كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٤

المحاضرة : **الرابعة /عملي/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٣

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التمرين الأول:

لتكن $f(x,y)$ دالة معرفة على $\mathbb{R}^2$ بالشكل:

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad ; \quad x^2+y^2\neq 0$$ و

$$f(x,y)=0 \quad ; \quad x^2+y^2=0$$

ادرس استمرار هذه الدالة في النقطة $(0,0)$

الحل:

لنأخذ المتاليتين:

$$(x^{(n)}, y^{(n)})=\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \longrightarrow (0,0)$$

$$(x'^{(n)}, y'^{(n)})=\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \longrightarrow (0,0)$$

$$f(x^{(n)}, y^{(n)})=\frac{\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n^2}}=\frac{3}{5} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{5}$$

$$f(x'^{(n)}, y'^{(n)})=\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}=\frac{\frac{n^2-1}{n^4}}{\frac{n^2+1}{n^4}}=\frac{n^2-1}{n^2+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

الدالة لا تملك نهاية وبالتالي $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ غير موجودة وبالتالي:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) \neq f(0,0)$$

والدالة f غير مستمرة في النقطة $(0,0)$

التمرين الثاني: لتكن:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^6} & ; x^2+y^6\neq 0\\ 0 & ; x^2+y^6=0\end{cases}$$

ادرس استمرار الدالة f في النقطة $(0,0)$

الحل:

$$(x^{(n)},y^{(n)})=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0)$$

$$(x'^{(n)},y'^{(n)})=\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0)$$

$$f(x^{(n)},y^{(n)})=\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^6}}=\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{n^4+1}{n^6}}=\frac{n^3}{n^4+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$f(x'^{(n)},y'^{(n)})=\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}=\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{n^2+1}{n^6}}=\frac{n^2}{n^2+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

ونهاية الدالة f غير موجودة وبالتالي:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) \neq f(0,0)$$

والدالة f غير مستمرة في النقطة $(0,0)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التمرين الثالث:

ادرس استمرار الدالة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & ; x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ; x^2+y^2=0\end{cases}$$

الحل:

$$0\leq |f(x,y)-0|=\left|\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{x^4}{x^2+y^2}+\frac{y^4}{x^2+y^2}\right|$$

$$=\left|\frac{x^2\cdot x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2\cdot y^2}{x^2+y^2}\right|\leq x^2+y^2$$

$$0\leq |f(x,y)-0|\leq x^2+y^2$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^2+y^2=0$$

ومن برهنة الإحاطة فإنّ:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |f(x,y)-f(0,0)|=0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$$

وبذلك فإنّ الدالة f مستمرة في النقطة $(0,0)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التمرين الرابع:

لتكن لدينا الدالة $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y}$

هل هذه الدالة مستمرة على مجموعة تعريفها وهل هي مستمرة بانتظام وماذا تستنتج

الحل:

مجموعة تعريف هذه الدالة هي:

$$\left|\frac{x}{y}\right| \leq 1 \iff |x| \leq |y| \quad \& \quad y \neq 0$$

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq |y| \ \& \ y \neq 0\}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} \arcsin\frac{x}{y} \quad ; (x_0,y_0) \in E$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = \arcsin\frac{x_0}{y_0} = f(x_0,y_0)$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

ومنه فإن الدالة f دالة مستمرة على مجموعة تعريفها

f دالة غير مستمرة بانتظام لأنّ:

$$(x^{(n)}, y^{(n)}) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in E$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$(x'^{(n)}, y'^{(n)}) = \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}\right) \in E$

حيث:

$$d\left((x^{(n)}, y^{(n)}), (x'^{(n)}, y'^{(n)})\right) = \sqrt{(x^{(n)} - x'^{(n)})^2 + (y^{(n)} - y'^{(n)})^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{n}\right)^2} = \frac{2}{n} \to 0 < \delta$$

ولكن:

$$d\left(P(x^{(n)}, y^{(n)}), P(x'^{(n)}, y'^{(n)})\right) = \left|\arcsin\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - \arcsin\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right|$$

$$= \left|\frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right)\right| = |\pi| = \pi > \varepsilon$$

بالتالي شرط الاستمرار المنتظم غير محقق

والدالة غير مستمرة بانتظام.

الاستنتاج: ليست كل دالة مستمرة تكون مستمرة بانتظام، ولكن الاستمرار المنتظم يؤدي إلى الاستمرار.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة