلة dM'



$$dU_g = -G\frac{M\,dM'}{r} \qquad (*)$$

حيث G ثابت التناسب الكوني $G = 6,67\times10^{-11}\ N\,m^2/kg^2$

لدينا $\rho = \dfrac{M}{V} \Rightarrow M = \rho V = \rho\dfrac{4}{3}\pi r^3$

$$d\,M' = \rho\,d\,V' = \rho\,d\,(\frac{4}{3}\pi r^3) = 4\pi\,\rho\,r^2 dr$$

بالتعويض في (*)

$$dU_g = -G\frac{(\rho\frac{4}{3}\pi r^3)(4\pi\,\rho\, r^2 dr)}{r} = -G\frac{(4\pi\,\rho)^2}{3} r^4 dr$$

وبالمكاملة (على كامل نصف قطر النجم)

$$U_g = -G\frac{(4\pi\,\rho)^2}{3}\int_0^R r^4 dr = -G\frac{(4\pi\,\rho)^2}{15} R^5 \qquad (**)$$

وبما أن $\rho = \frac{M}{V} = \frac{N\,m_n}{V}$ حيث M كتلة النجم و N عدد النوكليونات (بروتونات ونترونات) و m_n كتلة النوكليون الواحد

وكذلك $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \;\;\Rightarrow\;\; R = (\frac{3V}{4\pi})^{1/3}$

وبالتعويض في (**) عن كل بقيمته نجد

$$U_g = -G\frac{(4\pi\,N\,m_n)^2}{15V^2}(\frac{3V}{4\pi})^{5/3} = -G\frac{(4\pi)^2(N\,m_n)^2}{15V^2}(\frac{3V}{4\pi})^2(\frac{3V}{4\pi})^{-1/3} = -\frac{3}{5}G(N\,m_n)^2(\frac{4\pi}{3V})^{1/3}$$

$$U_g = -\frac{3}{5}G(N\,m_n)^2(\frac{4\pi}{3})^{1/3}V^{-1/3}$$

نحسب الضغط الناجم عن الطاقة الثقالية من العلاقة

$$P_g = -\frac{\partial U_g}{\partial V} = \frac{1}{5}G(N\,m_n)^2(\frac{4\pi}{3})^{1/3}V^{-4/3} \qquad (A)$$

وبحساب ضغط غاز فيرمي من العلاقة $P_F = \frac{2}{5}\,\varepsilon_{f(0)}\,\frac{N_e}{V}$ حيث N_e عدد الإلكترونات و m_e كتلة كل منها

واعتبار أن إلكترونات السديم تمتلك سوية فيرمي للطاقة عند درجة الصفر المطلق $\varepsilon_{f(0)} = \frac{h^2}{2m_e}\left(\frac{3N_e}{8\pi V}\right)^{2/3}$ فنجد

$$P_F = \frac{2}{5}\,\frac{N_e}{V}\,\frac{h^2}{2m_e}\left(\frac{3N_e}{8\pi V}\right)^{2/3} = \frac{2}{5}\,\frac{\pi}{3}(\frac{3}{\pi}\,\frac{N_e}{V})\frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3N_e}{\pi V}\right)^{2/3} = \frac{1}{5}\,\frac{\pi}{3}\,\frac{h^2}{4m_e}\left(\frac{3N_e}{\pi V}\right)^{5/3}$$

$$P_F = \frac{1}{5}\,\frac{\pi}{3}\,\frac{4\pi^2\hbar^2}{4m_e}\left(\frac{3N_e}{\pi V}\right)^{5/3} \qquad (\hbar = h/2\pi \text{ اعتبرنا})$$

$$P_F = \frac{\pi^3\hbar^2}{15m_e}\left(\frac{3N_e}{\pi}\right)^{5/3} V^{-5/3}$$

فإذا اعتبرنا أن عدد الإلكترونات يساوي نصف عدد النوكليونات ($N_e = N/2$) لأن اندماج الهيدروجين يعطي الهليوم في الحالة المؤينة (4 نوكليونات و2 إلكترون لكل ذرة هليوم) فيصبح الضغط الفيرميوني

$$P_F = \frac{\pi^3\hbar^2}{15m_e}\left(\frac{3N}{2\pi}\right)^{5/3} V^{-5/3} \qquad (B)$$

وبمساواة الضغطين (الثقالي والفيرميوني) أي العلاقتين (A) و (B) نحصل على حجم النجم كما يلي

$$\frac{1}{5}G(N\,m_n)^2(\frac{4\pi}{3})^{1/3}V^{-4/3} = \frac{\pi^3\hbar^2}{15m_e}\left(\frac{3N}{2\pi}\right)^{5/3} V^{-5/3}$$

$$\frac{V^{-4/3}}{V^{-5/3}} = \frac{5}{G\,N^2\,m_n^2}(\frac{4\pi}{3})^{-1/3}\,\frac{\pi^3\hbar^2}{15m_e}\times\frac{3^2\times 3^{-1/3}N^2\,N^{-1/3}}{(2\pi)^2\times(2\pi)^{-1/3}}$$

$$V^{1/3}=\frac{1}{G\ m_n^2}(4\pi)^{-1/3}\frac{\pi\hbar^2}{3m_e}\times\frac{3^2\times N^{-1/3}}{4\times(2\pi)^{-1/3}}$$

$$V^{1/3}=\frac{1}{G\ m_n^2}(2^2)^{-1/3}\frac{\pi\hbar^2}{m_e}\times\frac{3\times N^{-1/3}}{4\times 2^{-1/3}}=\frac{1}{G\ m_n^2}\frac{1}{2^{2/3}}\frac{\pi\hbar^2}{m_e}\times\frac{3}{4\times 2^{-1/3}N^{1/3}}$$

$$V^{1/3}=\frac{3\pi\hbar^2}{4G\ m_e m_n^2\ (2N)^{1/3}}$$

ومنه نحصل على نصف القطر الحرج للنجم من علاقة الحجم التالية

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3\quad\Rightarrow\quad R=(\frac{3V}{4\pi})^{1/3}=3^{1/3}\,2^{-2/3}\,\pi^{-1/3}V^{1/3}$$

$$R=3^{1/3}\,2^{-2/3}\,\pi^{-1/3}\frac{3\pi\hbar^2}{4G\ m_e m_n^2\ (2N)^{1/3}}$$

$$\boxed{R=\frac{3(3\pi^2)^{1/3}\hbar^2}{8G\ m_e m_n^2\ N^{1/3}}}\qquad\text{(C)}$$

يعبر نصف القطر الحرج للنجم عن نصف قطر القزم الأبيض الذي سينتهي إليه هذا النجم

ملاحظة: يمكن حساب R بدلالة N بعد احتساب الثوابت على النحو التالي

$$R=\frac{3(3\times 9{,}87)^{1/3}(1{,}05\times10^{-34})^2}{8\times6{,}67\times10^{-11}\times9{,}1\times10^{-31}\times(1{,}67\times10^{-27})^2\ N^{1/3}}$$

$$\approx\frac{10{,}2\times10^{-68}}{1354{,}2\times10^{-96}N^{1/3}}\approx\frac{7{,}5\times10^{25}}{N^{1/3}}$$

مثال: احسب نصف قطر القزم الأبيض الذي ستنتهي إليه شمسنا (الشمس نجم خفيف كتلته $M_{Sun}=2\times10^{30}\ kg$)

الحل: نحسب عدد النوكليونات بقسمة كتلة الشمس على كتلة النوكليون الواحد

$$N=\frac{M_{Sun}}{m_n}=\frac{2\times10^{30}\ kg}{1{,}67\times10^{-27}\ kg}\approx1{,}2\times10^{57}\ Noclion$$

بالتعويض في القانون نجد

$$R_{W\,d}\approx\frac{7{,}5\times10^{25}}{(1{,}2\times10^{57})^{1/3}}\approx\frac{7{,}5\times10^{25}}{1{,}06\times10^{19}}\approx7\times10^6\ m\approx7000\ km$$

و هذا يعني أن الشمس ستتحول لقزم أبيض بحجم الأرض تقريباً (لأن $R_{Earth}\approx6400\ km$)

لكن كتلته الحجمية $\rho_{W\,d}=\frac{M_{Sun}}{V_{W\,d}}=\frac{2\times10^{30}}{\frac{4}{3}\pi R_{W\,d}^3}=\frac{2\times10^{30}\ kg}{\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(7\times10^6)^3\ m^3}=\frac{10^{30}}{718{,}6\times10^{18}}\approx1{,}4\times10^9\ kg/m^3$

و هي بالمقارنة مع الكتلة الحجمية للأرض $\rho_{Eaurth}\approx5\times10^3\ kg/m^3$

$$\frac{\rho_{W\,d}}{\rho_{Eaurtth}}=\frac{1{,}4\times10^9\ kg/m^3}{5\times10^3\ kg/m^3}\approx2{,}8\times10^5$$

فإذا علمنا أن كتلة الأرض $M_{Ear}=6\times10^{24}\ kg$ نجد أن كتلة الأرض تعادل كتلة حجم من مادة القزم الأبيض قدره

$$\frac{M_{Ear}}{\rho_{W\,d}}=\frac{6\times10^{24}\ kg}{1{,}4\times10^9\ kg/m^3}\approx4{,}3\times10^{15}\ m^3$$

علاقة نصف القطر الحرج للنجم النيتروني:

بالعودة لعبارة الضغط الفيرميوني (B) حيث نعتبر هنا أن عدد الإلكترونات يساوي عدد النوكليونات ($N_e = N$) وكتلة الإلكترون تساوي كتلة النترون $m_e = m_n$ ومن ثم نساوي بين ضغطي الثقالة و الفيرميوني كما يلي

$$\frac{1}{5}G(N\,m_n)^2(\frac{4\pi}{3})^{1/3}V^{-4/3}=\frac{\pi^3\hbar^2}{15m_n}\left(\frac{3N}{\pi}\right)^{5/3}V^{-5/3}$$

$$\frac{V^{-4/3}}{V^{-5/3}}=\frac{5}{G\,N^2\,m_n^3}(\frac{4\pi}{3})^{-1/3}\frac{\pi^3\hbar^2}{15}\times\frac{3^2\times3^{-1/3}N^2\,N^{-1/3}}{\pi^2\times\pi^{-1/3}}$$

$$V^{1/3}=\frac{1}{G\,m_n^3}(4\pi)^{-1/3}\frac{\pi\hbar^2}{3}\times\frac{3^2\times N^{-1/3}}{\pi^{-1/3}}$$

$$V^{1/3}=\frac{3\pi\hbar^2(4N)^{-1/3}}{G\,m_n^3}$$

ومنه نحصل على نصف القطر الحرج للنجم النتروني من علاقة الحجم التالية

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3\ \Rightarrow\ R=(\frac{3V}{4\pi})^{1/3}=3^{1/3}\,4^{-1/3}\,\pi^{-1/3}\,V^{1/3}$$

$$R=3^{1/3}\,4^{-1/3}\,\pi^{-1/3}\frac{3\pi\hbar^2(4N)^{-1/3}}{G\,m_n^3}=\left(\frac{3^3\times3\pi^2}{16}\right)^{1/3}\frac{\hbar^2}{G\,m_n^3\,N^{1/3}}$$

$$\boxed{R_{net}=\left(\frac{81\pi^2}{16}\right)^{1/3}\frac{\hbar^2}{G\,m_n^3\,N^{1/3}}}\qquad\text{(D)}$$

ملاحظة: يمكن حساب R بدلالة N بعد احتساب الثوابت على النحو التالي

$$R_{net}=\left(\frac{81\times9{,}87}{16}\right)^{1/3}\frac{(1{,}05\times10^{-34})^2}{6{,}67\times10^{-11}\times(1{,}67\times10^{-27})^3\ N^{1/3}}$$

$$\approx\frac{3{,}68\times1{,}1\times10^{-68}}{31\times10^{-92}\,N^{1/3}}\approx\frac{11{,}87\times10^{22}}{N^{1/3}}$$

مثال: احسب نصف قطر النجم النتروني الذي سينتهي إليه نجم متوسط كتلته $M=7M_{Sun}=14\times10^{30}\ kg$

الحل: نحسب عدد النوكليونات بقسمة كتلة النجم على كتلة النوكليون الواحد

$$N=\frac{M}{m_n}=\frac{14\times10^{30}\ kg}{1{,}67\times10^{-27}\ kg}\approx8{,}4\times10^{57}\ Noclion$$

بالتعويض في القانون نجد

$$R_n\approx\frac{11{,}87\times10^{22}}{(8{,}4\times10^{57})^{1/3}}\approx\frac{11{,}87\times10^{22}}{2{,}03\times10^{19}}\approx5{,}84\times10^3\ m\approx6\ km$$

الكتلة الحجمية للنجم النتروني

$$\rho_{net}=\frac{M_{net}}{V_{net}}=\frac{14\times10^{30}}{\frac{4}{3}\pi R_{net}^3}=\frac{14\times10^{30}\ kg}{\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(5{,}84\times10^3)^3\ m^3}=\frac{14\times10^{30}}{834{,}6\times10^9}=1{,}67\times10^{19}\ kg/m^3$$

و هي بالمقارنة مع الكتلة الحجمية للأرض $\rho_{Eaurtth}\approx5\times10^3\ kg/m^3$

$$\frac{\rho_{net}}{\rho_{Eaurtth}}=\frac{1{,}67\times10^{19}\ kg/m^3}{5\times10^3\ kg/m^3}\approx3{,}34\times10^{15}$$

فإذا علمنا أن كتلة الأرض $M_{Ear}=6\times10^{24}\ kg$ نجد أن كتلة الأرض تعادل كتلة حجم من مادة النجم النتروني

$$V=\frac{M_{Ear}}{\rho_{net}}=\frac{6\times10^{24}\ kg}{1{,}67\times10^{19}\ kg/m^3}\approx3{,}6\times10^5\ m^3$$

و هذا الحجم يعادل كرة نصف قطرها

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3\ \Rightarrow\ R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}=\sqrt[3]{\frac{3\times3{,}6\times10^5}{12{,}56}}\approx44\ m$$

علاقة نصف القطر الحرج للثقب الأسود:

من المعلوم أن للفوتون كتلة حركية نحسبها من العلاقة

$$hf=mc^2\ \Rightarrow\ m=\frac{hf}{c^2}=\frac{hc}{c^2\lambda}=\frac{h}{c\lambda}$$

وأن عدم قدرة الضوء (الفوتونات) من الفرار (الهروب) من الثقب الأسود (المتفرد *Singularity*) يعني تحقق العلاقة "الطاقة الحركية للفوتون = طاقة التجاذب الكامنة"

<u>كلاسيكياً:</u> نفرض υ_{Esc} سرعة إفلات الفوتون من الثقب ذو الكتلة M ونصف القطر R فنجد

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{Esc}^2=G\frac{mM}{R_{Sing}}\ \Rightarrow\ \upsilon_{Esc}=\sqrt{\frac{2GM}{R_{Sing}}}$$

وبما أن السرعة الكونية القصوى هي سرعة الضوء (سرعة الضوء ذات قيمة ثابتة c)

نجد باستبدال $\upsilon_{Esc}\rightarrow c$ وتربيع العلاقة السابقة علاقة نصف قطر الثقب الأسود

$$R_{Sing}=\frac{2GM}{c^2}$$

<u>نسبوياً:</u>

$$mc^2=G\frac{mM}{R_{Sing}}\ \Rightarrow\ R_{Sing}=\frac{GM}{c^2}$$

مثال: احسب نصف قطر ثقب أسود كتلته $M=15M_{Sun}=30\times10^{30}\ kg$ علماً أن $G=6{,}67\times10^{-11}\ N\,m^2/kg^2$

الحل:
$$R_{Sing}=\frac{GM}{c^2}=\frac{6{,}67\times10^{-11}\ N\,m^2/kg^2\times30\times10^{30}\ kg}{(3\times10^8)^2\ m^2/s^2}\approx22{,}23\times10^3\ m\approx22\ km$$

الكتلة الحجمية للثقب الأسود

$$\rho_{Sing}=\frac{M_{Sing}}{V_{Sing}}=\frac{30\times10^{30}}{\frac{4}{3}\pi R_{Sing}^3}=\frac{30\times10^{30}\ kg}{\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(22\times10^3)^3\ m^3}=\frac{30\times10^{30}}{44{,}6\times10^{12}}=6{,}7\times10^{17}\ kg/m^3$$

تمارين عامة

متوسط الطاقة الداخلية للجملة في طاقمها (متوسط الطاقة الداخلية للنسخة):

$$\overline{U} = \frac{U_\Omega}{\Omega} = \frac{\sum_i W_i U_i}{\sum_i W_i} = \lim_{\beta \to 0} \frac{\sum_i W_i U_i e^{\beta U_i}}{\sum_i W_i e^{\beta U_i}} = \frac{1}{Z_\Omega}\frac{\partial Z_\Omega}{\partial \beta} \qquad ; Z_\Omega = \sum_i W_i e^{\beta U_i}$$

متوسط عدد الجسيمات في السوية:

$$\overline{N_i} = \frac{N_\Omega}{\Omega} = \frac{\sum_i W_i N_i}{\sum_i W_i} = \lim_{\beta \to 0} \frac{\sum_i W_i N_i e^{\beta U_i}}{\sum_i W_i e^{\beta U_i}} = \frac{\sum_i W_i N_i e^{\beta N_i \varepsilon_i}}{Z_\Omega} = \frac{1}{\beta Z_\Omega}\left(\frac{\partial Z_\Omega}{\partial \varepsilon_i}\right)_{\varepsilon_j \; ; \; i \neq j} \qquad ; Z_\Omega = \sum_i W_i e^{\beta N_i \varepsilon_i}$$

مسألة - جملة مكونة من $N = 3$ جسيمات موزعة على $N_\varepsilon = 3$ سويات طاقة متحللة، بالشكل $(\varepsilon_1 = 0\varepsilon \;,\; \varepsilon_2 = \varepsilon \;,\; \varepsilon_3 = 2\varepsilon)$، حيث $\varepsilon = KT$ ، ودرجة تحللها $(g_1 = 1 \;,\; g_2 = 1 \;,\; g_3 = 2)$ والمطلوب :

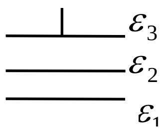
١- بفرض أن الجسيمات فيرميونات . أوجد حالات التوزع الماكروي الممكنة ، وطاقة كل منها، والوزن الإحصائي لكل منها، ومثلها. وماهي حالة التوازن.

٢- بفرض أن الجسيمات بوزونات. عدد حالات التوزع الماكروي المرفوضة إن وجدت.
ثم أوجد طاقة الحالة الماكروية $(0,0,3)$ ، ووزنها الإحصائي، ومثّلها.

الحل: ١- (حالة الفيرميونات) نحسب عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي من العلاقة:

$$N_{Mac} = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N!(N_\varepsilon - 1)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

نستعرض هذه الحالات ونختار منها فقط تلك التي تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ لأن الجسيمات فيرميونات (غير متمايزة) .



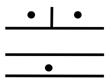
$$\left\{ \underbrace{(3,0,0)}_{NO}, \underbrace{(0,3,0)}_{NO}, \underbrace{(0,0,3)}_{NO}, \underbrace{(2,0,1)}_{NO}, \underbrace{(1,0,2)}_{OK}, \underbrace{(2,1,0)}_{NO}, \underbrace{(0,1,2)}_{OK}, \underbrace{(1,2,0)}_{NO}, \underbrace{(0,2,1)}_{NO}, \underbrace{(1,1,1)}_{OK} \right\}$$

نستنتج أن الحالات الممكنة هي $\underbrace{(1,0,2)}_{OK}, \underbrace{(0,1,2)}_{OK}, \underbrace{(1,1,1)}_{OK}$

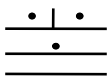
نحسب طاقة أي حالة ماكروية بتطبيق العلاقة : $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$

والوزن الإحصائي بتطبيق إحصاء فيرمي – ديراك $W_{(F-D)} = \prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i - N_i)!}$

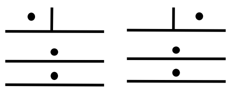
$$W_{(1,0,2)} = \frac{1!}{1!\,(1-1)!}\;\frac{1!}{0!\,(1-0)!}\;\frac{2!}{2!\,(2-2)!} = 1 \qquad \wp \quad U_{(1,0,2)} = 4\varepsilon$$



$$W_{(0,1,2)} = \frac{1!}{0!\,(1-0)!}\;\frac{1!}{1!\,(1-1)!}\;\frac{2!}{2!\,(2-2)!} = 1 \qquad \wp \quad U_{(0,1,2)} = 5\varepsilon$$



$$W_{(1,1,1)} = \frac{1!}{1!\,(1-1)!}\;\frac{1!}{1!\,(1-1)!}\;\frac{2!}{1!\,(2-1)!} = 2 \qquad \wp \quad U_{(1,1,1)} = 3\varepsilon$$



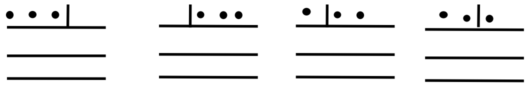
حالة التوازن هي الحالة الأكثر احتمالاً $(1,1,1)$

٢- (حالة البوزونات) كل حالات التوزع الماكروي العشرة مقبولة

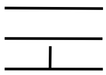
نحسب طاقة الحالة الماكروية المطلوبة بتطبيق العلاقة: $U_{(0,0,3)} = \sum_i N_i \varepsilon_i = 6\varepsilon$

أما وزنها الإحصائي فنجده بتطبيق إحصاء (بوزه – آينشتين) بالشكل التالي:

$$W^{(0,0,3)}_{(B-E)} = \prod_i \frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!(g_i-1)!} = \frac{0!}{0!\,0!}\;\frac{0!}{0!\,0!}\;\frac{4!}{3!\,1!} = 4$$



<u>مثال:</u> جملة معزولة، مكونة من جسيمين، موزعين على ثلاث سويات للطاقة $\varepsilon_1 = 0$ و $\varepsilon_2 = \varepsilon_o$ و $\varepsilon_3 = 2\varepsilon_o$، متحللة بالشكل $g_1 = 2$ و $g_2 = g_3 = 1$. والمطلوب:



<u>A-</u> إذا كانت الجسيمات كلاسيكية:

١- أوجد تابع تحاص الجملة. واحسب متوسط طاقة الجسيم في جملته عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة.

٢- أوجد تابع تحاص الطاقم، واستنتج الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروي.

٣- احسب متوسط الطاقة الداخلية للجملة في طاقمها عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة.

٤- احسب متوسط عدد الجسيمات في السوية عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة.

<u>B-</u> كرر الطلبات السابقة فيما لو كانت الجسيمات كمية (بوزونات):

<u>C-</u> كرر الطلبات السابقة فيما لو كانت الجسيمات كمية (فيرميونات):

<u>D-</u> بفرض P_1 احتمال تفرق الجسيمات (نسبة عدد حالات التوزع الميكروية التي تكون فيها الحجرات أو السويات مشغولة بجسيم واحد إلى العدد الكلي لحالات التوزع).

و P_2 احتمال تجمع الجسيمات (نسبة عدد حالات التوزع الميكروية التي تكون فيها الحجرات أو السويات مشغولة بجسيمين إلى العدد الكلي لحالات التوزع).

والمطلوب : إيجاد قيم P_1 و P_2 لكافة أنواع الجسيمات المدروسة مع المناقشة.

الحل:

<u>A -</u> نفرض جسيما الجملة الكلاسيكية المتمايزين A و B

١- تابع تحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i\, e^{\beta\varepsilon_i} = 2e^0 + e^{\beta\varepsilon_o} + e^{2\beta\varepsilon_o} = 2 + e^{-\varepsilon_o/KT} + e^{-2\varepsilon_o/KT}$$

لحساب متوسط طاقة الجسيم في جملته، نعتبر أن الدرجات العالية توافق $T \to \infty$، والمنخفضة توافق $T \to 0k^o$:

$$\beta = -\frac{1}{KT} \quad \Rightarrow \beta_{(T\to\infty)} = 0 \quad \wp \quad \beta_{(T\to 0)} = -\infty$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta} = \frac{\varepsilon_o e^{\beta\varepsilon_o} + 2\varepsilon_o e^{2\beta\varepsilon_o}}{2 + e^{\beta\varepsilon_o} + e^{2\beta\varepsilon_o}} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\varepsilon}_{\substack{(T\to\infty)\\(\beta\to 0)}} = \dfrac{3}{4}\varepsilon_o \\ \bar{\varepsilon}_{\substack{(T\to 0)\\(\beta\to -\infty)}} = 0 \end{cases}$$

تعني النتيجة $\bar{\varepsilon}_{\substack{(T\to\infty)\\(\beta\to 0)}} = \frac{3}{4}\varepsilon_o$ أن معظم جسيمات الجملة تتوضع في سويات الطاقة العليا $\varepsilon_2 = \varepsilon_o$ و $\varepsilon_3 = 2\varepsilon_o$ عند درجات الحرارة العالية.

وتعني النتيجة $\bar{\varepsilon}_{\substack{(T\to 0)\\(\beta\to -\infty)}} = 0$ أن معظم جسيمات الجملة تتوضع في سوية الطاقة الأرضية $\varepsilon_1 = 0$ عند درجات الحرارة المنخفضة

٢- نوجد تحاص الطاقم ZΩ (بدلالة e) بتطبيق العلاقة التالية :

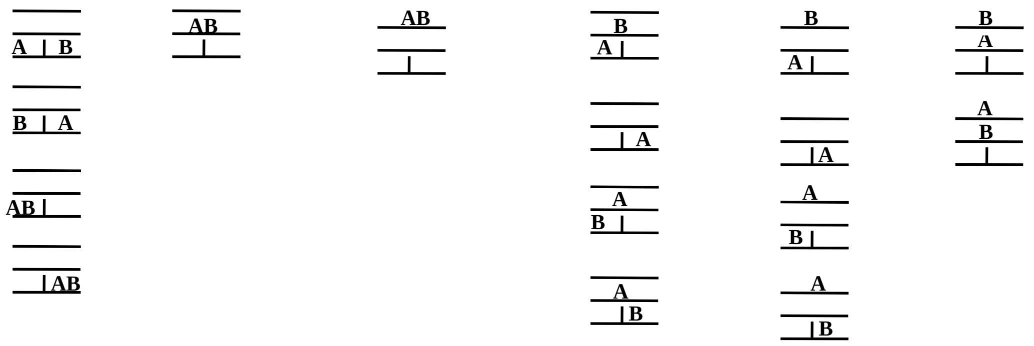
$$Z_\Omega = Z^N = (2e^0 + e^{\beta\varepsilon_o} + e^{\beta 2\varepsilon_o})^2 = 4e^0 + e^{\beta 2\varepsilon_o} + e^{\beta 4\varepsilon_o} + 4e^{\beta\varepsilon_o} + 4e^{\beta 2\varepsilon_o} + 2e^{\beta 3\varepsilon_o}$$

لاستنتاج الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروي نطابق عبارة ZΩ مع العبارة التالية : $Z_\Omega = \sum_i W_i\, e^{\beta U_i}$

مع ملاحظة وجود حالتين لهما نفس الطاقة $U_{(0,2,0)} = 2\varepsilon_o$ و $U_{(1,0,1)} = 2\varepsilon_o$ وبوزنين إحصائيين مختلفين كما يلي:

$$Z_\Omega = W_{(2,0,0)}e^{\beta U_{(2,0,0)}} + W_{(0,2,0)}e^{\beta U_{(0,2,0)}} + W_{(0,0,2)}e^{\beta U_{(0,0,2)}} + W_{(1,1,0)}e^{\beta U_{(1,1,0)}} + W_{(1,0,1)}e^{\beta U_{(1,0,1)}} + W_{(0,1,1)}e^{\beta U_{(0,1,1)}}$$

$$Z_\Omega = \underbrace{W_{(2,0,0)}}_{4} e^{0} + \underbrace{W_{(0,2,0)}}_{1} e^{\beta 2\varepsilon_o} + \underbrace{W_{(0,0,2)}}_{1} e^{\beta 4\varepsilon_o} + \underbrace{W_{(1,1,0)}}_{4} e^{\beta \varepsilon_o} + \underbrace{W_{(1,0,1)}}_{4} e^{\beta 2\varepsilon_o} + \underbrace{W_{(0,1,1)}}_{2} e^{\beta 3\varepsilon_o}$$



ومنعاً للالتباس نلاحظ أن عدد الحالات الميكروية الإجمالي $N_o = (\sum_i g_i)^N = 4^2 = 16$

٣- لحساب متوسط الطاقة الداخلية للجملة في طاقمها (عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة) نطبق العبارة التالية:

$$\overline{U} = \frac{1}{Z_\Omega}\frac{\partial Z_\Omega}{\partial \beta} = \frac{0 + 2\varepsilon_o e^{\beta 2\varepsilon_o} + 4\varepsilon_o e^{\beta 4\varepsilon_o} + 4\varepsilon_o e^{\beta \varepsilon_o} + 8\varepsilon_o e^{\beta 2\varepsilon_o} + 6\varepsilon_o e^{\beta 3\varepsilon_o}}{4e^{0} + e^{\beta 2\varepsilon_o} + e^{\beta 4\varepsilon_o} + 4e^{\beta\varepsilon_o} + 4e^{\beta 2\varepsilon_o} + 2e^{\beta 3\varepsilon_o}} \Rightarrow \begin{cases} \overline{U}_{\substack{T\to\infty \\ \beta\to 0}} = \dfrac{3}{2}\varepsilon_o \\ \overline{U}_{\substack{T\to 0k^o \\ \beta\to -\infty}} = 0 \end{cases}$$

تفيد النتيجة $\overline{U}_{\substack{T\to\infty \\ \beta\to 0}} = \frac{3}{2}\varepsilon_o$ إلى أن الجسيمات تتوزع على سويات الطاقة العليا عند درجات الحرارة العالية.

كما تفيد النتيجة $\overline{U}_{\substack{T\to 0k^o \\ \beta\to -\infty}} = 0$ إلى أن الجسيمات تتجمع في السوية الأرضية عند درجات الحرارة المنخفضة.

٤- لحساب متوسط عدد الجسيمات في السوية عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة نكتب تحاصل الطاقم بالصيغة التي نعتبر فيها الطاقة الداخلية $U_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)} = \sum_i N_i \varepsilon_i$ بالشكل التالي:

$$Z_\Omega = W_{(2,0,0)} e^{\beta U_{(2,0,0)}} + W_{(0,2,0)} e^{\beta U_{(0,2,0)}} + W_{(0,0,2)} e^{\beta U_{(0,0,2)}} + W_{(1,1,0)} e^{\beta U_{(1,1,0)}} + W_{(1,0,1)} e^{\beta U_{(1,0,1)}} + W_{(0,1,1)} e^{\beta U_{(0,1,1)}}$$

$$Z_\Omega = 4e^{\beta 2\varepsilon_1} + 1e^{\beta 2\varepsilon_2} + 1e^{\beta 2\varepsilon_3} + 4e^{\beta(1\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2)} + 4e^{\beta(1\varepsilon_1 + 1\varepsilon_3)} + 2e^{\beta(1\varepsilon_2 + 1\varepsilon_3)}$$

ثم نطبق العبارة التالية: $\overline{N_i} = \frac{1}{\beta Z_\Omega}\left(\frac{\partial Z_\Omega}{\partial \varepsilon_i}\right)_{\varepsilon_j\ ;\ i\neq j}$ على كل سوية من السويات كما يلي:

$$\overline{N_1} = \frac{1}{\beta Z_\Omega}\frac{\partial Z_\Omega}{\partial \varepsilon_1} = \frac{1}{\beta}\ \frac{8\beta e^{\beta 2\varepsilon_1} + 4\beta e^{\beta(1\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2)} + 4\beta e^{\beta(1\varepsilon_1 + 1\varepsilon_3)}}{4e^{\beta 2\varepsilon_1} + 1e^{\beta 2\varepsilon_2} + 1e^{\beta 2\varepsilon_3} + 4e^{\beta(1\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2)} + 4e^{\beta(1\varepsilon_1 + 1\varepsilon_3)} + 2e^{\beta(1\varepsilon_2 + 1\varepsilon_3)}}$$

وبما أن: $\varepsilon_1 = 0$ و $\varepsilon_2 = \varepsilon_o$ و $\varepsilon_3 = 2\varepsilon_o$ نجد: من أجل $\overline{N_1}$

$$\overline{N_1} = \frac{8 + 4e^{\beta\varepsilon_o} + 4e^{\beta 2\varepsilon_o}}{4 + e^{\beta 2\varepsilon_o} + e^{\beta 4\varepsilon_o} + 4e^{\beta\varepsilon_o} + 4e^{\beta 2\varepsilon_o} + 2e^{\beta 3\varepsilon_o}} \Rightarrow \begin{cases} \overline{N_1}_{\substack{(T\to\infty) \\ (\beta\to 0)}} = \dfrac{16}{16} = 1 \\ \overline{N_1}_{\substack{(T\to 0k^o) \\ (\beta\to -\infty)}} = \dfrac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

وبنفس الأسلوب من أجل $\overline{N_2}$ نجد:

$$\overline{N_2} = \frac{1}{\beta Z_\Omega}\frac{\partial Z_\Omega}{\partial \varepsilon_2} = \frac{1}{\beta}\ \frac{0 + 2\beta e^{\beta 2\varepsilon_2} + 0 + 4\beta e^{\beta(1\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2)} + 0 + 2\beta e^{\beta(1\varepsilon_2 + 1\varepsilon_3)}}{4e^{\beta 2\varepsilon_1} + 1e^{\beta 2\varepsilon_2} + 1e^{\beta 2\varepsilon_3} + 4e^{\beta(1\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2)} + 4e^{\beta(1\varepsilon_1 + 1\varepsilon_3)} + 2e^{\beta(1\varepsilon_2 + 1\varepsilon_3)}}$$

$$\overline{N_2} = \frac{2e^{\beta 2\varepsilon_o} + 4e^{\beta\varepsilon_o} + 2e^{\beta 3\varepsilon_o}}{4 + e^{\beta 2\varepsilon_o} + e^{\beta 4\varepsilon_o} + 4e^{\beta\varepsilon_o} + 4e^{\beta 2\varepsilon_o} + 2e^{\beta 3\varepsilon_o}} \Rightarrow \begin{cases} \overline{N_2}_{\substack{(T\to\infty) \\ (\beta\to 0)}} = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2} \\ \overline{N_2}_{\substack{(T\to 0k^o) \\ (\beta\to -\infty)}} = 0 \end{cases}$$

ومن أجل $\overline{N_3}$ نجد:

$$\overline{N_3}=\frac{1}{\beta Z_\Omega}\frac{\partial Z_\Omega}{\partial \varepsilon_3}=\frac{1}{\beta}\;\frac{0+0+2\beta e^{\beta 2\varepsilon_3}+0+4\beta e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_3)}+2\beta e^{\beta(1\varepsilon_2+1\varepsilon_3)}}{4e^{\beta 2\varepsilon_1}+1e^{\beta 2\varepsilon_2}+1e^{\beta 2\varepsilon_3}+4e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_2)}+4e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_3)}+2e^{\beta(1\varepsilon_2+1\varepsilon_3)}}$$

$$\overline{N_3}=\frac{2\,e^{\beta 4\varepsilon_o}+4\,e^{\beta 2\varepsilon_o}+2\,e^{\beta 3\varepsilon_o}}{4+e^{\beta 2\varepsilon_o}+e^{\beta 4\varepsilon_o}+4e^{\beta\varepsilon_o}+4e^{\beta 2\varepsilon_o}+2e^{\beta 3\varepsilon_o}}\quad\Rightarrow\begin{cases}\overline{N_3}_{\substack{(T\to\infty)\\(\beta\to 0)}}=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}\\ \overline{N_3}_{\substack{(T\to 0k^o)\\(\beta\to-\infty)}}=0\end{cases}$$

تفيد نتائج التوزع على السويات عند درجات الحرارة العالية $\overline{N_1}_{\substack{(T\to\infty)\\(\beta\to 0)}}=1$ و $\overline{N_2}_{\substack{(T\to\infty)\\(\beta\to 0)}}=\frac{1}{2}$ و $\overline{N_3}_{\substack{(T\to\infty)\\(\beta\to 0)}}=\frac{1}{2}$ بأن الجسيمات الكلاسيكية تتوزع بنسبة 50 % في المستوى الأول و 25 % في المستوى الثاني و 25 % في المستوى الثالث.

أما عند درجات الحرارة المنخفضة $\overline{N_1}_{\substack{(T\to 0k^o)\\(\beta\to-\infty)}}=2$ و $\overline{N_2}_{\substack{(T\to 0k^o)\\(\beta\to-\infty)}}=0$ و $\overline{N_3}_{\substack{(T\to 0k^o)\\(\beta\to-\infty)}}=0$ فتتجمع في المستوى الأول (السوية الأرضية).

B- عندما تكون الجسيمات كمية (بوزونات):

١- تابع تحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z=\sum_i g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}=2e^0+e^{\beta\varepsilon_o}+e^{2\beta\varepsilon_o}=2+e^{-\varepsilon_o/KT}+e^{-2\varepsilon_o/KT}$$

لحساب متوسط طاقة الجسيم في جملته، نعتبر أن الدرجات العالية توافق $T\to\infty$، والمنخفضة توافق $T\to 0k^o$:

$$\beta=-\frac{1}{KT}\quad\Rightarrow\beta_{(T\to\infty)}=0\qquad\wp\qquad\beta_{(T\to 0)}=-\infty$$

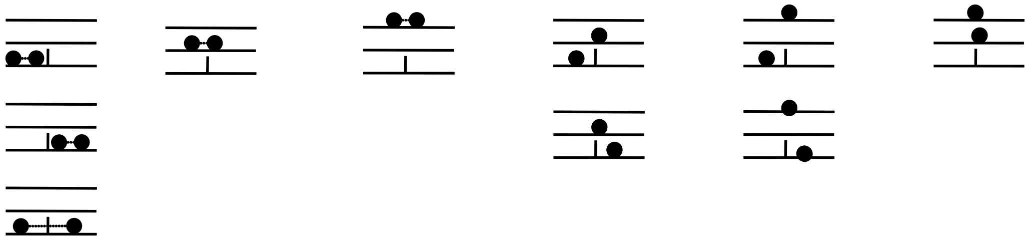
$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}=\frac{\varepsilon_o e^{\beta\varepsilon_o}+2\varepsilon_o e^{2\beta\varepsilon_o}}{2+e^{\beta\varepsilon_o}+e^{2\beta\varepsilon_o}}\quad\Rightarrow\begin{cases}\bar{\varepsilon}_{(T\to\infty)}=\dfrac{3}{4}\varepsilon_o\\ \bar{\varepsilon}_{(T\to 0)}=0\end{cases}$$

يتطابق تفسير نتيجة متوسط طاقة البوزون مع نتيجة متوسط طاقة الجسيم الكلاسيكي.

٢- نوجد تحاص الطاقم Z_Ω (بدلالة e) بتطبيق العلاقة التالية: $Z_\Omega=\sum_i W_i\,e^{\beta U_i}$

$$Z_\Omega=W_{(2,0,0)}e^{\beta U_{(2,0,0)}}+W_{(0,2,0)}e^{\beta U_{(0,2,0)}}+W_{(0,0,2)}e^{\beta U_{(0,0,2)}}+W_{(1,1,0)}e^{\beta U_{(1,1,0)}}+W_{(1,0,1)}e^{\beta U_{(1,0,1)}}+W_{(0,1,1)}e^{\beta U_{(0,1,1)}}$$

$$Z_\Omega=\underbrace{W_{(2,0,0)}}_{3}e^0+\underbrace{W_{(0,2,0)}}_{1}e^{\beta 2\varepsilon_o}+\underbrace{W_{(0,0,2)}}_{1}e^{\beta 4\varepsilon_o}+\underbrace{W_{(1,1,0)}}_{2}e^{\beta\varepsilon_o}+\underbrace{W_{(1,0,1)}}_{2}e^{\beta 2\varepsilon_o}+\underbrace{W_{(0,1,1)}}_{1}e^{\beta 3\varepsilon_o}$$



$$Z_\Omega=3+1e^{\beta 2\varepsilon_o}+1e^{\beta 4\varepsilon_o}+2e^{\beta\varepsilon_o}+2e^{\beta 2\varepsilon_o}+1e^{\beta 3\varepsilon_o}\qquad\qquad ;Z_\Omega\neq Z^N$$

٣- لحساب متوسط الطاقة الداخلية للجملة في طاقمها (عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة) نطبق العبارة التالية:

$$\bar{U}=\frac{1}{Z_\Omega}\frac{\partial Z_\Omega}{\partial\beta}=\frac{0+2\varepsilon_o e^{\beta 2\varepsilon_o}+4\varepsilon_o e^{\beta 4\varepsilon_o}+2\varepsilon_o e^{\beta\varepsilon_o}+4\varepsilon_o e^{\beta 2\varepsilon_o}+3\varepsilon_o e^{\beta 3\varepsilon_o}}{3+e^{\beta 2\varepsilon_o}+e^{\beta 4\varepsilon_o}+2e^{\beta\varepsilon_o}+2e^{\beta 2\varepsilon_o}+e^{\beta 3\varepsilon_o}}\Rightarrow\begin{cases}\bar{U}_{\substack{T\to\infty\\ \beta\to 0}}=\dfrac{3}{2}\varepsilon_o\\ \bar{U}_{\substack{T\to 0k^o\\ \beta\to-\infty}}=0\end{cases}$$

تتطابق نتيجة متوسط الطاقة الداخلية لجملة البوزونات مع جملة الجسيمات الكلاسيكية

٤- لحساب متوسط عدد الجسيمات في السوية عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة نكتب تحاص الطاقم بالصيغة

التي نعتبر فيها الطاقة الداخلية $U_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}=\sum_i N_i\,\varepsilon_i$ بالشكل التالي:

$$Z_\Omega=W_{(2,0,0)}\,e^{\beta U_{(2,0,0)}}+W_{(0,2,0)}\,e^{\beta U_{(0,2,0)}}+W_{(0,0,2)}\,e^{\beta U_{(0,0,2)}}+W_{(1,1,0)}\,e^{\beta U_{(1,1,0)}}+W_{(1,0,1)}\,e^{\beta U_{(1,0,1)}}+W_{(0,1,1)}\,e^{\beta U_{(0,1,1)}}$$

$$Z_\Omega=3e^{\beta 2\varepsilon_1}+1e^{\beta 2\varepsilon_2}+1e^{\beta 2\varepsilon_3}+2e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_2)}+2e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_3)}+1e^{\beta(1\varepsilon_2+1\varepsilon_3)}$$

ثم نطبق العبارة التالية: $\overline{N_i}=\frac{1}{\beta Z_\Omega}\left(\frac{\partial Z_\Omega}{\partial\varepsilon_i}\right)_{\varepsilon_j\ ;\ i\neq j}$ على كل سوية من السويات كما يلي:

$$\overline{N_1}=\frac{1}{\beta Z_\Omega}\frac{\partial Z_\Omega}{\partial\varepsilon_1}=\frac{1}{\beta}\,\frac{6\beta e^{\beta 2\varepsilon_1}+2\beta e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_2)}+2\beta e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_3)}}{3e^{\beta 2\varepsilon_1}+1e^{\beta 2\varepsilon_2}+1e^{\beta 2\varepsilon_3}+2e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_2)}+2e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_3)}+1e^{\beta(1\varepsilon_2+1\varepsilon_3)}}$$

وبما أن: $\varepsilon_1=0$ و $\varepsilon_2=\varepsilon_o$ و $\varepsilon_3=2\varepsilon_o$ نجد: من أجل $\overline{N_1}$

$$\overline{N_1}=\frac{6+2\,e^{\beta\varepsilon_o}+2\,e^{\beta 2\varepsilon_o}}{3+e^{\beta 2\varepsilon_o}+e^{\beta 4\varepsilon_o}+2e^{\beta\varepsilon_o}+2e^{\beta 2\varepsilon_o}+e^{\beta 3\varepsilon_o}}\Rightarrow\begin{cases}\overline{N_1}_{\substack{(T\to\infty)\\(\beta\to0)}}=\frac{10}{10}=1\\[2mm]\overline{N_1}_{\substack{(T\to0k^o)\\(\beta\to-\infty)}}=\frac{6}{3}=2\end{cases}$$

وبنفس الأسلوب من أجل $\overline{N_2}$ نجد:

$$\overline{N_2}=\frac{1}{\beta Z_\Omega}\frac{\partial Z_\Omega}{\partial\varepsilon_2}=\frac{1}{\beta}\,\frac{2\beta e^{\beta 2\varepsilon_2}+2\beta e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_2)}+1\beta e^{\beta(1\varepsilon_2+1\varepsilon_3)}}{3e^{\beta 2\varepsilon_1}+1e^{\beta 2\varepsilon_2}+1e^{\beta 2\varepsilon_3}+2e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_2)}+2e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_3)}+1e^{\beta(1\varepsilon_2+1\varepsilon_3)}}$$

$$\overline{N_2}=\frac{2\,e^{\beta 2\varepsilon_o}+2\,e^{\beta\varepsilon_o}+1\,e^{\beta 3\varepsilon_o}}{3+e^{\beta 2\varepsilon_o}+e^{\beta 4\varepsilon_o}+2e^{\beta\varepsilon_o}+2e^{\beta 2\varepsilon_o}+e^{\beta 3\varepsilon_o}}\Rightarrow\begin{cases}\overline{N_2}_{\substack{(T\to\infty)\\(\beta\to0)}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\\[2mm]\overline{N_2}_{\substack{(T\to0k^o)\\(\beta\to-\infty)}}=0\end{cases}$$

ومن أجل $\overline{N_3}$ نجد:

$$\overline{N_3}=\frac{1}{\beta Z_\Omega}\frac{\partial Z_\Omega}{\partial\varepsilon_3}=\frac{1}{\beta}\,\frac{2\beta e^{\beta 2\varepsilon_3}+2\beta e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_3)}+1\beta e^{\beta(1\varepsilon_2+1\varepsilon_3)}}{3e^{\beta 2\varepsilon_1}+1e^{\beta 2\varepsilon_2}+1e^{\beta 2\varepsilon_3}+2e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_2)}+2e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_3)}+1e^{\beta(1\varepsilon_2+1\varepsilon_3)}}$$

$$\overline{N_3}=\frac{2\,e^{\beta 4\varepsilon_o}+2\,e^{\beta 2\varepsilon_o}+1\,e^{\beta 3\varepsilon_o}}{3+e^{\beta 2\varepsilon_o}+e^{\beta 4\varepsilon_o}+2e^{\beta\varepsilon_o}+2e^{\beta 2\varepsilon_o}+e^{\beta 3\varepsilon_o}}\Rightarrow\begin{cases}\overline{N_3}_{\substack{(T\to\infty)\\(\beta\to0)}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\\[2mm]\overline{N_3}_{\substack{(T\to0k^o)\\(\beta\to-\infty)}}=0\end{cases}$$

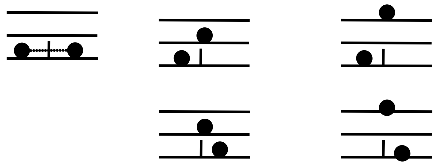
تفيد نتائج التوزع على السويات عند درجات الحرارة العالية $\overline{N_1}_{\substack{(T\to\infty)\\(\beta\to0)}}=1$ و $\overline{N_2}_{\substack{(T\to\infty)\\(\beta\to0)}}=\frac{1}{2}$ و $\overline{N_3}_{\substack{(T\to\infty)\\(\beta\to0)}}=\frac{1}{2}$ بأن البوزونات تتوزع بنسبة 50 % في المستوى الأول و 25 % في المستوى الثاني و 25 % في المستوى الثالث.
أما عند درجات الحرارة المنخفضة $\overline{N_1}_{\substack{(T\to0k^o)\\(\beta\to-\infty)}}=2$ و $\overline{N_2}_{\substack{(T\to0k^o)\\(\beta\to-\infty)}}=0$ و $\overline{N_3}_{\substack{(T\to0k^o)\\(\beta\to-\infty)}}=0$ فتتجمع البوزونات في المستوى الأول (السوية الأرضية)، وهو ما ندعوه تكاثف آينشتين.
وكخلاصة: تسلك البوزونات عند درجات الحرارة المرتفعه سلوك الجسيمات الكلاسيكية، وتتكاثف عند درجات الحرارة المنخفضة.

C- أما من أجل الفيرميونات: فتخضع في توزعها للشرط $g_i\geq N_i$

١- يتطابق تفسير نتيجة متوسط طاقة الفيرميون مع نتيجة متوسط طاقة كل من البوزون والجسيم الكلاسيكي.
٢- نوجد تحاص المقام Z_Ω (بدلالة e) بتطبيق العلاقة التالية: $Z_\Omega=\sum_i W_i\,e^{\beta U_i}$. مع مراعاة الشرط $g_i\geq N_i$:

$$Z_\Omega=W_{(2,0,0)}\,e^{\beta U_{(2,0,0)}}+W_{(1,1,0)}\,e^{\beta U_{(1,1,0)}}+W_{(1,0,1)}\,e^{\beta U_{(1,0,1)}}+W_{(0,1,1)}\,e^{\beta U_{(0,1,1)}}$$

$$Z_\Omega = \underbrace{W_{(2,0,0)}}_{1} e^{0} + \underbrace{W_{(1,1,0)}}_{2} e^{\beta\varepsilon_o} + \underbrace{W_{(1,0,1)}}_{2} e^{\beta 2\varepsilon_o} + \underbrace{W_{(0,1,1)}}_{1} e^{\beta 3\varepsilon_o}$$



$$Z_\Omega = 1 + 2e^{\beta\varepsilon_o} + 2e^{\beta 2\varepsilon_o} + 1e^{\beta 3\varepsilon_o} \qquad ; Z_\Omega \neq Z^N$$

٣- لحساب متوسط الطاقة الداخلية للجملة في طاقمها (عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة) نطبق العبارة التالية:

$$\overline{U} = \frac{1}{Z_\Omega}\frac{\partial Z_\Omega}{\partial\beta} = \frac{0 + 2\varepsilon_o e^{\beta\varepsilon_o} + 4\varepsilon_o e^{\beta 2\varepsilon_o} + 3\varepsilon_o e^{\beta 3\varepsilon_o}}{1 + 2e^{\beta\varepsilon_o} + 2e^{\beta 2\varepsilon_o} + 1e^{\beta 3\varepsilon_o}} \Rightarrow \begin{cases} \overline{U}_{\substack{T\to\infty \\ \beta\to 0}} = \frac{3}{2}\varepsilon_o \\ \overline{U}_{\substack{T\to 0k^o \\ \beta\to -\infty}} = 0 \end{cases}$$

تتطابق نتيجة متوسط الطاقة الداخلية لجملة الفيرميونات مع جملتي البوزونات والجسيمات الكلاسيكية

٤- لحساب متوسط عدد الجسيمات في السوية عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة نكتب تحاص الطاقم بالصيغة التي نعتبر فيها الطاقة الداخلية $U_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)} = \sum_i N_i\varepsilon_i$ مع مراعاة الشرط $g_i \geq N_i$ بالشكل التالي:

$$Z_\Omega = W_{(2,0,0)} e^{\beta U_{(2,0,0)}} + W_{(1,1,0)} e^{\beta U_{(1,1,0)}} + W_{(1,0,1)} e^{\beta U_{(1,0,1)}} + W_{(0,1,1)} e^{\beta U_{(0,1,1)}}$$

$$Z_\Omega = 1e^{\beta 2\varepsilon_1} + 2e^{\beta(1\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2)} + 2e^{\beta(1\varepsilon_1 + 1\varepsilon_3)} + 1e^{\beta(1\varepsilon_2 + 1\varepsilon_3)}$$

ثم نطبق العبارة التالية: $\overline{N_i} = \frac{1}{\beta Z_\Omega}\left(\frac{\partial Z_\Omega}{\partial\varepsilon_i}\right)_{\varepsilon_j\ ;\ i\neq j}$ على كل سوية من السويات كما يلي:

$$\overline{N_1} = \frac{1}{\beta Z_\Omega}\frac{\partial Z_\Omega}{\partial\varepsilon_1} = \frac{1}{\beta}\,\frac{2\beta e^{\beta 2\varepsilon_1} + 2\beta e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_2)} + 2\beta e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_3)}}{1e^{\beta 2\varepsilon_1} + 2e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_2)} + 2e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_3)} + 1e^{\beta(1\varepsilon_2+1\varepsilon_3)}} \Rightarrow \begin{cases} \overline{N_1}_{\substack{(T\to\infty) \\ (\beta\to 0)}} = \frac{6}{6} = 1 \\ \overline{N_1}_{\substack{(T\to 0k^o) \\ (\beta\to -\infty)}} = \frac{2}{1} = 2 \end{cases}$$

$$\overline{N_2} = \frac{1}{\beta Z_\Omega}\frac{\partial Z_\Omega}{\partial\varepsilon_2} = \frac{1}{\beta}\,\frac{2\beta e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_2)} + 1\beta e^{\beta(1\varepsilon_2+1\varepsilon_3)}}{1e^{\beta 2\varepsilon_1} + 2e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_2)} + 2e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_3)} + 1e^{\beta(1\varepsilon_2+1\varepsilon_3)}} \Rightarrow \begin{cases} \overline{N_2}_{\substack{(T\to\infty) \\ (\beta\to 0)}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \overline{N_2}_{\substack{(T\to 0k^o) \\ (\beta\to -\infty)}} = 0 \end{cases}$$

$$\overline{N_3} = \frac{1}{\beta Z_\Omega}\frac{\partial Z_\Omega}{\partial\varepsilon_3} = \frac{1}{\beta}\,\frac{2\beta e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_3)} + 1\beta e^{\beta(1\varepsilon_2+1\varepsilon_3)}}{1e^{\beta 2\varepsilon_1} + 2e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_2)} + 2e^{\beta(1\varepsilon_1+1\varepsilon_3)} + 1e^{\beta(1\varepsilon_2+1\varepsilon_3)}} \Rightarrow \begin{cases} \overline{N_3}_{\substack{(T\to\infty) \\ (\beta\to 0)}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \overline{N_3}_{\substack{(T\to 0k^o) \\ (\beta\to -\infty)}} = 0 \end{cases}$$

تفيد نتائج التوزع على السويات عند درجات الحرارة العالية $\overline{N_1}_{\substack{(T\to\infty) \\ (\beta\to 0)}} = 1$ و $\overline{N_2}_{\substack{(T\to\infty) \\ (\beta\to 0)}} = \frac{1}{2}$ و $\overline{N_3}_{\substack{(T\to\infty) \\ (\beta\to 0)}} = \frac{1}{2}$ بأن الفيرميونات تتوزع بنسبة 50 % في المستوى الأول و 25 % في المستوى الثاني و 25 % في المستوى الثالث.
أما عند درجات الحرارة المنخفضة $\overline{N_1}_{\substack{(T\to 0k^o) \\ (\beta\to -\infty)}} = 2$ و $\overline{N_2}_{\substack{(T\to 0k^o) \\ (\beta\to -\infty)}} = 0$ و $\overline{N_3}_{\substack{(T\to 0k^o) \\ (\beta\to -\infty)}} = 0$ فتتجمع في المستوى الأول (السوية الأرضية) بمعدل فيرميون واحد لكل درجة تحلل.

وكخلاصة: تسلك الفيرميونات عند درجات الحرارة المرتفعه سلوك البوزونات والجسيمات الكلاسيكية، وتتجمع عند درجات الحرارة المنخفضة في السويات الدنيا بمعدل فيرميون واحد لكل درجة تحلل.

-D

نوجد قيم P_1 و P_2 لكافة أنواع الجسيمات المدروسة من أشكال تمثيل حالات التوزع الميكروية، كما يلي:

الجسيمات	كلاسيكية	بوزونات	فيرميونات
P_1	3/4	6/10	1
P_2	1/4	4/10	0
المقارنة	$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{Clas}=\frac{1}{3}$	$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{Boz}=\frac{2}{3}$	$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{Ferm}=0$

من الجدول نلاحظ مايلي:

١- نسبة تجمع البوزونات إلى تفرقها $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{Boz}=\frac{2}{3}$ أكبر من نسبة تجمع الجسيمات الكلاسيكية إلى تفرقها $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{Clas}=\frac{1}{3}$ وهذا يعني أن البوزونات ميالة للتجمع في الحجرات أو السويات أكثر من الجسيمات الكلاسيكية. وينشأ عن هذه الملاحظة ظاهرة تكاثف آينشتين (تتكدس البوزونات - بانخفاض درجة الحرارة - في سويات الطاقة الدنيا).

٢- نسبة تجمع الفيرميونات إلى تفرقها $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{Ferm}=0$ معدومة بالمقارنة مع النسب الأخرى للبوزونات والجسيمات الكلاسيكية. مما يعني أن الفيرميونات ميالة للتفرق على الحجرات أو السويات أكثر من الأنواع الأخرى. وهذا طبعاً ناجم عن شرط التوزع $g_i \geq N_i$.

مثال: جملة كلاسيكية معزولة، مكونة من N جسيم مهتز (متذبذب). تتحرك جميع الهزازات ببعد واحد ox، دون فقد في الطاقة. وكل منها يخضع لقوة إرجاع من الشكل: $F=-k_S\,x^3$. والمطلوب:

١-اكتب تابع تحاصل الجملة بالشكل: $Z=A|\beta|^q$ حيث $A=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{4})(\frac{4}{k_S})^{1/4}\sqrt{\frac{2\pi m}{h^2}}$ و $|\beta|=\frac{1}{KT}$ و $q=-\frac{3}{4}$

٢- أوجد: الطاقة الحرة F، والضغط P، والأنتروبية S، والطاقة الداخلية U، والسعة الحرارية C_V.

الحل: ١- بما أن التذبذب يحصل في بعد واحد ox ، وأن الفقد في طاقة المتذبذب معدوم. فتكون طاقته الإجمالية ثابتة، ومساوية لمجموع طاقتيه الحركية $P_x^2/2m$ والكامنة $U(x)$. أي:

$$\varepsilon=P_x^2/2m+U(x)$$

نحسب الطاقة الكامنة للمهتز الخاضع لقوة إرجاع بمكاملة قوة الإرجاع على مجال التذبذب كما يلي:

$$U(x)=-\int F_x\,dx=-\int -k_S\,x^3\,dx=\frac{1}{4}k_S\,x^4$$

نكتب الطاقه الإجمالية للمهتز بالشكل التالي:

$$\varepsilon=\frac{P_x^2}{2m}+\frac{1}{4}k_S\,x^4 \qquad (1)$$

نكتب تابع التحاصل الكلاسيكي للجملة بصيغته التكاملية لأن المهتزات كلاسيكية (سويات الطاقة فيها مستمرة).

$$Z_{Clas}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta\varepsilon}\,g(P)\,dP \qquad (2)$$

$$g(P)\,dP=C\,d\Gamma(P)=C\,dq_V\,dP_V=C\,dx\,dP_x \quad ; \; C=1/h \qquad (3)$$

نعوض (1) و (3) في (2) ونأخذ مجال التكامل في المجال $]-\infty\to+\infty[$.

$$Z_{Clas}=\frac{1}{h}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{P_x^2}{2mKT}}\,dP_x}_{(*)}\;\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k_S}{4KT}x^4}\,dx}_{(**)} \qquad (4)$$

نحل التكامل (*) بفرض الثابت $\alpha_1=\frac{1}{2mKT}$، ونستخدم تكامل بواسون التالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha_1 x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x^0 e^{-\alpha_1 x^2}dx=2\int_0^{+\infty} x^0 e^{-\alpha_1 x^2}dx=2\left(\frac{0!}{0!\,2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1}}\right)=2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1}}=\sqrt{2\pi mKT} \quad ; n=0 \;(\text{زوجي})$$

نحل التكامل (**) بإجراء تغيير في المتحول. لذا نفرض $y=\frac{k_S}{4KT}x^4=\delta x^4 \quad ; \; \delta=\frac{k_S}{4KT}$

فنجد: $x=\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/4}$ و $dx=\frac{1}{4}\frac{1}{\delta}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{-3/4}dy=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/4}y^{-3/4}dy$. كما نغير في مجال التكامل وبالتعويض نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k_S}{4KT}x^4}dx=2\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/4}\int_0^{+\infty}e^{-y}y^{-3/4}dy=2\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/4}\Gamma(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{k_S}\right)^{1/4}(KT)^{1/4}\,\Gamma(\frac{1}{4})$$

نعوض قيمتي التكاملين في (4):

$$Z_{Clas}=\sqrt{2\pi mKT}\,\frac{1}{h}\frac{1}{2}\left(\frac{4}{k_S}\right)^{1/4}(KT)^{1/4}\,\Gamma(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{4})\left(\frac{4}{k_S}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{2\pi m}{h^2}}\,(KT)^{3/4}$$

$$Z_{Clas}=\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{4})\left(\frac{4}{k_S}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{2\pi m}{h^2}}\,\left(\frac{1}{KT}\right)^{-3/4}=A\,|\beta|^{-3/4}=A\,|\beta|^{q} \qquad ; \; q=-\frac{3}{4} \;\;\wp\;\; \beta=-\frac{1}{KT}$$

فيكون تحاصل طاقم الجسيمات الكلاسيكية $Z_\Omega=Z^N=A^N\,|\beta|^{-3N/4}$

٢- نحسب بدايةً LnZ_{clas} فنجد $Ln\,Z_{clas}=LnA-\frac{3}{4}Ln|\beta|$ ثم نوجد المشتقات:

$$\left(\frac{\partial Ln\,Z}{\partial T}\right)_V=-\frac{3}{4}\frac{\partial Ln|\beta|}{\partial T}=-\frac{3}{4}\frac{\partial Ln(1/KT)}{\partial T}=\frac{3}{4}\frac{\partial Ln(KT)}{\partial T}=\frac{3}{4}\frac{1}{T} \quad \text{و} \quad \left(\frac{\partial\,Ln\,Z}{\partial V}\right)_T=0$$

الطاقة الحرة F،

$$F_{\min}=-KT\,Ln\,Z_\Omega=-NKT\,Ln\,Z$$

$$F_{\min}=-NKT\,Ln\,Z \quad\Rightarrow F_{\min}=NKT\,[\frac{3}{4}Ln|\beta|-LnA]$$

والضغط P:

$$P=-(\partial F/\partial V)_T=N\,KT\left(\frac{\partial\,Ln\,Z}{\partial V}\right)_T=0$$

والأنتروبية S:

$$S=-(\partial F/\partial T)_V=NK\left[Ln\,Z+T\left(\frac{\partial Ln\,Z}{\partial T}\right)_V\right]=NK\left[Ln\,A-\frac{3}{4}Ln|\beta|+\frac{3}{4}\right]$$

والطاقة الداخلية U:

$$U=F+TS=NKT\,[\frac{3}{4}Ln|\beta|-LnA]+NKT\left[Ln\,A-\frac{3}{4}Ln|\beta|+\frac{3}{4}\right]=\frac{3}{4}NKT$$

والسعة الحرارية C_V:

$$C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V}=\frac{3}{4}NK$$

مثال: جملة مكونة من N من الجسيمات غير المتمايزة. فإذا علمت أن دفوعها ترتبط بطاقاتها بالعلاقة: $\varepsilon=C|P|$
حيث C سرعة الضوء. والمطلوب:
١- أوجد تحاصل الجملة Z.
٢- أوجد: الطاقة الحرة F، والضغط P، والأنتروبية S، والطاقة الداخلية U، والسعة الحرارية C_V.

الحل: ١- نحسب Z من الصيغة التكاملية. ونأخذ التكامل على المجال الموجب $[0\to\infty[$ لأن الاندفاعات مأخوذة بالقيمة المطلقة. كما يلي:

$$Z=\int_0^{+\infty}e^{\beta\varepsilon}\,g(P)\,dP=\frac{1}{h^3}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{C}{KT}|P|}dq_V\,dP_V=\frac{4\pi V}{h^3}\int_0^{+\infty}P^2\,e^{-\delta|P|}\,dP \qquad ; \; \delta=C|\beta|=\frac{C}{KT}$$

نوجد قيمة التكامل بالشكل التالي:

$$\int_0^{+\infty}P^2\,e^{-\delta|P|}\,dP=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left(e^{-\delta|P|}\right)dP=\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\int_0^{+\infty}e^{-\delta|P|}\,dP=\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left[-\frac{1}{\delta}e^{-\delta|P|}\right]_0^\infty=\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left[-\frac{1}{\delta}(0-1)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\delta}\left(\frac{1}{\delta}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial\delta}\left(-\frac{1}{\delta^2}\right)=-\left(\frac{0-2\delta}{\delta^4}\right)=\frac{2}{\delta^3}=2\left(\frac{1}{\delta}\right)^3$$

بالتعويض في عبارة Z نجد:

$$Z=\frac{8\pi V}{h^3}\left(\frac{1}{\delta}\right)^3=\frac{8\pi VK^3}{C^3h^3}T^3=\lambda V T^3 \quad ;\ \lambda=\frac{8\pi K^3}{C^3h^3}=cte$$

بما أن الجسيمات غير متمايزة فيكون تحاصها $Z^*=\dfrac{Z^N}{N!}$

٢- بما أن $Z=\lambda V T^3$ نجد $LnZ=Ln\lambda+LnV+3LnT$

نوجد المشتقات لاستخدامها في الطلبات اللاحقة:

$$\left(\frac{\partial Ln Z}{\partial V}\right)_T=\frac{1}{V} \quad \text{و} \quad \left(\frac{\partial Ln Z}{\partial T}\right)_V=\frac{3}{T}$$

الطاقة الحرة F، $F_{\min}=-NKT\,Ln Z=-NKT(Ln\lambda+LnV+3LnT)$

الضغط P: $P=-(\partial F/\partial V)_T=N\,KT\left(\dfrac{\partial Ln Z}{\partial V}\right)_T=N\,KT\dfrac{1}{V}$

أي أن الغاز الجملة تحقق معادلة الحالة للغاز المثالي $PV=NKT$

الأنتروبية S:

$$S=-(\partial F/\partial T)_V=NK\left[Ln Z+T\left(\frac{\partial Ln Z}{\partial T}\right)_V\right]=NK\,[Ln\lambda+LnV+3LnT+3]$$

الطاقة الداخلية U:

$$U=F+TS==N\,KT^2\left(\frac{\partial Ln Z}{\partial T}\right)_V=3NKT$$

السعة الحرارية للغاز C_V من العبارة:

$$C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V}=-T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V=T\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{\partial}{\partial T}NKT\ (Ln\lambda+LnV+3LnT)\right]$$

$$C_V=T\frac{\partial}{\partial T}\,[NK\ (Ln\lambda+LnV+3LnT)+3NK]=3NK$$

مثال: جملة مكونة من عدد لانهائي من الجسيمات غير المتمايزة. موزعة على عدد لانهائي من السويات بالشكل: $\varepsilon_n=n\,\varepsilon_o\quad ;\ n=0,1,2,3,......$ ودرجات تحللها معطاة بالعلاقة: $g_n=n+1$. والمطلوب:

١- أوجد تحاصل الجملة Z.

٢- أوجد متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ في الحالات: $\varepsilon_o<<KT$ و $\varepsilon_o=KT$ و $\varepsilon_o>>KT$.

٣- أوجد نسب أرقام انشغال السويات العليا للطاقة، وحدد نوع التوزع بهذه الحالة.

الحل: ١- نحسب Z من صيغة التجميع في المجال $[0\to\infty[$ كما يلي:

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty}g_n\,e^{\beta\varepsilon_n}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,e^{n\beta\varepsilon_o}$$

نفرض $x=e^{\beta\varepsilon_o}<1$

لأن $e^{\beta\varepsilon_o}=e^{-\varepsilon_o/KT}=(1/e^{\varepsilon_o/KT})<1$ حيث يكون $e^{\varepsilon_o/KT}>1$ في الحالتين $\varepsilon_o>KT$ و $\varepsilon_o<KT$:

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\ x^n=1+2x+3x^2+4x^3+......$$

وبفرض $m=n+1$ يمكننا كتابة Z بدلالة مشتق سلسلة أخرى S_m كما يلي:

$$Z=\sum_{m=1}^{\infty}m\ x^{m-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d\,x^m}{dx}=\frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty}x^m=\frac{d}{dx}(1+x+x^2+x^3+......)=1+2x+3x^2+4x^3+......$$

وبإيجاد عبارة الحد العام للسلسلة الجديدة S_m التي أساسها x :

$$\sum_{m=0}^{\infty}x^m=1+x+x^2+.......=(1-x)^{-1}$$

$$Z=\frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty}x^m=\frac{d}{dx}(1-x)^{-1}=\frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)}=\frac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}=(1-e^{\beta\varepsilon_o})^{-2}$$

٢- نوجد متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ من العلاقة: $\bar{\varepsilon}=\frac{\partial Ln\,Z}{\partial\beta}$

$$Ln\,Z=Ln(1-e^{\beta\varepsilon_o})^{-2}=-2\,Ln(1-e^{\beta\varepsilon_o})$$

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\partial Ln\,Z}{\partial\beta}=-2\frac{-\varepsilon_o e^{\beta\varepsilon_o}}{1-e^{\beta\varepsilon_o}}=\frac{2\varepsilon_o}{e^{-\beta\varepsilon_o}-1}=\frac{2\varepsilon_o}{e^{\varepsilon_o/KT}-1}$$

من أجل $\varepsilon_o<<KT$ ننشر التابع الأسي ونكتفي بالحدين الأول والثاني $e^{\varepsilon_o/KT}\approx1+\frac{\varepsilon_o}{KT}$ وبالتعويض نجد:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{2\varepsilon_o}{1+\frac{\varepsilon_o}{KT}-1}\approx2\,KT$$

من أجل $\varepsilon_o=KT$ نجد: $\bar{\varepsilon}>KT \Rightarrow \bar{\varepsilon}=\frac{2\varepsilon_o}{e-1}\approx1{,}16\,KT$

من أجل $\varepsilon_o>>KT$ يصبح المقدار $e^{\varepsilon_o/KT}>>1$ ويهمل الواحد الموجود في المقام فنجد: $\bar{\varepsilon}=\frac{2\varepsilon_o}{e^{\varepsilon_o/KT}}\approx0$

٣- بما أن الجسيمات غير متمايزة (كمية) فهي إما بوزونات أو فيرميونات وتخضع للتوزع $(N_i)_{\underset{\max}{qua}}=\frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}\pm1}$ وعند السويات العليا للطاقة يكون تعرض سويات الطاقة كبير، وتصبح الطاقة الإشعاعية عندئذٍ أكبر بكثير من الطاقة الحرارية $\varepsilon=\hbar\omega>>KT$. فتتحول عبارة التوزع الكمية إلى عبارة توزع مكسويل الكلاسيكية، حيث يمكننا في هذه الحالة إهمال الواحد (±1) الموجود في مقام عبارة التوزع لأن $e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}>>1$ بالشكل التالي:

$$N_{\underset{\max}{qua}}=\frac{g}{e^{-\alpha}e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}\pm1}\approx\frac{g}{e^{-\alpha}e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}}=g\,e^{\alpha}e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}}=g\,e^{\alpha}e^{\beta\varepsilon}=g\,e^{\alpha+\beta\varepsilon}=N_{\underset{\max}{clas}}$$

$$\frac{N_n}{N_{n+1}}=\frac{e^{\alpha}g_n e^{\beta\varepsilon_n}}{e^{\alpha}g_{n+1}e^{\beta\varepsilon_{n+1}}}=\frac{g_n e^{\beta\varepsilon_n}}{g_{n+1}e^{\beta\varepsilon_{n+1}}}=\frac{(n+1)e^{n\beta\varepsilon_o}}{(n+2)e^{(n+1)\beta\varepsilon_o}}=\frac{n+1}{n+2}e^{-\beta\varepsilon_o}=\frac{n+1}{n+2}e^{\varepsilon_o/KT}$$

وعند السويات العليا للطاقة $n>>1$ نلاحظ أن: $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+1/n)}{n(1+2/n)}=1$ فنجد:

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{N_n}{N_{n+1}}=e^{\hbar\omega/KT}>1 \quad\Rightarrow\quad N_n>N_{n+1}$$

والتوزع يكون توزع طبيعي.