كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٤

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الاستمرار والاستمرار المنتظم لدالة بعدة متحولات:

ملاحظة (1): إليك شرط الاستمرار المبني على الجوار:

لتكن الدالة $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ والمعرفة بالشكل:

$y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ في $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E$

مستمرة في النقطة $x = x^0$ (أو عندما $x \to x^0$) حيث $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ إذا وفقط إذا كان:

$$d(f(x), f(x^0)) \xrightarrow[x \to x^0]{} 0$$

في $\mathbb{R}$

أي إذا كانت:

$$|f(x) - f(x^0)| \xrightarrow[x \to x^0]{} 0$$

ملاحظة (2): في التطبيقات العملية إذا أردنا إثبات أنّ:

الدالة f المعرفة في (1) بأنها غير مستمرة في النقطة $x = x^0$

يكفي أن نأخذ متتاليتين من نقط المجموعة E وهي مجموعة تعريف الدالة f بحيث تكون هاتان المتتاليتان متقاربتان من النقطة x^0 ولكن صورة كل منهما وفق الدالة f لهما نهايتان مختلفتان.

مثال 1: ادرس استمرار الدالة f المعرفة بالشكل التالي:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & ; \ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & ; \ x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

المطلوب: ① أوجد مجموعة تعريف الدالة f.

② ادرس استمرار هذه الدالة في النقطة:

$(x^0, y^0) = (0,0)$

الحل: ① الدالة f دالة تابعة لمتحولين هما: x, y

وهي معرفة على جميع نقط المستوي $\mathbb{R}^2$ أي أن:

$$E = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) ; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

② تكون الدالة f مستمرة في النقطة (0,0) إذا

وفقط إذا كان:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

وبالتالي أو لا ندرس $\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y)$ من أجل ذلك نأخذ

المتتاليتان

$$(x^n, y^n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$(x'^n, y'^n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

ولكن:

$$f(x^n, y^n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$f(x'^n, y'^n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{-1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{-2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نلاحظ أنّ: $\lim_{n\to\infty} f(x^n, y^n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x'^n, y'^n)$

والدالة f ليس لها نهاية في النقطة $(0,0)$ ويكون لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) \neq f(0,0) = 0$$

والدالة f غير مستمرة في النقطة $(0,0)$

مثال ②: ادرس استمرار الدالة:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

والمطلوب:

① أعهد مجموعة تعريف الدالة f.

② ادرس استمرار هذه الدالة في النقطة $(0,0)$

الحل:

① الدالة f دالة تابعة لمتحولين هما x, y وهي معرفة على جميع نقط المستوي $\mathbb{R}^2$ أي أن مجموعة تعريف الدالة f هي

$$E = \{(x,y) ; (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$$

② الدالة f مستمرة في النقطة $(0,0)$ إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$$

طريقة ①: يكفي أن نثبت أنّ:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |f(x,y) - f(0,0)| = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لدينا:

$$0 \le |f(x,y) - f(0,0)| = |(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}| = |x+y| \cdot |\sin\frac{1}{x}| \cdot \sin\frac{1}{y} \le |x| + |y|$$

أصبح لدينا: $0 \le |f(x,y) - f(0,0)| \le |x| + |y|$

وبأخذ النهاية في أطراف المتراجحة السابقة عندما $x \to 0$, $y \to 0$ نجد أنّ:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |f(x,y) - f(0,0)| = 0$$

إذاً:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) - f(0,0) = 0 \iff \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

والتابع f مستمرة في النقطة $(0,0)$

طريقة ② لنأخذ المتتاليتين:

$$(x^n, y^n) = \left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$(x'^n, y'^n) = \left(\frac{\pi}{4n}, \frac{\pi}{4n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

وبالتالي:

$$\lim_{n\to\infty} f(x^n, y^n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right)\sin\frac{n}{\pi}\sin\frac{n}{\pi} = 0$$

لا نهاية متناهية في الصفر — دالة محدودة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x^n, y^n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x^n, y^n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{\pi}{4n}, \frac{\pi}{4n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{4n} + \frac{\pi}{4n}\right) \sin\frac{4n}{\pi}$$

النهاية الثانية هي نهاية الصفر

النهاية المحدودة

$$\sin\frac{4n}{\pi} = 0$$

النهاية محدودة

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x^n, y^n) = 0$$

نلاحظ تحقق الشرط:

$$\forall (x^n, y^n)_{n\geq 1} ; (x^n, y^n) \in E ; n = 1, 2, \ldots \text{ و } (x^n, y^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow f(x^n, y^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0,0) = 0$$

وبالتالي:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

الدالة مستمرة في النقطة $(0,0)$

طريقة (3) f مستمرة في النقطة $(0,0)$ إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$$

أولاً: حساب $\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y)$ وهي سوية مثال سابق كانت

$$\begin{cases} \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y) = 0 \end{cases}$$

ثانياً: نبحث عن:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$$

نلاحظ أن: $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

وبنتيجة فإن الشرط تحقق وبنتيجة فإن الدالة f مستمرة في النقطة $(0,0)$

الاستمرار المنتظم:

نقول عن الدالة $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ والمعرفة بالشكل: $y = f(x)$ إنها مستمرة بانتظام على المجموعة E إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) ; \forall x, x' \in E \ \& \ d(x,x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

نتيجة: إن الاستمرار المنتظم للدالة يقتضي بالضرورة استمرارها على هذه المجموعة ولكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً أي إذا كانت الدالة f مستمرة على مجموعة تعريفها ليس من الضروري أن تكون هذه الدالة مستمرة بانتظام على مجموعة تعريفها.

مثال: الدالة: $u = f(x,y) = \arcsin \frac{x}{y}$

هي دالة معرفة على مجموعة نقاط المستوي $\mathbb{R}^2$ والتي تحقق: $\left|\frac{x}{y}\right| \leq 1 \ \& \ y \neq 0$ أي:

$$\left|\frac{x}{y}\right| \leq 1 \ \& \ y \neq 0 \Rightarrow |x| \leq |y| \ \& \ y \neq 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أي أن مجموعة تعريف الدالة f هي:

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; |x|\le|y| \ \& \ y\neq 0\}$$

إن الدالة f مستمرة على E لأنها كذلك:

$$\forall (x_0,y_0)\in E ; |x_0|\le|y_0| \ \& \ y_0\neq 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \arcsin\frac{x}{y}=\arcsin\frac{x_0}{y_0}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

ولكن إذا درسنا الاستمرار المنتظم للدالة f بالشكل:

إذا أخذنا $\varepsilon=\frac{1}{2}$ وأخذنا المتتاليتين:

$$(x^n,y^n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\in E \ ; \ n=1,2,\dots$$

$$(x'^n,y'^n)=\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)\in E \ ; \ n=1,2,\dots$$

عندئذٍ فإن:

$$d\left((x^n,y^n),(x'^n,y'^n)\right)=\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}-\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^2}=\frac{2}{n}$$

$$d\left((x^n,y^n),(x'^n,y'^n)\right)=\frac{2}{n}\longrightarrow 0<\delta \ ; \ \forall\varepsilon$$

بينما:

$$d\left(f(x^n,y^n),f(x'^n,y'^n)\right)=|f(x^n,y^n)-f(x'^n,y'^n)|$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= |\arcsin 1 - \arcsin -1| = |\frac{\pi}{2} - (\frac{-\pi}{2})| = \pi > \frac{1}{2} = \varepsilon$

إذاً من أجل $\varepsilon = \frac{1}{2}$ توجد نقطتان (x^n, y^n) و (x'^n, y'^n) من المجموعة E بحيث تتحقق المتراجحة:

$$d((x^n, y^n), (x'^n, y'^n)) < \delta \quad ; \quad \forall \delta > 0$$

ولكن المتراجحة:

$$d(f(x^n, y^n), f(x'^n, y'^n)) < \varepsilon$$

غير محققة أي أن التابع f لا يحقق شرط الاستمرار المنتظم و هي غير مستمرة بانتظام.

* إذا كانت التابع $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابع مستمرة على E مغلقة يصبح هذا الاستمرار استمرار منتظم على E يجب أن تكون E مجموعة متراصة كما هو الحال في مبرهنة كانتور:

مبرهنة كانتور:

لتكن $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابع مستمرة على E و E متراصة عندئذٍ فإن f تابع مستمرة بانتظام على E مجموعة

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z